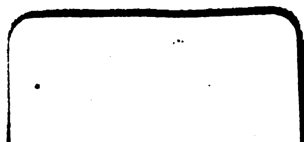

LIBRARY
UNIVERSITY OF
CALIFORNIA
SANTA CRUZ



VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling **NATUURKUNDE.**

DERDE REEKS.

VIJFDE DEEL.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1889.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER-BAKELS.

INHOUD

VAN HET

VIJFDE DEEL

DER

DERDE REEKS.

PROCESSEN-VERBAAL

DER

GEWONE VERGADERINGEN.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER-BAKELS.

INHOUD

VAN HET

VIJFDE DEEL

DER

DERDE REEKS.

PROCESSEN-VERBAAL

DER

GEWONE VERGADERINGEN.

VERSLAGEN.

MEDEDEELINGEN.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 28 Januari 1888.

Tegenwoordig de Heeren: Buys Ballot, Voorzitter, van Diesen, Michaëlis, Schols, Weber, van de Sande Bakhuyzen, Treub, Engelmann, Hoek, Hoffmann, Pekelharing, Dibbits, Martin, Mac Gillavry, Zaaijer, Rauwenhoff, van 't Hoff, Forster, van Dorp, Beijerinck, A. C. Oudemans jr., Franchimont, Lorentz, Place, Baehr, Bierens de Haan, Hubrecht, van der Waals, Donders, Schoute, Stokvis, Zeeman, Bosscha, Grinwis, J. A. C. Oudemans, Korteweg, Brutel de la Rivière, van Riemsdijk en C. A. J. A. Oudemans, Secretaris; van de Letterkundige Afdeeling de Heer: Campbell.

— Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. A. J. Enschedee, Bibliothecaris der Stads-Bibliotheek te Haarlem, 4 Januari 1888; 2°. G. J. W. Bremer, Secretaris van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, 1 Januari 1888; 3°. H. Tonckens jr., Voorzitter der koloniale Bibliotheek te Paramaribo, 1 December 1888; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 2, 5 Januari 1888; 2°. W. H. M. Christie, Directeur van het royal Observatory te Greenwich, 1887; 3°. F. J. de Freitas, Secretaris van het Museu nacional te Rio de Janeiro, 21 Maart 1887; 4°. J. F. Bride, Bibliothecaris der public Library te Melbourne, 9 December 1887; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren: 1°. een schrijven van den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid (2 Januari 1888), ter begeleiding: *a.* van een afschrift van het Koninklijk Besluit d.d. 27 Nov. 1887, n°. 25, waarbij de Commissie tot het overbrengen naar Nederland van den Standaardmeter van hare taak is ontheven; *b.* van een exemplaar van het *Staatsblad* n°. 168, waarin het Koninklijk Besluit van 3 Oct. 1887 tot aanwijzing van de Nederlandsche Standaarden der maten en gewichten, en tot regeling van hunne bewaring is opgenomen; *c.* afschrift van het Koninklijk Besluit van 25 Nov. 1887 n°. 28, houdende benoeming der Commissie, bedoeld in art. 3, al. 2 van het sub 2 genoemd Koninklijk Besluit.

De Minister deelt verder mede, dat de platina Standaard van het kilogram, overeenkomstig het advies der Afd. van 5 Mei 1887 n°. 20, aan den Hoogleeraar Dr. J. A. C. Oudemans te Utrecht in gebruik gegeven, door dien Hoogleeraar in handen zal worden gesteld van bovengenoemde Commissie van Toezicht.

Eindelijk wenscht de Minister te vernemen: »of de Akademie er prijs op stelt dat de platina Mètre, vermeld in art. 1 van het Koninklijk Besluit van 12 April 1839 (*Staatsblad* n°. 13), die krachtens art. 6 van het Koninklijk Besluit van 3 Oct. 1887 (*Staatsblad* n°. 168) voor wetenschappelijke doeleinden bewaard blijft, onder hare bewaring blijft".

De Voorzitter stelt voor, den Minister op de laatste alinea

te antwoorden, dat de Afdeeling er geen prijs op stelt met de bewaring van den platina Meter, vermeld in art. 1 van het Koninklijk Besluit van 12 April 1839 (*Staatsblad* n°. 13) belast te blijven, nu de onlangs tot Standaard verheven platina-iridium Meter aan de Polytechnische School te Delft ter bewaring werd afgestaan. Aldus wordt besloten.

2°. eene uitnoodiging van den Rector der Universiteit van Bologna, aan de Akademie gezonden om zich bij het achtste eeuwfeest, dat op 12 Juni gevierd zal worden, te doen vertegenwoordigen.

Daar op dit oogenblik geen der leden zich bereid verklaart, die vertegenwoordiging te aanvaarden, wordt besloten de gelegenheid daartoe tot 15 Febr. a s. open te houden, als wanneer de Secretaris der Letterkundige Afdeeling zich bereid heeft verklaard een Latijnsch antwoord op de in het Latijn geschreven uitnoodiging op te stellen.

— De Heer Bosscha leest, uit naam der Commissie voor de bliksemafleiders op 's Rijks Museum van schilderijen, het antwoord voor, aan den Minister van Binnenlandsche Zaken te geven op Z.Exs. brief van 10 Aug. ll. n°. 1739 Afd. Kunsten en Wetenschappen, waarin om nadere inlichtingen aangaande een periodiek onderzoek naar de deugdelijkheid der bliksemafleiders verzocht werd. Het antwoord wordt goedgekeurd en zal ter kennisse van den Minister gebracht worden.

— De Heeren Korteweg en Schoute brengen verslag uit over eene verhandeling des heeren Dr. G. Schouten, en stellen voor die in de werken der Akademie op te nemen. Aldus wordt besloten. Een paar opmerkingen, door de Commissie gemaakt en die wellicht eenigen invloed op de redactie van enkele plaatsen in het handschrift zouden kunnen hebben, zullen ter kennisse van den Schrijver gebracht worden, vóór tot het drukken der verhandeling wordt overgegaan.

— De Heer Hoffmann houdt een voordracht over den

oorsprong en de beteekenis der zoogenaamde vrije kernen en van den voedingsdooier bij de Beenvisschen. Spreker zet daarbij uiteen, hoe de verklaring van het aanwezig zijn der vrije kernen, in de volgens vaste wetten plaats hebbende aequatoriale splijting van het ei gezocht moet worden; hoe verder in het ei vermeerdering der kernen niet alleen plaats heeft door mitose, maar ook door eene buitengewone fragmentatie, en hoe eindelijk, naar aanleiding van zijne onderzoekingen, de aanleg van het bloed en van het bloedvatenstelsel niet in den mesoblast gezocht moet worden. Over de beteekenis der fragmentatie, die meer als de uitdrukking eener degeneratie der kernen door de meeste onderzoekers wordt aangezien, en den oorsprong van het bloed uit den mesoblast, ontspint zich eene korte discussie, waaraan de Heeren Mac Gillavry en Hubrecht deelnemen.

— De Heer Treub geeft daarna een, door afbeeldingen en enkele voorwerpen toegelicht, verhaal van zijn bezoek aan Krakatau op 19 Juni 1886. Dat bezoek had vooral ten doel de nieuwe flora van Krakatau te leeren kennen. Sedert de uitbarsting van den vulkaan aldaar is een nieuw plantenkleed ontstaan, dat, daar de bodem met eene laag asch en puimsteen van 1—60 meter bedekt is, onmogelijk een overblijfsel eener vroegere vegetatie zijn kan, evenmin als het op dit onbewoonde en onbewoonbare eiland door menschen kan zijn voortgebracht. Deze nieuwe flora bestaat aan het strand uit de bekende vegetatie, die men op alle koraaleilanden aantreft, en die afkomstig is van door de zée aangespoelde zaden. Op de hoogte van Krakatau vindt men een geheel anderen plantengroei, en wel uitsluitend Varens. Elf verschillende soorten van die plantengroep werden daar door den Spreker gevonden, en de wijze waarop zij zich daar ontwikkeld hadden, nader bestudeerd. Het bleek, dat de sporen dier Varens, eenmaal ter plaatse aangeland, aan den voor plantengroei zoo ongeschikten bodem werden vastgehouden door Draadwieren, wier verslijmend omhulsel een groenachtig waas aan de witte asch, die het eiland bedekt, verleende.

Spreker formuleert de uitkomsten van zijn ter plaatse ingesteld onderzoek in deze 4 punten:

1°. dat men — op veel te eenzijdige manier — de *koraal-eilanden* als type heeft beschouwd bij het bepalen der wijze, waarop eilanden door planten worden bevolkt;

2°. dat men, door die eenzijdigheid, geheel heeft miskend de hoogst belangrijke rol, welke Vaatcryptogamen — en in het bijzonder Varens — bij het begroeid geraken van *vulkanische eilanden* spelen;

3°. dat ongetwijfeld Vaatcryptogamen — en weder meer in het bijzonder Varens — eene even belangrijke rol gespeeld hebben, en nog zullen spelen, als aanzienlijke uitgestrektheden van een vast land door vulkanische uitbarstingen werden of worden verwoest — ten minste in warme luchtstreken;

4°. dat, ten minste in warme luchtstreken en op een vulkanischen bodem, niet Lichenen, doch Algen den groei van Vaatplanten mogelijk maken en voorbereiden.

Met eenige opmerkingen omtrent soortgelijke vegetatiën op Ascension en Juan Fernandez wordt deze voorloopige mededeeling besloten.

— Daar er verder niets te verhandelen is, wordt de Vergadering gesloten.

RAPPORT

OVER DE

BEPROEVING DER BLIKSEMAFLEIDERS OP HET RIJKS-MUSEUM TE AMSTERDAM.

Als vervolg op ons Rapport over de plaatsing en inrichting der bliksemafleiders op het Rijksmuseum te Amsterdam en ter beantwoording van den brief van den Minister van Staat, Minister van Binnenlandsche Zaken, dd. 10 Augustus ll. n^{0}. 1739, Afdeeling Kunsten en Wetenschappen, hebben wij de eer aan de Natuurkundige Afdeeling dezer Akademie het volgende voor te dragen.

De beproeving der bliksemafleiders van het Rijksmuseum moet, naar onze meening, geschieden op gezette tijden, naar vaste regelen, door een persoon: ervaren in het samenstellen en plaatsen dier toestellen en tevens bekwaam in het verrichten van eenvoudige natuurkundige metingen.

Eene keuring eenmaal 's jaars, in de maanden April of Mei, schijnt in den regel voldoende. Bestaat er vermoeden of zekerheid dat de afleiders of het gebouw door een bliksemslag zijn getroffen geworden, dan dient een onderzoek der getroffene deelen zoo spoedig mogelijk te volgen.

De jaarlijksche beproeving moet bestaan in eene schouwing van het geheele samenstel der afleiding van het gebouw en in eene weêrstandsbepaling van bepaalde deelen der geleiding.

Alvorens tot de schouwing over te gaan, moet de persoon, met de beproeving belast, zich aanmelden bij den Architekt, aan wien het onderhoud van het gebouw is opgedragen,

ten einde eene opgaaf te verkrijgen van alle verbouwingen, veranderingen en herstellingen, welke sedert de laatstvoorgaande beproeving aan het gebouw hebben plaats gehad. Bij de algemeene schouwing moet hij meer in het bijzonder nagaan, van welken invloed de genoemde werkzaamheden geweest zijn op de samenstelling en het veilig behoud der afleidingen.

De weêrstandsbepalingen hebben telken jare betrekking op een drietal afleiders, op uiteengelegene deelen van het gebouw te kiezen, in dier voege dat telkens in drie jaren alle afleiders van het gebouw zijn onderzocht geworden.

Die bepalingen bestaan in:

1o. eene weêrstandsmeting van de geleidende verbinding, die het gebouw oplevert tusschen een vast aangenomen centraal punt van het dak en den voet van elk der drie te onderzoeken afleiders;

2o. eene weêrstandsmeting van de geleiding tusschen de spits van elken afleider en een nabijgelegen punt van het metalen dak;

3o. eene weêrstandsbepaling van de aardgeleiding van elk der drie te onderzoeken afleiders.

De afleiding van de directeurswoning moet telken jare worden geschouwd en, op eene dergelijke wijze als hierboven werd voorgeschreven, door weêrstandsmeting worden beproefd.

Van elke beproeving of onderzoeking zal een schriftelijk verslag worden opgemaakt, hetwelk door tusschenkomst van den Architekt, die met het toezicht over het gebouw is belast, aan den Minister van Binnenlandsche Zaken wordt toegezonden.

De uitvoering van de weêrstandsbepalingen zal kunnen bevorderd worden door het aanbrengen van vaste geleidingen. Het schijnt wijders wenschelijk, de metingen telken jare te doen plaats hebben met behulp van dezelfde werktuigen en standaardweêrstanden, welke te dien einde in het gebouw bewaard blijven.

Naardien de bijzonderheden, die op een en ander betrekking hebben, voor een groot deel afhangen van plaatselijke omstandigheden en van hetgeen dienaangaande bij

de eerste beproeving de ondervinding zal leeren, meent de Commissie te moeten aanbevelen dat de persoon, die tot het verrichten der beproevingen zal worden aangewezen, met haar in overleg trede tot het ontvangen van meer bepaalde aanwijzingen en, zoo noodig, tot het ontwerpen van eene nadere instructie.

Haarlem, Amsterdam, Leiden.
20 Januari 1888.

J. BOSSCHA.
J. D. VAN DER WAALS.
H. A. LORENTZ.

VERSLAG

OVER DE

VERHANDELING DES HEEREN Dr. G. SCHOUTEN:

„DE REGEL VOOR DEN BAANVORM EN DE EIGENSCHAPPEN DER CENTRALE BEWEGING GRAPHISCH TOEGELICHT".

(Uitgebracht in de Vergadering van 28 Januari 1888).

In het jaar 1855 is door BENJAMIN PEIRCE in zijne »*Physical and celestial mechanics*" eene graphische methode ter bestudeering van centrale banen medegedeeld, welke meerdere aandacht blijkt te verdienen dan er tot heden aan gewijd schijnt te zijn.

Zet men op de abscissen-as van een rechthoekig coördinaten-stelsel het vierkant van de reciproke waarde van den voerstraal af, en gebruikt men als ordinaat de waarde van de potentiaalfunctie der centrale kracht met omgekeerd teeken, zoodat eene kromme (potentiaalkromme) ontstaat, wier gedaante afhankelijk is van de heerschende krachtenwet, dan kunnen verschillende grootheden, die op de centrale baan betrekking hebben, onmiddellijk uit de figuur afgelezen worden, nadat vooraf in die figuur eene rechte lijn getrokken is, die op bepaalde wijze met de te onderzoeken baan samenhangt. Deze rechte namelijk, die naar de zijde der positieve abscissen stijgende zal moeten zijn, behoort tot richtingscoëfficiënt te bezitten het dubbele vierkant der sectorsnelheid, terwijl de ordinaat van haar snijpunt met de ordinaten-as bepaald wordt door de energie in de baan met

tegengesteld teeken. Banen van gelijke sectorsnelheid worden dus voorgesteld door evenwijdige lijnen; die van gelijke energie door lijnen, gaande door éénzelfde punt der ordinaten-as, lager gelegen naarmate die energie grooter is.

Terwijl de snijpunten dezer rechte met de potentiaalkromme apo- en pericentra der baan aanwijzen, zijn alleen die gedeelten der rechte, waar zij zich *beneden* de potentiaalkromme bevindt, voor de centrale banen van beteekenis. Zij nu A (fig. 7 van de verhandeling van den Heer Schouten) een punt op zulk een gedeelte der rechte gelegen, bezittende y_1 tot ordinaat; C het punt der potentiaalkromme 'twelk dezelfde abscis en $y_2 > y_1$ tot ordinaat bezit; wordt voorts door D, het snijpunt der rechte met de ordinaten-as eene lijn $y = y_0$ getrokken; dan wordt de radiale snelheid in het met A overeenkomstige punt der centrale baan gemeten door $\sqrt{2(y_2 - y_1)}$, de totale snelheid door $\sqrt{2(y_2 - y_0)}$, de sinus van den hoek μ tusschen voerstraal en raaklijn door $\sqrt{\frac{y_1 - y_0}{y_2 - y_0}}$, ja zelfs de kromtestraal ϱ der centrale baan hangt op eenvoudige wijze met de figuur samen. Trekt men in C de raaklijn aan de potentiaalkromme en door het snijpunt dier raaklijn met de ordinaten-as eene lijn $y = y_3$, dan is:

$$\varrho \sin \mu = \frac{y_2 - y_0}{y_2 - y_3} . r.$$

Het is van deze wijze van graphische voorstelling dat de Heer Schouten gebruik maakt om de vroeger door hem (*Versl. en Meded.* 3de Reeks, Deel III) en door den eerstondergeteekende (*Versl. en Meded.*, 2de Reeks, Deel XX) ontwikkelde eigenschappen der centrale banen en de regels ter bepaling van den baanvorm af te leiden, en het moet erkend worden dat, door de methode van Peirce toe te passen en uit te breiden op de wijze zooals zulks door den Heer Schouten is geschied, een bijzonder helder inzicht verkregen wordt in de vroeger gevonden stellingen. Zoo blijkt het dat in een stabiliteitsgebied de potentiaalkromme hare

holte naar beneden, in een instabiliteitsgebied naar boven keert, terwijl uit deze omstandigheid de kenmerkende eigenschappen van deze beide soorten van gebied geheel ongezocht voortvloeien. Eene raaklijn aan de kromme stelt namelijk in het eene geval slechts eene stabiele cirkelbaan, in het andere eene cirkelspiraalbaan, welke baanvorm aan PEIRCE onbekend schijnt geweest te zijn, met hare asymptotische instabiele cirkelbaan voor.

Op één enkel punt verschillen wij met den Heer SCHOUTEN van gevoelen. Het betreft het zeer bijzondere geval dat de eerste afgeleide van de kracht naar den afstand oneindig groot wordt en de snelheid juist de waarde en richting der cirkelsnelheid bezit. Volgens Dr. SCHOUTEN, en in afwijking met zijne vroeger uitgesproken meening (*Versl. en Meded.*, 3[de] Reeks, Deel III, p. 408; vergelijk ook 2[de] Reeks, Deel XX, p. 265) is dan toch de cirkelbaan onmogelijk, maar zal eene andere baan beschreven worden, die met de cirkelbaan eene aanraking van hoogere orde bezit. Wij meenen daarentegen dat hier twee banen mogelijk moeten worden geacht, zelfs somtijds, zooals blijken zal, een drietal.

Laat om dit toe te lichten:

$$F = F_0 + A(r-r_0)^{\varepsilon} + \text{termen met hoogere machten van } (r-r_0)$$

$$\varepsilon < 1$$

de centrale kracht aangeven, dan zal aan de bewegingsvergelijkingen:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -F;\quad 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

voortdurend voldaan worden door:

$$r = r_0 \qquad \varphi = \omega t$$

mits:

$$r_0\,\omega^2 = F_0$$

en het schijnt ons, dat daarom de cirkelbaan als eene mogelijke baan moet worden erkend. *Daarnaast* bestaat nu echter eene oplossing:

$$r = r_0 + \alpha(\pm t)^{\frac{2}{1-\varepsilon}} + \text{hoogere machten van } t$$

$$\varphi = \omega t + \beta(\pm t)^{\frac{3-\varepsilon}{1-\varepsilon}} + \text{hoogere machten van } t$$

alwaar α en β moeten voldoen aan de voorwaarden:

$$\frac{2\alpha(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2} = -A\alpha^{\varepsilon}; \quad \pm\frac{2\alpha\omega}{1-\varepsilon} + \frac{(3-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2}\beta r_0 = 0$$

verkregen door op de laagste machten van t acht te slaan. Voor α vindt men hieruit, behalve $\alpha = 0$ welke oplossing weder tot de cirkelbeweging terugvoert en met de andere gelijk recht van bestaan bezit,

$$\alpha^{1-\varepsilon} = -\frac{A(1-\varepsilon)^2}{2(1+\varepsilon)}.$$

Daarbij zullen nu, aannemende dat ε een meetbaar gebroken is, verschillende gevallen te onderscheiden zijn, naar gelang teller en noemer even of oneven zijn. Zijn beiden bijv. oneven en is A positief, dan wordt deze oplossing onbestaanbaar en de cirkelbaan is de eenig mogelijke. Inderdaad bevindt zich dan aan weerskanten stabiliteitsgebied. Is A daarentegen negatief, dan zijn naast de cirkelbaan twee banen: eene binnen- en eene buitenwaartsche, mogelijk. In het algemeen, zal eene dergelijke baan steeds gevonden worden aan de zijde waar zich instabiliteitsgebied bevindt. Daarbij dient dan ook op het geval:

$$F = F_0 + A(r_0 - r)^{\varepsilon} + \dots$$

gelet te worden.

Wellicht vindt de schrijver in het bovenstaande aanlei-

ding tot eenige wijziging, want ook afgezien van de meer speculatieve zijde van het hier opgeworpen vraagstuk, schijnt ons zijne berekening eenige herziening te behoeven. In elk geval betreft het geheele punt van verschil eene bijzaak en bevelen wij gaarne zijne verhandeling ter opneming in de Verslagen en Mededeelingen aan.

D. J. KORTEWEG.
P. H. SCHOUTE.

DE REGEL VOOR DEN BAANVORM

EN DE

EIGENSCHAPPEN DER CENTRALE BEWEGING.

GRAPHISCH TOEGELICHT DOOR

Dr. G. SCHOUTEN.



I. Inleiding.

De uitkomsten gevonden in de verhandeling »Algemeene regel voor den baanvorm en duur der centrale beweging" *) zijn hoofdzakelijk afgeleid uit de vergelijking:

$$\tfrac{1}{2} r'^2 = \tfrac{1}{2} r_0'^2 + \int_{r_0}^{r} \frac{C^2 - F r^3}{r^3}\, dr$$

door na te gaan, òf, en zoo ja, op welke afstanden tot het centrum de radiale snelheid nul wordt, m. a. w. door de wortels te bepalen van de vergelijking:

$$\tfrac{1}{2} r_0'^2 + \int_{r_0}^{r} \frac{C^2 - F r^3}{r^3}\, dr = 0.$$

In de volgende bladzijden zullen deze wortels *graphisch* geconstrueerd worden. De krommen, wier onderlinge snijpunten de wortels zullen geven, kunnen zoo gekozen wor-

*) *Verslagen en Mededeelingen der Koninkl. Akad. van Wetensch.*, Afd. Natuurk., 3de Reeks, Deel III.

den, dat een er van in een rechte lijn overgaat; de richting er van wordt bepaald door de *sectorsnelheid* der beweging (de vlakte n.l. door den voerstraal in de tijdseenheid beschreven), terwijl overigens hare ligging in het vlak enkel afhangt van de *energie*, waarmede de beweging plaats grijpt.

De andere kromme wordt bepaald door de krachtenwet alleen.

Is dus deze kromme op een rechthoekig coördinaten-stelsel geteekend, dan zal elke lijn in haar vlak getrokken in de punten, waar ze deze snijdt, de afstanden geven, waar de *peri-* en *apocentra* der baan gelegen zijn. De *sectorsnelheid*, waarmede de beweging in die baan plaats grijpt, zal bepaald worden door den hoek, dien de lijn met de abscissen-as maakt, terwijl de *energie* van 't bewegend punt gegeven wordt door het snijpunt der lijn met de ordinaten-as.

Een verplaatsing van de lijn in het vlak zal op graphische wijze het verband aanwijzen, dat er tusschen de *ligging en afmeting* der baan en de *sectorsnelheid en energie* van de beweging in die baan bestaat, en ons voeren tot een algemeenen regel voor den baanvorm, die overeenstemt met dien, welke gegeven is in § 51 van bovengenoemde verhandeling.

Verder zal de kromme blijken eigenschappen te bezitten, wier kennis in staat stelt een menigte eigenschappen der centrale beweging uit een figuur te lezen. Alle eigenschappen der banen zoowel in bovengenoemde verhandeling als in die van Prof. KORTEWEG »Over de banen beschreven onder den invloed eener centrale kracht" *) voorkomende, vinden we op die wijze terug.

Omdat de graphische methode uit den aard der zaak niets leert omtrent den duur der beweging, en de kennis omtrent het al of niet eindig zijn van den duur toch een vereischte is om over de werkelijke beweging te kunnen oordeelen, zoo zullen we door de notatie (*A. R.* §) verwijzen naar

*) *Verslagen en Mededeelingen der Kon Akad. v. Wetens.*, Afd. Natuurk., 2de Reeks, Deel XX.

de § van den »Algemeene regel voor enz.", waar de berekening een beslissing geeft.

De eer van de gelukkige keuze voor de krommen, die in dit geval de wortels der vergelijking bepalen, komt toe aan B. PEIRCE. Althans in zijn werk *A system of Analytic Mechanics* past hij de graphische methode toe; en hoewel zijn onbekendheid met banen met asymptotische binnen- en buitencirkels een leemte veroorzaakt in zijne toepassing, zijn toch de uitkomsten door hem gevonden zoo verrassend eenvoudig, dat ze mij aanspoorden een poging aan te wenden om die leemte aan te vullen.

II. DE POTENTIAALKROMME EN DE SECTORLIJN.

1. Stellen we in de formule (6) van (*A. R.* § 2), nl.:

$$\tfrac{1}{2} r'^2 = \tfrac{1}{2} r_0'^2 + \int_{r_0}^{r} \frac{C^2 - F r^3}{r^3} d r :$$

$$\int - F d r = U,$$

$$\int - \frac{C^2}{r^3} d r = V,$$

dan gaat ze over in

$$\tfrac{1}{2} r'^2 = \tfrac{1}{2} r_0'^2 + V_0 - V + U - U_0,$$

of ook, omdat

$$\tfrac{1}{2} r_0'^2 + V_0 = \tfrac{1}{2} r_0'^2 + \frac{C^2}{2 r_0^2} = \tfrac{1}{2} v_0^2$$

is, in

$$\tfrac{1}{2} r'^2 = U - (V + U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2).$$

Omdat de eerste voorwaarde voor de mogelijkheid der beweging is, dat r'^2 geen negatieve waarden mag hebben,

zoo zal alleen beweging kunnen plaats grijpen op afstanden, voor welke

$$U \geqq V + U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2$$

is. Wordt nu U als ordinaat y genomen op een rechthoekig coördinaten-stelsel, waarvan r de abscis is, dan zal

$$y = U$$

de vergelijking eener kromme voorstellen, welker gedaante alleen afhangt van de krachtenwet, en die door PEIRCE *potentiaalkromme* is genoemd.

Wordt evenzoo $V + U_0 - \frac{1}{2} v_0^2$ als ordinaat uitgezet, dan stelt

$$y = V + U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2$$

de vergelijking eener tweede kromme voor, welker vorm alleen zal afhangen van de *sectorsnelheid* $\frac{1}{2} C$, en daarom *sectorkromme* genoemd zal worden.

Zijn beide krommen op hetzelfde coördinatenstelsel geteekend, dan zullen alle deelen der potentiaalkromme, wier ordinaten grooter zijn dan de overeenkomstige ordinaten der sectorkromme, of, zooals we dit in 't vervolg zullen uitdrukken, die *boven* de sectorkromme gelegen zijn, de afstanden aanwijzen, op welke de beweging alleen mogelijk is.

2. Daar $V = \dfrac{C^2}{2 r^2}$ is, zal de sectorkromme in een rechte lijn overgaan, als niet r maar $\dfrac{1}{r^2}$ als abscis wordt uitgezet.

Kiezen we dus op het voorbeeld van PEIRCE $\dfrac{1}{r^2}$ tot abscis x, en drukken we ook U in x uit, dan stellen

$$y = U \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$y = \tfrac{1}{2} C^2 x + U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

resp. de vergelijkingen voor van de *potentiaalkromme* en de *sectorlijn*.

3. Wordt aan de kracht F een nieuwe van den vorm

$\frac{\mu}{r^3}$ toegevoegd, dan wordt U vermeerderd met $\frac{\mu}{2\,r^2}$ of $\frac{1}{2}\,\mu\,x$. Laat men echter U onveranderd, maar vermindert men V met $\frac{1}{2}\,\mu\,x$, dan zal dit geen invloed op de waarde voor r'^2 hebben. Die vermindering van V zal C^2 in $C^2 - \mu$ veranderen, zoodat dus het vermeerderen van de centrale kracht met de waarde $\frac{\mu}{r^3}$ overeenkomt met een vermindering van C^2 met μ *).

4. Eigenschappen der potentiaalkromme.

De raaklijn aan de potentiaalkromme maakt met de abscissen-as een hoek, welks tangens $\frac{dy}{dx}$ gegeven wordt door

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dU}{dr} : \frac{dx}{dr} = \tfrac{1}{2}\,F r^3 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (3)$$

Hieruit volgt:

De potentiaalkromme stijgt bij toenemende abscissen voor aantrekkende, daalt voor afstootende krachten †).

Waar dus de potentiaalkromme evenwijdig is aan de abscissen-as, is de kracht nul, waar ze er loodrecht op gericht is echter oneindig groot. Voor $F = \frac{\mu}{r^3}$ is de potentiaalkromme een rechte lijn.

5. Verder is

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\,\frac{1}{2}\,F r^3}{dr} : \frac{dx}{dr} = -\tfrac{1}{4}\,r^3\,\frac{d\,F r^3}{dr} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (4)$$

Hieruit volgt:

Die deelen der potentiaalkromme, welke hunne *bolle* zijde naar de ordinaten-as gekeerd hebben, geven de afstanden aan, voor welke $F r^3$ een wassende functie van r is; daar-

---

*) Hiermede is de stelling van A. R. § 4 bewezen. Bovenstaand bewijs komt voor bij PEIRCE, § 707.

†) PEIRCE, § 709.

entegen zullen die deelen der potentiaalkromme, welke hunne *holle* zijde naar de ordinaten-as keeren, de afstanden aangeven, voor welke Fr^3 een afnemende functie van r is. Elk buigpunt der potentiaalkromme geeft een afstand, voor welken Fr^3 een maximum- of minimumwaarde bereikt.

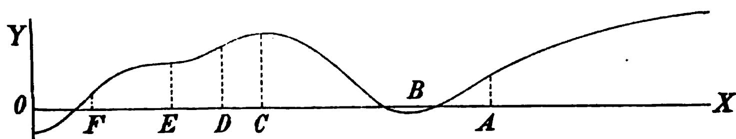
Deze eigenschappen laten zich op de volgende wijze in woorden brengen, als wij gebruik maken van de benamingen, die Prof. KORTEWEG in zijn Verhandeling gebruikt *):

In een afstootingsgebied is de potentiaalkromme dalende bij toenemende abscissen.

In een stabiliteitsgebied heeft de potentiaalkromme haar BOLLE, *in een instabiliteitsgebied haar* HOLLE *zijde naar de* POSITIEVE *ordinaten-as gekeerd. Elk buigpunt in een stijgend deel wijst de grens aan tusschen een stabiliteits- en instabiliteits-gebied.*

In een omgekeerde derdemachts-gebied is de potentiaalkromme een rechte lijn.

Is dus de potentiaalkromme geteekend, dan zal ze de verschillende soorten van gebied aangeven, waaruit het bewegingsveld bestaat.



Is bovenstaande kromme de potentiaalkromme voor zekere krachtenwet, dan zal rondom het centrum tot op een afstand, aangegeven door het punt A, een *stabiliteitsgebied* gelegen zijn. Daarop volgen in volgorde naar de oneindige ruimte een *instabileitsgebied* AB, een *afstootingsgebied* BC, een *stabiliteitsgebied* CD, een *instabiliteitsgebied* DE, een *stabiliteitsgebied* EF, en eindelijk een *instabiliteitsgebied* FO.

*) KORTEWEG § 3. Het gebied, waar de kracht *afstootende* werkt, heet een *afstootingsgebied;* waar ze *aantrekkende* is, een *stabiliteitsgebied* ingeval Fr^3 een *wassende*, een *instabiliteitsgebied* als Fr^3 een *afnemende* functie van r is. Is Fr^3 standvastig, dan heet het gebied een *omgekeerde derdemachts-gebied.*

6. De weg naar het centrum ligt voor 't punt open, als voor $r = 0$ of $x = \infty$

$$U \geqq V + U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2$$

is. Daar voor $r = 0$ $V = \int_0^\infty \frac{C^2}{r^3} dr$ en $U - U_0 = \int_0^{r_0} F\,dr$ is, gaat deze ongelijkheid nu over in

$$\tfrac{1}{2} v_0^2 + \int_0^r F\,dr \geqq \int_0^\infty \frac{C^2}{r^3} dr,$$

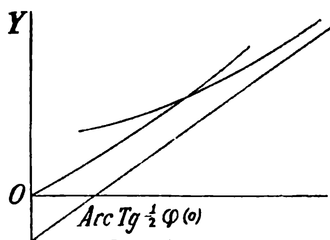
welke volgens de notaties van (A. R. § 44) op de volgende wijze kan geschreven worden:

$$A \geqq A_0.$$

Dit stemt volgens (A. R. § 51) met de berekening overeen. Volgens (A. R. § 52) zal de spiraalvormige tak, die naar het centrum voert, een *eindig* of *oneindig* aantal windingen hebben, naar gelang $\varphi(o)$ ($Fr^3 = \varphi(r)$ stellende) *oneindig groot* of *eindig* is, d. w. z. naar gelang de potentiaalkromme voor oneindig groote abscissen de ordinaten-as tot grensrichting heeft of niet. Het laatste moet het geval wezen, als het centrum omgeven is van een *stabiliteits-gebied*, het eerste kan alleen 't geval wezen als om het centrum een *instabiliteitsgebied* ligt.

Gevolg. Omdat de potentiaalkromme voor alle afstanden, op welke de beweging plaats grijpt, *boven* of *op* de sectorlijn moet gelegen zijn, zoo zal noodzakelijk

$$C^2 \leqq \varphi(o)$$



zijn, als de baan zich tot in het centrum uitstrekt. Doch deze voorwaarde is, wat $C^2 = \varphi(0)$ betreft, niet voldoende. Wordt toch het centrum door een *instabiliteitsgebied* omringd, dan zal de potentiaalkromme een asymp-

toot hebben. Heeft nu de sectorlijn de richting van die asymptoot, maar ligt ze *boven* deze, dan zal ze de potentiaalkromme zeker snijden, zoodat de weg naar het centrum is afgesneden.

Dezelfde uitkomst is door berekening gevonden in (A. R. § 33—36), waar is aangetoond, dat voor $C^2 = \varphi(0)$ het centrum dan alleen bereikt wordt, als tegelijkertijd $A < A_0$ is.

7. De weg naar het oneindige ligt voor het punt open, als voor $r = \infty$ of $x = 0$:

$$U \geqq V + U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2$$

is. Nu is voor $r = \infty$ $V = 0$ en $U - U_0 = -\int_{r_0}^{\infty} F\,dr$,

zoodat de ongelijkheid overgaat in

$$\tfrac{1}{2} v_0^2 - \int_{r_0}^{\infty} F\,dr \geqq 0,$$

of ook in

$$\tfrac{1}{2} v_0^2 + \int_0^{r_0} F\,dr \geqq \int_0^{\infty} F\,dr,$$

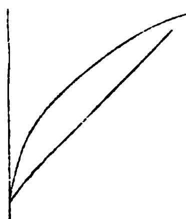
welke met behulp van de notaties in (A. R. § 44) als volgt geschreven kan worden:

$$A \geqq A_{\infty}.$$

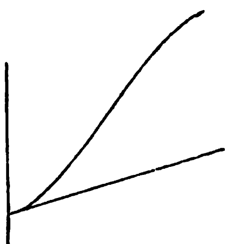
Dit stemt overeen met de berekening (A. R. § 51).

Gevolg. Wordt het bewegingsveld begrensd door een *stabiliteitsgebied*, dan zal voor $A = A_{\infty}$ noodzakelijk

$$C^2 < \varphi(\infty)$$



moeten zijn, terwijl $C^2 \geqq \varphi(\infty)$ alle beweging op zeer grooten afstand van 't centrum uitsluit. Dit stemt overeen met (A. R. § 18). Is echter op oneindigen



afstand een *instabiliteitsgebied* gelegen, dan zal voor $A = A_\infty$ noodzakelijk:

$$C^2 \leqq \varphi(\infty)$$

moeten zijn, daar $C^2 > \varphi(\infty)$ de beweging op zeer grooten afstand uitsluit.

Dit stemt overeen met (A. R. § 43).

8. Eigenschappen der sectorlijn.

De sectorlijn maakt met de abscissen-as een hoek φ, welks tangens gelijk $\frac{1}{2} C^2$ is, terwijl ze de ordinaten-as snijdt in een punt, dat op een afstand $U_0 - \frac{1}{2} v_0^2$ van den coördinaten-oorsprong ligt.

Hieruit volgt:

1. *Een verplaatsing van de sectorlijn evenwijdig aan zich zelve zal alle banen leeren kennen, die met dezelfde sectorsnelheid worden beschreven.*

Geschiedt de verplaatsing van de sectorlijn zóó, dat haar snijpunt met de ordinaten-as zich in de negatieve richting van deze verplaatst, dan zal de energie van de overeenkomstige beweging van 't punt toenemen.

2. *Een wenteling van de sectorlijn om een punt van de ordinaten-as zal alle banen doen kennen, welke met dezelfde energie beschreven worden.*

9. In elk punt, waar de sectorlijn de potentiaalkromme snijdt, is $r' = 0$, maar $\frac{1}{2} C^2 \gtrless \frac{1}{2} F r^3$, of ook, daar volgens (A. R. § 2, formule (4)) $\dfrac{C^2 - F r^3}{r^3} = r''$ is, $r'' \gtrless 0$.

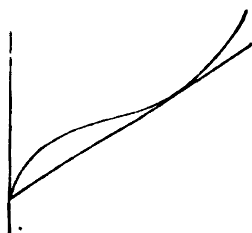
Zulk een snijpunt geeft dus een afstand aan, waar de baan een apo- of pericentrum heeft, daar de berekening heeft geleerd, dat zulk een afstand steeds door het bewegende punt wordt bereikt.

Wij vinden dus:

Elk snijpunt van de sectorlijn met de potentiaalkromme geeft een apo- of pericentrum van de baan; een APOCENTRUM, *als de potentiaalkromme zich* BOVEN, *een* PERICENTRUM, *als ze zich* ONDER *de sectorlijn voortzet.*

10. In elk punt, waar de sectorlijn de potentiaalkromme raakt, is niet alleen $r' = 0$ maar ook $r'' = 0$.

Ligt zulk een raakpunt in een stabiliteitsgebied, dan kan de beweging op den afstand door het raakpunt aangegeven slechts cirkelvormig wezen.



Ligt het raakpunt echter in een instabiliteitsgebied, dan bestaat de *mogelijkheid*, dat het punt de cirkelbaan verlaat.

Teneinde dit nader te onderzoeken, stellen we de functie $C^2 - \varphi(r)$, welke voor $r = r_0$ gelijk nul is, onder de volgende gedaante:

$$C^2 - \varphi(r) = A\, r^3 \varrho (r - r_0)^\varepsilon + \text{termen met hoogere machten van } (r - r_0).$$

A stelt een constante voor en ϱ een functie van r, die zoowel op als even buiten de cirkelbaan eindige positieve waarden heeft. Verder is ε in zooverre willekeurig, dat ze grooter dan 0 moet zijn en voor $\varphi(r)$ dus ook voor F een bestaanbare waarde levert voor $r < r_0$.

Is ε b. v. een breuk met *oneven* teller en noemer, dan ligt de cirkelbaan in een stabiliteitsgebied voor $A < 0$, in een instabiliteitsgebied voor $A > 0$; is de teller echter *even*, de noemer dus oneven, dan vormt de cirkelbaan de grens tusschen een *stabiliteits-* en een *instabiliteitsgebied*, het laatste buitenwaarts voor $A > 0$, echter binnenwaarts voor $A < 0$.

In de gemaakte onderstelling voor $C^2 - \varphi(r)$ volgt uit

$$\tfrac{1}{2} r'^2 = \int_{r_0}^{r} \frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\, dr :$$

$$\tfrac{1}{2} r'^2 = A_1 \varrho_1 (r - r_0)^{\varepsilon + 1} + \ldots$$

waaruit op nieuw blijkt dat voor $A < 0$ de beweging buiten de cirkelbaan onmogelijk is.

Verder is

$$r' = \pm \lambda (r - r_0)^{\frac{\varepsilon+1}{2}} + \dots\dots\dots\dots (a)$$

waar λ een veranderlijke factor is.

Wordt deze vergelijking geïntegreerd, dan komt er

$$t - t_0 = \lambda_1 (r - r_0)^{\frac{1-\varepsilon}{2}} + \dots\dots\dots\dots (b)$$

als ε ongelijk aan 1 is; echter

$$t - t_0 = \lambda_1 \, l (r - r_0) + \dots\dots\dots\dots (c)$$

voor $\varepsilon = 1$.

Hieruit blijkt, dat voor $\varepsilon \geqq 1$ de eenig mogelijke oplossing is $r = r_0$; dat voor $\varepsilon < 1$ de onderstelling $r = r_0$ *uitgesloten* is. Deze is een *singuliere* oplossing van de bewegingsvergelijkingen, wat zoowel uit de algemeene oplossing (b) als uit de differentiaalvergelijking (a) blijkt.

Volgens (b) is $\frac{dr}{dt_0}$ op het teeken na gelijk aan $\frac{dr}{dt}$, zoodat

$$\frac{dr}{dt_0} = \mp \lambda (r - r_0)^{\frac{\varepsilon+1}{2}} + \dots$$

is. Omdat deze uitdrukking voor $\frac{dr}{dt_0}$ nul is voor $r = r_0$, zal de oplossing $r = r_0$ een *singuliere* wezen.

Evenzoo volgt uit (a):

$$\frac{dr'}{dr} = \frac{r''}{r'} = \pm \mu (r - r_0)^{\frac{\varepsilon-1}{2}} + \dots$$

zoodat $\frac{dr'}{dr}$ voor $r = r_0$ een oneindig groote waarde verkrijgt, als $\varepsilon < 1$ is, waaruit op nieuw blijkt, dat $r = r_0$ een *singuliere* oplossing is.

(Vergelijk BOOLE, *A Treatise on Differential Equations*, Chap VIII, art. 11).

In het laatste geval moet de baan, die het punt beschrijft, met de cirkelbaan een aanraking van hoogere orde hebben. Terwijl bij de *singuliere* oplossing $r = r_0$ alle afgeleiden $r^{(n)}$ van r naar den tijd nul zijn, zal dit niet het

geval kunnen zijn met alle afgeleiden, zooals die door differentiatie uit de bewegingsvergelijkingen voortvloeien, als daarin $r = r_0$ gesteld wordt. Is $r_0^{(n)}$ de eerste onder deze, die *niet* nul wordt, zal de aanraking van de $(n-1)^e$ orde wezen.

Omdat

$$r^{(n)} = \frac{d\,r^{(n-1)}}{d\,r} \cdot r'$$

is, zal de exponent van de laagste macht van $(r-r_0)$ bij elke volgende afgeleide met 1 verminderd doch met $\frac{\varepsilon+1}{2}$ vermeerderd, dus in 't geheel met $\frac{1-\varepsilon}{2}$ verminderd worden. Die exponent is bij $r^{('')}$ ε, dus bij $r^{(n)}$ $\varepsilon-(n-2)\frac{1-\varepsilon}{2}$ of $\frac{n}{2}\,\varepsilon - \frac{n-2}{2}$. Hieruit volgt:

$$r_0^{(n)} = \begin{matrix} 0 \\ \text{eindig} \\ \infty \end{matrix} \text{ voor } \varepsilon \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \frac{n-2}{n},$$

$$r_0^{(n+1)} = \begin{matrix} 0 \\ \text{eindig} \\ \infty \end{matrix} \text{ voor } \varepsilon \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \frac{n-1}{n+1},$$

zoodat de aanraking van de n^e orde zal wezen, als ε voldoet aan de ongelijkheid

$$\frac{n-2}{n} < \varepsilon \leqq \frac{n-1}{n+1},$$

welke ook op de volgende wijze kan geschreven worden:

$$n < \frac{2}{1-\varepsilon} \leqq n+1$$

waar $(1-\varepsilon)$ den graad van oneindigheid van $-\varphi'(r_0)$ voorstelt.

Is dus $-\varphi'(r_0) = \infty$, dan zal het punt de cirkelbaan onmiddellijk verlaten; of het zich buiten dan wel binnen deze zal gaan bewegen, blijft onbeslist; beide richtingen zijn even goed mogelijk, onverschillig van welke orde de aanraking zij. Vormt de cirkelbaan evenwel de grens tus-

schen een stabiliteits- en een instabiliteitsgebied, dan zal de beweging in het laatste plaats grijpen.

Anders is het, als het punt gedurende zijn beweging op de cirkelbaan komt in den toestand $r' = 0$ en $r'' = 0$. Dit zal het geval zijn, als de sectorsnelheid en energie van de beweging gelijk zijn aan dezelfde grootheden bij het begin der beweging op den cirkel. Is de aanraking van *even* orde, dan zal het punt de cirkelbaan *overschrijden*, is ze van *oneven* orde, dan zal het punt terugkeeren, na de cirkelbaan bereikt te hebben. De cirkelbaan is dan de *omhullende* van alle mogelijke banen, die het punt onder dezelfde krachtenwet kan beschrijven.

De gevonden uitkomsten laten zich in de volgende woorden samenvatten, als onder (C, r_0) een cirkelbaan verstaan wordt met den straal r_0, waar langs het bewegende punt voortbewogen wordt met de sectorsnelheid $\frac{1}{2} C$.

Ligt de cirkelbaan (C, r_0) *in een stabiliteitsgebied, dan is ze de eenig mogelijke baan.*

Ligt ze in een instabiliteitsgebied, dan evenzoo als $-\varphi'(r_0)$ *een eindige waarde heeft. Is echter* $-\varphi'(r_0)$ *een oneindig groot van de orde* η, *dan zal de cirkelbaan niet beschreven worden. De baan van het punt zal met de cirkelbaan een aanraking hebben, waarvan de orde wordt aangegeven door het grootste geheele getal, dat kleiner is dan* $\frac{2}{\eta}$ *).

Voor elke cirkelbeweging vinden we:

De sectorsnelheid $\frac{1}{2} C$, *waarmede de cirkelbeweging op eenigen afstand plaats grijpt, wordt bepaald door den hoek* $\varphi = Arc.\ Tg.\ \frac{1}{2} C^2$, *dien de raaklijn aan het overeenkomstige punt der potentiaalkromme met de abscissen-as maakt.*

11. De afstand van het raakpunt tot de lijn, die evenwijdig aan de abscissen-as getrokken wordt door het snijpunt van de raaklijn met de ordinaten-as, wordt gegeven door

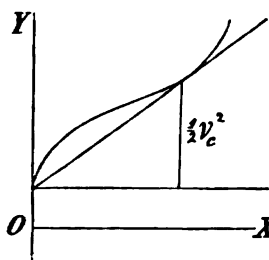
---

*) Deze uitkomst kwam ook voor in de verhandeling, zooals ik die voor de werken van de Kon. Akad. van Wetenschappen aanbood; evenwel was ze daar op een andere wijze afgeleid.

$$x \times \tfrac{1}{2} Fr^3 = \tfrac{1}{2} Fr = \tfrac{1}{2} v_c^2,$$

als v_c de snelheid der cirkelbeweging voorstelt.

Bijgevolg:

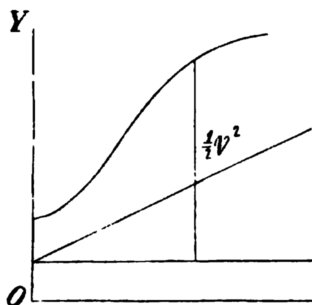


Het halve vierkant van de snelheid, waarmede de cirkelbeweging op zekeren afstand plaats grijpt, wordt gegeven door den afstand van het overeenkomstige punt der potentiaalkromme tot de lijn, die evenwijdig aan de abscissen-as getrokken wordt door het snijpunt van de ordinaten-as met de raaklijn aan de potentiaalkromme.

12. De afstand van een punt der potentiaalkromme tot de lijn, die evenwijdig aan de abscissen-as getrokken wordt door het snijpunt der sectorlijn met de ordinaten-as wordt bepaald door

$$U - (U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2) = \tfrac{1}{2} v_0^2 + \int_r^{r_0} F\, dr = \tfrac{1}{2} v^2 \text{ *)}.$$

Bijgevolg:



Het halve vierkant, waarmede de beweging op zekeren afstand plaats grijpt, wordt gegeven door den afstand van het overeenkomstige punt der potentiaalkromme tot de lijn, die evenwijdig aan de abscissen-as getrokken wordt door het snijpunt van sectorlijn en ordinaten-as.

Tevens blijkt, dat *de inhoud van den driehoek, die door de ordinaat wordt afgesneden van den hoek, dien de sectorlijn met bovengenoemde lijn maakt, gelijk is aan*

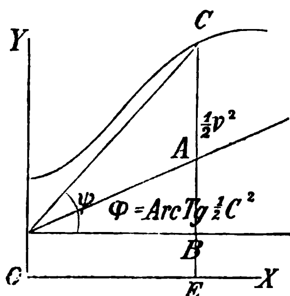
$$\tfrac{1}{2} x . \tfrac{1}{2} C^2 x = \frac{C^2}{4 r^4} = \left(\tfrac{1}{2} \frac{d\theta}{dt}\right)^2 =$$

het vierkant van de halve hoeksnelheid, waarmede de voerstraal van het bewegende punt wentelt.

---

*) PEIRCE § 712.

13. *De hoek ψ, dien de verbindingslijn van een punt der potentiaalkromme met het snijpunt der sectorlijn en de ordinaten-as maakt met de abscissen-as, wordt bepaald door*



$$tg\,\psi = \frac{\frac{1}{2}\,v^2}{x} = \tfrac{1}{2}\,v^2\,r^2.$$

14. Is (r, s) de hoek, dien de voerstraal van 't bewegende punt met de raaklijn aan de baan maakt, dan volgt uit het beginsel der vlakten, nl. $v\,r\,sin\,(r, s) = C$:

$$sin^2\,(r, s) = \frac{C^2}{v^2\,r^2} = \frac{tg\,\varphi}{tg\,\psi}\;*)$$

als ψ de hoek is in § 13 genoemd, en $\varphi = Arc.\ Tg\,\tfrac{1}{2}\,C^2$ de hoek, dien de sectorlijn met de abscissen-as maakt.

15. Is ϱ de kromtestraal van de baan, dan volgt uit $\frac{v^2}{\varrho} = F\,sin\,(r, s)$:

$$\frac{\varrho\,sin\,(r, s)}{r} = \frac{v^2}{F\,r} = \frac{v^2}{v_c^2}\;\dagger).$$

Bijgevolg: *de projectie van den kromtestraal der baan op den voerstraal staat tot dien voerstraal zelf als het vierkant der snelheid tot dat der cirkelsnelheid.*

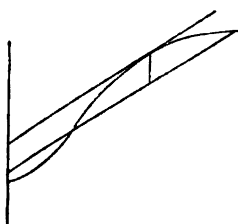
III. Eigenschappen van de banen der centrale beweging.

16. Met behulp van de ontwikkelde eigenschappen van potentiaalkromme en sectorlijn worden de volgende eigenschappen der banen uit een figuur afgelezen.

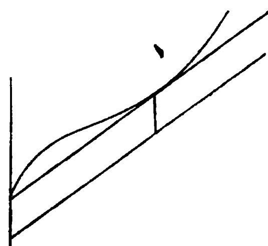
---

*) Peirce geeft $sin^2\,(r, s) = \frac{AB}{BC}$.

†) Peirce geeft in § 712 een eenigszins andere uitdrukking voor den kromtestraal.



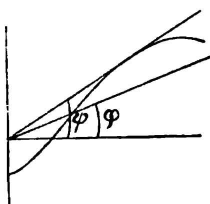
a. Elke cirkelbaan in een $\begin{matrix}\textit{stabiliteits-}\\ \textit{instabiliteits-}\end{matrix}$ *gebied snijdt alle banen in dat gebied, die met dezelfde sectorsnelheid als deze maar met grootere energie beschreven worden.*

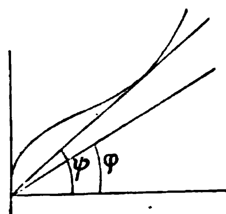


In het snijpunt is de radiale snelheid $\begin{matrix}\textit{maximum}\\ \textit{minimum}\end{matrix}$. $\left(\text{A. R. } \dfrac{\S\ 12 \text{ en } \S\ 19}{\S\ 29}\right)$.

Volgt hieruit (A. R. § 19), dat alle banen, die met dezelfde sectorsnelheid beschreven worden volgens de krachtenwet μr^{-2}, gelijke parameters hebben, toegepast op de krachtenwet μr leert de eigenschap, dat alle ellipsen met dezelfde sectorsnelheid beschreven gelijken inhoud hebben. Zijn toch a en b de halve assen der ellips, dan is de radiale snelheid het grootst als de voerstraal $\sqrt{ab}$ lang is. De omloopstijden zijn dus ook gelijk.

b. Elke cirkelbaan in een $\begin{matrix}\textit{stabiliteits-}\\ \textit{instabiliteits-}\end{matrix}$ *gebied snijdt alle banen in dat gebied, die met dezelfde energie als deze maar met kleinere sectorsnelheid beschreven worden. In het snijpunt is*



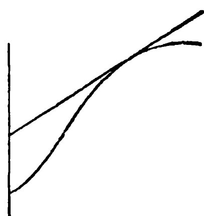


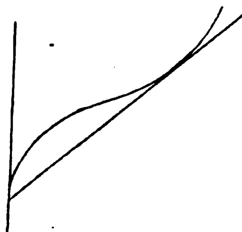
1. $v = v_c$.
2. $v\, r$ $\begin{matrix}\textit{maximum}\\ \textit{minimum}\end{matrix}$.
3. $\sin\,(r, s)$ $\begin{matrix}\textit{minimum}\\ \textit{maximum}\end{matrix}$.
4. *De projectie van den kromtestraal der baan op den voerstraal gelijk aan den voerstraal.*

De stellingen onder 1, 2 en 3 komen overeen met de stellingen II en III van Prof. Korteweg, die daaruit afleidde, dat alle elliptische banen, die met dezelfde energie beschreven worden onder de werking van een kracht

μr^{-2}, gelijke groote assen hebben; worden ze echter beschreven onder de werking van de kracht μr, dan zal de diagonaal van den rechthoek op de assen beschreven bij elke ellips evenlang zijn.

De stelling onder 4 toegepast op de krachtenwet μr^{-2} geeft, dat het krommingsmiddelpunt van een punt eener ellips, dat gelegen is in een der uiteinden van de kleine as, het snijpunt is van deze as met de loodlijn, uit een der brandpunten opgericht op de lijn, die dat brandpunt met het beschouwde punt der ellips verbindt. Toegepast op de krachtenwet μr leert ze, dat het krommingsmiddelpunt van een punt in een der uiteinden van de gelijke geconjugeerde middellijnen gelegen gevonden wordt in het snijpunt van twee loodlijnen, de eene opgericht uit het middelpunt der ellips op de middellijn van 't punt, de andere uit het punt neergelaten op de geconjugeerde middellijn.





c. In een stabiliteitsgebied kan de beweging nimmer cirkelvormig worden.

In een instabiliteitsgebied zal elke cirkelbaan asymptotische binnen- of buitencirkel wezen voor alle banen in dat gebied, die met dezelfde energie en sectorsnelheid als deze beschreven worden *).

Uit de figuur blijkt, dat de cirkelbaan in een instabiliteitsgebied vanweerszijden kan genaderd worden, en de berekening in (A. R. § 28 en § 30) heeft doen zien, dat daartoe een oneindig groot tijdsverloop noodig is, behalve wanneer $\frac{dF_r^3}{dr}$ op de cirkelbaan oneindig groot is, in welk geval het bewegende punt de cirkelbaan zal bereiken. Op dat oogenblik is $r' = 0$, $r'' = 0$, $\sin(r, s) = 1$ en de kromtestraal van de baan gelijk aan den straal des cirkels, zoo-

---

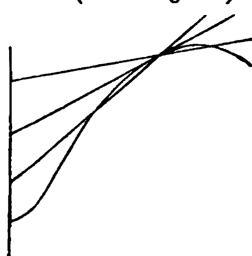
*) Zie voor $\frac{dF}{dr} = \infty$ op de cirkelbaan § 10.

dat deze de kromtecirkel van de baan is ter plaatse, waar het punt de cirkelbaan betreedt. Op dat oogenblik heeft dus het punt een beweging, die in alle opzichten gelijk is aan de cirkelbeweging, zoodat om die reden in (A. R. § 28) beweerd werd, dat het punt de cirkelbaan voortaan zal beschrijven *).

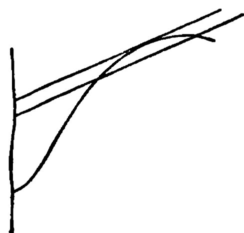
Verder moge nog de opmerking gemaakt worden, dat voor $\frac{d\,F r^3}{d\,r} = -\infty$ de potentiaalkromme in het overeenkomstige punt een oneindig groote kromming zal hebben.

Als nu bij een buigpunt de kromming nul is, *zal een cirkelbaan op de grens van een stabiliteits- en instabiliteitsgebied asymptotische cirkel wezen van alle banen in het instabiliteitsgebied, die met dezelfde sectorsnelheid en energie als de cirkelbaan beschreven worden* †).

d. Een geringe storing van een cirkelbeweging in een stabiliteitsgebied zal aanleiding geven tot een nieuwe beweging in een regelmatig gegolfde baan, wier peri- en apocentra zeer weinig verwijderd zullen liggen van de oorspronkelijke cirkelbaan (A. R. § 20).



Bestaat de storing alleen uit een *vermeerdering* / *vermindering* van de tangentiale snelheid, dan zullen de *peri-* / *apo-* centra der nieuwe baan op de oorspronkelijke cirkelbaan gelegen zijn.



Veroorzaakt de storing slechts een radiale snelheid, dan zal de nieuwe baan hare pericentra binnen, hare apocentra nagenoeg even ver buiten de oorspronkelijke cirkelbaan gelegen hebben.

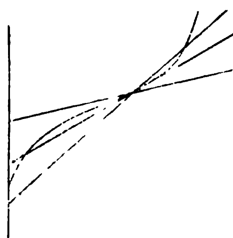
Veroorzaakt de storing zoowel een verandering van de tangentiale als een

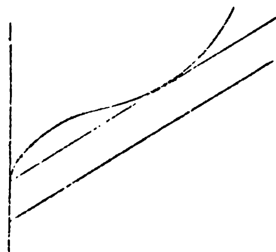
*) Zie echter voor dit geval § 10.

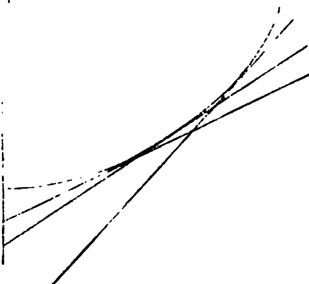
†) KORTEWEG, stelling VI, gevolg *a*.

radiale snelheid, dan zal de nieuwe baan de cirkelbaan regelmatig snijden.

e. Een geringe storing van een cirkelbeweging in een instabiliteitsgebied zal een nieuwe beweging geven in een baan, die zich òf naar den binnenkant, òf naar den buitenkant, òf naar beide kanten tot op eindigen afstand van de cirkelbaan zal verwijderen (A. R. § 24) *).







Geeft de storing alleen een *vermeerdering* / *vermindering* van de tangentiale snelheid, dan zal de nieuwe baan een *peri-* / *apo-* centrum op de cirkelbaan hebben, en overigens het gebied aan de *buiten-* / *binnen-* zijde verlaten, of zich tot het *oneindige* / *centrum* uitstrekken, als dit met het gebied het geval is.

Geeft de storing slechts een radiale snelheid, dan zal de nieuwe baan geen apo- of pericentrum in het instabiliteitsgebied kunnen hebben.

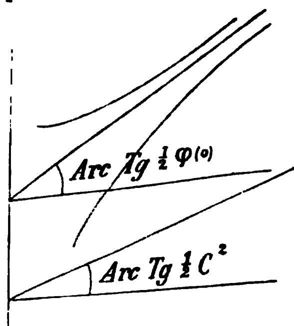
Is eindelijk de storing geheel willekeurig, dan zal de nieuwe baan behalve de vormen in de vorige gevallen nog een asymptotischen binnen- of buitencirkel kunnen hebben in plaats van een apo- of pericentrum.

f. Een storing van een cirkelbeweging op de grens van een stabiliteits- en instabiliteitsgebied zal een nieuwe beweging geven in een baan, die altijd een apo- of pericentrum heeft,

---

*) Deze en de vorige stelling komen overeen met stelling IV van Prof. Korteweg.

ook beiden kan hebben, of ook een van beiden met een asymptotischen cirkel.



g. Voor de spiraal, die naar het centrum voert geldt

$$lim\ sin\ (r,\ s) = \frac{C^2}{\varphi\,(0)}\ ^{*)}$$

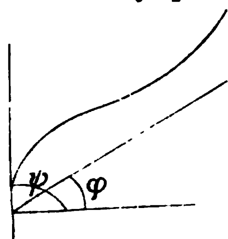
$$lim\ \varrho\ = 0.$$

Met het oog op (A. R. § 52) vinden we:

Een spiraal, die met een *eindig* aantal windingen (dus voor $\varphi\,(0) = \infty$) naar het centrum voert, zal in de richting van den voerstraal in het centrum komen.

Een spiraal, die met een *oneindig* aantal windingen naar het centrum voert (dus voor $0 < \varphi\,(0) < \infty$), zal onder een scherpen hoek met den voerstraal in het centrum komen als $C^2 < \varphi\,(0)$ is, daarentegen onder een rechten hoek, als $C^2 = \varphi\,(0)$ is.

De tijdruimte, waarin het punt de spiraal naar het centrum doorloopt, is *eindig*, tenzij het centrum omringd wordt door een instabiliteitsgebied, $A = A_0$ (dus $\varphi'\,(0) = \varphi''\,(0) = 0$) is, en daarenboven ook $\varphi'''\,(0) = 0$ is, in welk geval het centrum asymptotisch genaderd zal worden (A. R. § 35).

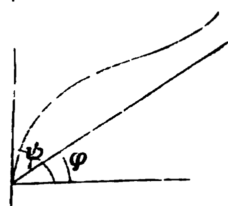


h. De tak, die naar de oneindige ruimte voert, heeft de volgende eigenschappen:

Is $A > A_\infty$, dus de tak hyperboolvormig (A. R. § 52), dan is $lim\ sin\,(r, s) = 0$.

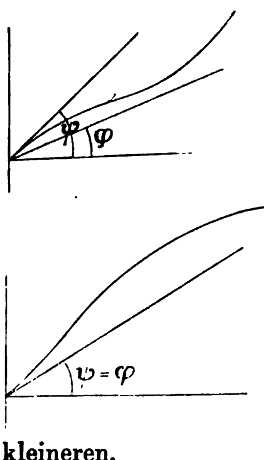
Is $A = A_\infty$; dan is $lim\ sin\,(r,s) = \frac{C^2}{\varphi(\infty)}$.

Is dus $\varphi\,(\infty) = \infty$, de tak bijgevolg paraboolvormig (A. R. § 52), dan is $lim\ (r,s) = 0$.



Is echter $\varphi\,(\infty) < \infty$, dus de tak een spiraal met oneindig veel windingen (A. R. § 52), dan voert deze onder een scherpen hoek met den voerstraal naar het

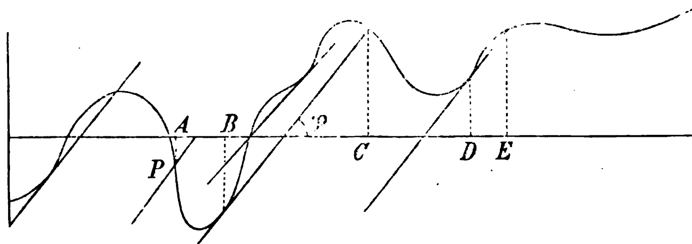
*) Korteweg, stellingen X^a, X^b, X^c, X^d.



oneindige. Alleen wanneer het bewegingsveld eindigt in een instabiliteitsgebied kan $C^2 = \varphi(\infty)$ zijn, in welk geval $lim\ sin\ (r, s) = 1$ is.

Tevens doen de figuren zien, dat zoowel de hyperbool- als de parabool-vormige takken naar het oneindige toe steeds steiler worden, evenals de spiraalvormige tak, die in een *stabiliteitsgebied* ligt; terwijl zulk een tak in een *instabiliteitsgebied* op grooteren afstand minder steil zal zijn dan op kleineren.

k. Worden alle raaklijnen, die een hoek $\varphi = Arc\ Tg\ \frac{1}{2}\ C^2$ met de abscissen-as maken, aan die deelen der potentiaal-kromme getrokken, wier holle zijde naar de positieve ordinaten-as gekeerd is, dan zullen de raakpunten alle afstanden geven, waarop de cirkelbeweging met de sectorsnelheid $\frac{1}{2}\ C$ mogelijk is. Deze afstanden worden natuurlijk gegeven door de positieve wortels van de vergelijking $Fr^3 - C^2 = 0$, die $\frac{d\,Fr^3}{dr} < 0$ maken.



Is bovenstaande kromme lijn de potentiaalkromme voor zekere krachtenwet, dan zullen uit een punt, welks afstand tot het centrum door het punt A wordt aangegeven, twee banen met asymptotischen binnencirkel en geen enkele met asymptotischen buitencirkel kunnen afgezonden worden met een sectorsnelheid $\frac{1}{2}\ C$.

De figuur doet tevens zien, hoe de baan van het punt

gewijzigd wordt, als de energie der beweging bij standvastige sectorsnelheid langzamerhand toeneemt.

Is de energie het kleinst, dus de beweging loodrecht op den voerstraal van 't punt, dan ligt het pericentrum van de baan in A. Bij toenemende energie van de beweging zal het pericentrum allengs alle afstanden $A\,B$ verkrijgen terwijl in B de eerste binnencirkel ligt; daarna zal het plotseling overspringen in C, zoodat op $B\,C$ geen pericentrum kan gelegen zijn, en verder zich over $C\,D$ verplaatsen, in D den tweeden asymptotischen cirkel naderen, om daarna weer over te springen tot E, van waaruit het zich allengs verder tot het centrum zal verplaatsen. De baan zal in alle gevallen met een hyperboolvormigen tak naar het oneindige voeren *).

Een beschouwing van de figuur geeft de volgende stelling:

Het aantal banen met asymptotischen *binnen-* / *buiten-* *cirkel, die met standvastige sectorsnelheid beschreven van uit een punt kunnen afgezonden worden, is gelijk aan het aantal cirkelbewegingen, die in een instabiliteitsgebied met dezelfde sectorsnelheid, maar in volgorde van het punt tot het* *centrum* / *oneindige* *geteld, met steeds grootere energie beschreven worden.*

Daar volgens (A. R. § 47, form. (14))

$$\int_{r}^{r_x} \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}\, d\,r$$

het bedrag voorstelt, waarmede de energie van de cirkelbeweging, die op den afstand r_x met de sectorsnelheid $\frac{1}{2}\,C$ plaats grijpt, die van het punt overtreft, als het zich op den afstand r met dezelfde sectorsnelheid en loodrecht op zijn voerstraal beweegt, zal deze stelling het volgende analytische kenmerk geven:

*) Vergelijk § 4 van de verhandeling van Prof. KORTEWEG.

Bepaal van alle waarden, die de integraal

$$\int_{r_1}^{\rho} \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3} \, dr$$

verkrijgt, als daarin voor ϱ *achtereenvolgens de wortels, gerangschikt in grootte van* r_1 *tot het* $\begin{matrix}\textit{centrum}\\ \textit{oneindige}\end{matrix}$*, van de vergelijking* $Fr^3 - C^2 = 0$ *genomen worden, welke* $\frac{d\,Fr^3}{dr} < 0$ *maken, diegenen, welke een klimmende reeks van positieve waarden vormen. Het aantal termen dezer reeks is gelijk aan het aantal banen met asymtotischen* $\begin{matrix}\textit{binnen-}\\ \textit{buiten-}\end{matrix}$ *cirkel, die van uit een punt op den afstand* r_1 *met de sectorsnelheid* $\frac{1}{2}C$ *kunnen afgezonden worden.*

l. Uit de figuur blijkt tevens, dat er banen mogelijk zijn, die zoowel een asymptotischen binnen- als buitencirkel hebben.

Elke lijn toch, die twee deelen der potentiaalkromme raakt, welke hunne holle zijde naar de positieve ordinaten-as gekeerd hebben, terwijl het tusschen de raakpunten gelegen deel *geheel boven* de raaklijn is gelegen. zal in de raakpunten de afstanden geven, waarop de cirkelbanen gelegen zijn, die door het punt, dat zich tusschen deze in beweegt met een sectorsnelheid en energie gelijk aan die, waarmede elk dier cirkels doorloopen wordt, asymptotisch zullen genaderd worden.

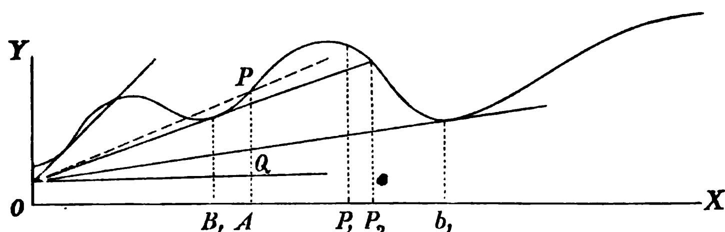
Het analytische kenmerk voor het bestaan van zulke banen bestaat hierin, dat in de integraal

$$\int_{r_1}^{\rho} \frac{Fr^3 - C^2}{r^3} \, dr$$

voor ϱ twee wortels, de een grooter en de andere kleiner dan r_1, van de vergelijking $Fr^3 - C^2 = 0$ gekozen kunnen worden, die $\frac{d\,Fr^3}{dr} < 0$ en tevens de waarde van de integraal positief en gelijk maken.

Het aantal paren van zulke wortels geeft het aantal banen, die uit een plaats op den afstand r van het centrum met de sectorsnelheid $\frac{1}{2}C$ kunnen afgezonden worden, en zoowel in de richting van het centrum als van het oneindige een cirkelbaan asymptotisch zullen naderen.

m. Worden van uit een punt der ordinaten-as onder een scherpen hoek met deze as alle lijnen getrokken, die de potentiaalkromme in deelen raakt, welke hun holle zijde naar de positieve ordinaten-as gekeerd hebben, dan zullen de raakpunten de afstanden aangeven, op welke de cirkelbewegingen met dezelfde energie plaats grijpen.



Stelt bovenstaande kromme lijn de potentiaalkromme voor een zekere krachtenwet voor, dan zullen van uit een plaats, aangegeven door A, een baan met een asymptotischen binnen- en een met een asymptotischen buitencirkel kunnen afgezonden worden met een snelheid $\sqrt{2PQ}$.

Ook hier zien we hoe de ligging en grootte van de baan gewijzigd wordt met de sectorsnelheid van de beweging. Is deze het grootst, dan heeft de baan in P_1 en peri-, in A zelf een apocentrum. Wordt de sectorsnelheid allengs kleiner, dan zal het pericentrum zich verplaatsen over den afstand PP_2, en het apocentrum gelijktijdig over den afstand AB_1, terwijl in B_1 de buitencirkel ligt, die asymptotisch genaderd wordt. Neemt de sectorsnelheid nog meer af, dan zal de baan geen apocentrum meer hebben; het pericentrum echter zal zich verplaatsen over den afstand $P_2 b_1$, terwijl in b_1 de asymptotische binnencirkel gelegen is. Bij nog kleinere sectorsnelheid zal de baan ook geen pericentrum meer hebben.

Uit de figuur blijkt de waarheid van de volgende stelling.

Het aantal banen met asymptotischen binnen- / buiten- cirkel, die met standvastige energie beschreven van uit een punt kunnen afgezonden worden, is gelijk aan het aantal cirkelbewegingen, die in een instabiliteitsgebied met dezelfde energie maar in volgorde van het punt tot het centrum / oneindige geteld, met steeds kleinere sectorsnelheid plaats grijpen.

Omdat volgens *b* op de cirkelbanen, die in een instabiliteitsgebied plaats grijpen, het produkt $v\,r$ een minimumwaarde heeft voor alle banen, die met dezelfde energie als de cirkelbeweging beschreven worden, zoo vinden we het volgende analytische kenmerk:

Het aantal banen met asymptotischen binnen- / buiten- cirkel, die van uit een afstand r_1 met de snelheid v_1 kunnen afgezonden worden, is gelijk aan het aantal onder de minimum-waarden, die $v\,r$ verkrijgt, welke kleiner dan $v_1 r_1$ zijn, en geteld van den afstand r_1 tot het centrum / oneindige een dalende reeks van positieve waarden vormen *).

Ook hier blijkt, dat elk paar *gelijke* minimum-waarden, die in beide reeksen voorkomen, wijst op een baan met asymptotischen *binnen-* en *buiten*cirkel.

m. Uit *k* volgt met in achtneming van § 6 en § 7 de volgende:

Regel voor den vorm der banen, die met standvastige sectorsnelheid ½ C worden beschreven.

Bepaal de positieve wortels van de vergelijking $F r^3 - C^2 = 0$.

Deze wortels bepalen de afstanden, op welke de eenparige cirkelbeweging met de sectorsnelheid ½ C *alleen mogelijk is* †).

Beschrijf in het vlak van beweging de cirkelbanen, op welke $\frac{d F r^3}{d r} < 0$ *is.*

---

*) Korteweg, stelling VII.

†) Zie voor $\frac{dF}{dr} = \infty$ op de cirkelbaan § 10.

Het punt zal geen dezer cirkelbanen kunnen overschrijden, als niet zijn totale arbeidsvermogen dat der betreffende cirkelbeweging overtreft. Is het er aan gelijk, dan nadert het dien cirkel asymptotisch, is het kleiner, dan keert het terug vóór den cirkel bereikt te hebben. Vindt het punt in de richting naar het centrum of het oneindige geen cirkelbaan op zijn weg, dan nog zal zijn baan niet tot het centrum of het oneindige voeren, als zijn totale arbeidsvermogen kleiner is, in het eerste geval, dan dat der kracht $C^2 r^{-3}$, *in het tweede geval, dan dat der beweegkracht* *).

n. Evenzoo volgt uit *l* met inachtneming van § 6 en § 7 een *regel voor den vorm der banen, die met dezelfde energie worden beschreven.*

Vervangt men de cirkelbanen, in den vorigen regel beschouwd, door de cirkelbanen, die met gelijke energie worden beschreven, en wier stralen gegeven worden door de wortels van de vergelijking

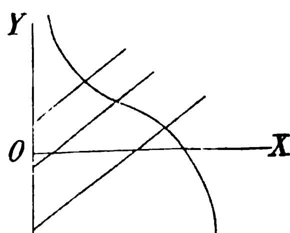
$$\tfrac{1}{2} F r + \int_{r_1}^{r} F\, d r = \tfrac{1}{2} v_1^2,$$

als v_1 de standvastige snelheid is, waarmede de beweging op den afstand r_1 plaats grijpt, dan zal geen van deze cirkelbanen door het punt overschreden worden, als de sectorsnelheid van zijn beweging grooter is dan die van de betreffende cirkelbeweging. Is die er aan gelijk, dan zal de cirkelbaan asymptotische cirkel wezen; is die kleiner, dan zal de cirkelbaan overschreden worden. Voor 't overige moet de regel gelijkluidend zijn met den vorigen.

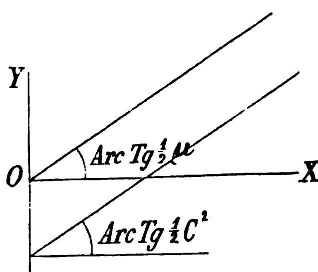
*) Zie § 10 voor 't geval, dat $\frac{dF}{dr}$ op de cirkelbaan ∞ is.

Deze regel komt overeen met (A. R. § 51).

IV. Toepassingen.



a. Is het geheele veld van beweging een *afstootingsgebied*, dus de potentiaalkromme dalende bij toenemende abscissen, dan heeft de baan altijd een pericentrum en hyperboolvormigen tak. Omdat $\varrho \, sin \, (r, s)$ hier negatief is, zal de baan hare boll zijde naar het centrum gekeerd hebben. (A. R. § 9).

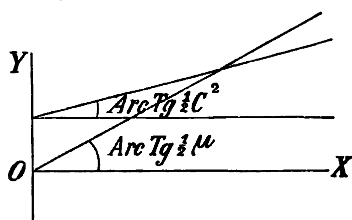


b. Is het geheele veld van beweging een *omgekeerde derdemachts-gebied*, dus de beweegkracht van den vorm μr^{-3} en de potentiaalkromme een rechte lijn, die met de abscissen-as een hoek gelijk *Arc. Tg* $\frac{1}{2} \mu$ maakt en door den coördinaten-oorsprong gaat, dan geeft de figuur:

Voor $C^2 = \mu$:

$A = A_0 = A_\infty$: Overal slechts eenparige cirkelbeweging.

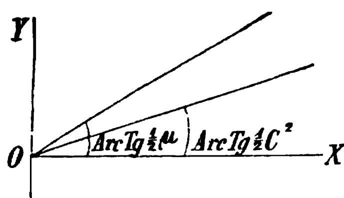
$A > A_0 = A_\infty$: ${}^\infty S_c - H_y$, de baan wordt naar het centrum heen steeds minder steil, en is in het centrum zelf loodrecht op den voerstraal. De radiale snelheid is standvastig.



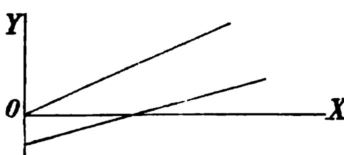
Voor $C^2 < \mu$:

$A < A_\infty = A_0$: ${}^\infty S_c - A$, de baan wordt van het apocentrum af steeds steiler; in het centrum is $lim \, sin \, (r, s) = \frac{C^2}{\mu}$.

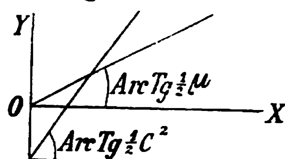
Verder is $v_c^2 - v^2$ standvastig, en de projectie van den kromtestraal der baan op den voerstraal steeds kleiner dan de voerstraal.



$A = A_\infty = A_0$: ${}^\infty S_c - {}^\infty S_\infty$, langs de geheele baan is $v_c = v$ en vr constant; de baan overal even steil, zoodat ze een logarithmische spiraal zal zijn. De kromtestraal van de baan is $\frac{\mu}{C^2} r$.



$A > A_\infty = A_0$: ${}^\infty S_c - H_y$, de baan wordt naar het centrum toe steeds minder steil, in het centrum is $\lim \sin(r, s) = \frac{C^2}{\mu}$. Verder is $v^2 - v_c^2 = v_\infty^2$, dus de projectie van den kromtestraal op den voerstraal steeds grooter dan de voerstraal.

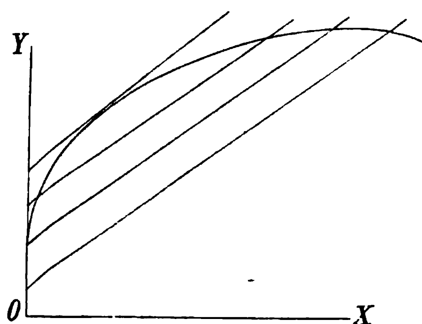


Is eindelijk $C^2 > \mu$, dan moet $A > A_\infty$ zijn, de baan is $P - H_y$.

De uitkomsten in (A. R. § 46, tabel B) komen met de hier gevondenen overeen.

c. Is het bewegingsveld een *stabiliteitsgebied*, dan heeft de potentiaalkromme overal hare bolle zijde naar de positieve ordinaten-as gekeerd.

De figuur geeft nu:



Voor $\varphi(\infty) > C^2 > \varphi(0)$:

$A < A_\infty$: $P - A$, de cirkel ingesloten.

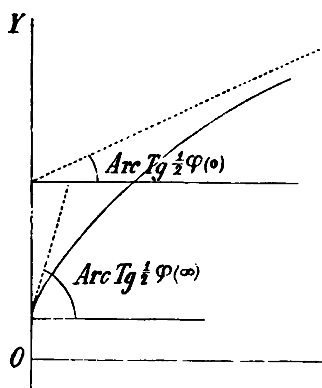
$A = A_\infty$: $P - {}^\infty S_\infty$ als $\varphi(\infty) < \infty$ is.

$P - P_{ar}$ als $\varphi(\infty) = \infty$ is.

De baan wordt van het pericentrum af steeds steiler; $\lim \sin(r, s)$ is voor $r = \infty$ gelijk aan $\frac{C^2}{\varphi(\infty)}$.

$A > A_\infty$: $P - H_y$.

Voor $C^2 \leqq \varphi(0)$:



$A < A_\infty : {}^\infty S_c - A$, de baan wordt van het apocentrum af tot op zekeren afstand steeds steiler, om daarna tot het centrum toe weer voortdurend minder steil te worden; in het centrum is $lim\ sin\ (r, s) = \frac{C^2}{\varphi(0)}$.

$A = A_\infty : {}^\infty S_c - {}^\infty S_\infty$ voor $\varphi(\infty) < \infty$, $lim\ sin (r, s) = \frac{C^2}{\varphi(\infty)}$ op oneindigen afstand; naar het centrum toe wordt de baan steeds minder steil, en nadert $sin\ (r, s)$ tot $\frac{C^2}{\varphi(0)}$.

${}^\infty S_c - P_{ar}$ voor $\varphi(\infty) = \infty$.

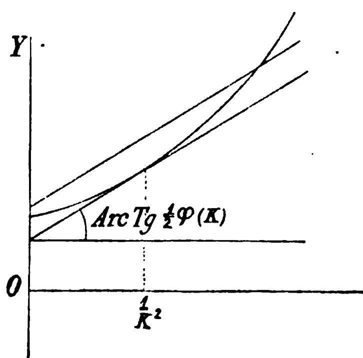
$A > A_\infty : {}^\infty S_c - H_y$.

Eindelijk voor $C^2 \geqq \varphi(\infty)$ moet $A > A_\infty$ zijn, en is de baan $P - H_y$.

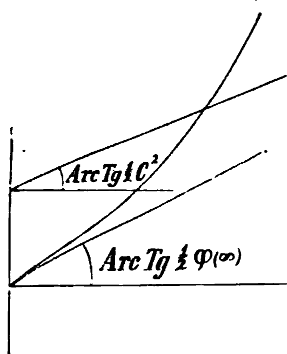
De uitkomsten (A. R. § 46, tabel C) komen met de bogevondenen overeen. Vergelijk ook Peirce § 708.

d. Is het geheele bewegingsveld een *instabiliteitsgebied*, dan heeft de potentiaalkromme hare holle zijde naar de positieve ordinaten-as gekeerd. De figuur geeft nu voor

$\varphi(\infty) < C^2 (= \varphi(\varkappa)) < \varphi(0)$:



$A \leqq A_\infty : {}^\infty_e S_c - A$, de spiraal wordt naar het centrum heen steeds steiler; in het centrum zelfs is $lim\ sin\ (r, s) = \frac{C^2}{\varphi(0)}$, zoodat voor $\varphi(0) = \infty$ $lim\ (r, s) = 0$ is; in dit geval alleen is het aantal windingen van de spiraal eindig.



$$A_\varkappa > A > A_\infty : \overset{e}{\infty}S_c - A \text{ en } P - H_y,$$

$$A = A_\varkappa : \overset{e}{\infty}S_c - S_B \text{en} S_b - H_y,$$

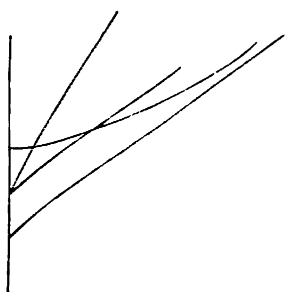
$$A > A \ : \overset{e}{\infty}S_c - H_y.$$

Voor $C^2 \leqq \varphi(\infty)$:

$$A < A_\infty : \overset{c}{\infty}S_c - A \ ,$$

$$A = A_\infty : \overset{e}{\infty}S_c - {}^{\infty}S_\infty,$$

$$A > A_\infty : \overset{e}{\infty}S_c - H_y.$$



Voor $C^2 > \varphi(0)$ moet $A > A_\infty$ zijn; de baan is altijd $P - H_y$.

Ook voor $C^2 = \varphi(0)$ moet $A > A_\infty$ zijn.

$$A < A_0 : P - H_y,$$

$$A \geqq A_0 : {}^{\infty}S_c - H_y.$$

De uitkomsten in (A. R. § 46, tabel D) stemmen met de hier gevondenen overeen. Vergelijk ook Peirce § 708.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 25 Februari 1888.

Tegenwoordig de Heeren: Buys Ballot, Voorzitter, A. C. Oudemans jr., Hoek, van Dorp, Mac Gillavry, Forster, Pekelharing, Brutel de la Rivière, Bierens de Haan, Beijerinck, Treub, Schols, van der Waals, van Diesen, Rauwenhoff, van 't Hoff, Martin, de Vries, Weber, Franchimont, Lorentz, Stokvis, Place, Rijke, Baehr, van de Sande Bakhuyzen, Mulder, Zeeman, Schoute, Korteweg, J. A. C. Oudemans, Bosscha, Hubrecht, Dibbits, Engelmann, van Bemmelen en C. A. J. A. Oudemans, Secretaris; van de Letterkundige Afdeeling de Heer: Boot.

— Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. de Gedeputeerde Staten van Friesland te Leeuwarden, 16 Februari 1888; 2°. C. Ph. Sluiter, Batavia, 21 Februari 1888; 3°. W. Tonckens Jzn, Voorzitter van de koloniale Bibliotheek te Paramaribo, 19 Januari 1888; 4°. Th. L. Montgomery, Secretaris van het Wagner free Institute of Science te Philadelphia, 13 Januari 1888; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 9, 13 Februari 1888; 2°. Montpellier, Directeur der Revue Internationale de l'Electricité te Parijs, 30 Januari 1888; 3°. Gilbert, Directeur der kön. Universitäts-Bibliothek te Greifswald, 9 Januari 1888; 4°. Conwentz, Secretaris der naturforschende Gesellschaft te Dantzig, 15 Januari 1888; 5°. Stricker, Bibliothecaris der Senckenbergische naturforschende Gesellschaft te Frankfort a./M., 20 Januari 1888; 6°. A. Grigoriev, Secretaris der Société impériale de Géographie te St. Petersburg, 15 Januari 1888; 7°. den Directeur van het Musée public te Moskou, 5 Februari 1888; 8°. den Directeur van het geological and natural History Survey te Sussex, 1888; 9°. J. J. Bride, Bibliothecaris der public Library te Melbourne, 21 December 1887; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Ingekomen zijn: 1°. eene uitnoodiging ter bijwoning van het Congrès géologique international, te houden te Londen, van 17—22 September e. k; 2°. twee manuscripten van den Heer Delaurier te Parijs, getiteld: »Expériences chimiques sur le poids de l'Ether des physiciens" en »Observations sur la note de Mr. G. Govi publiée dans la Revue internationale de l'Electricité". Zij zullen aan de chemische en physische leden der Afdeeling, die daarin belang stellen, ter kennisneming worden toegezonden.

— De Heer Martin vertoont eene door hem vervaardigde geologische kaart van den loop der rivier Suriname, en knoopt daaraan de mededeeling vast, dat het hem gelukt is, gedurende zijn verblijf in West-Indië, de geologische formatie te vinden, waarin het goud, 'twelk in die streken voorkomt en reeds lang als waschgoud bekend staat, oorspronkelijk werd neêrgelegd. Die formatie is de kristallijne Schieferformatie: eene laag, waarin ook in Brazilië het meeste goud wordt aangetroffen. Tusschen Brazilië en Suri-

name bestaat voor het overige, meent de Spreker, zeer veel overeenkomst in de opeenvolging en den aard der lagen, waaruit de vaste bodem gevormd is.

— De Heer DE VRIES spreekt: *Over de bepaling van het moleculaire gewicht der raffinose volgens de physiologische methode.*

Over het moleculaire gewicht der raffinose (mélitose, gossypose) bestaan drie verschillende meeningen, die haar uitdrukking vinden in de formules, die door verschillende schrijvers voor deze stof worden opgegeven. Deze zijn:

	Mol.gew.	
$C_{12}H_{22}O_{11} + 3H_2O$	396	BERTHELOT en RITTHAUSEN
$C_{18}H_{32}O_{16} + 5H_2O$	594	LOISEAU en SCHEIBLER
$C_{36}H_{64}O_{32} + 10H_2O$	1188	TOLLENS en RISCHBIET.

Deze formules drukken dezelfde elementaire samenstelling der gekristalliseerde stof uit; haar verschil berust ten deele op de verschillende bepalingen van het gehalte aan kristalwater, dat door BERTHELOT en RITTHAUSEN = 13.64 pCt, doch door LOISEAU en SCHEIBLER = 15.15 pCt. gevonden werd. De formule van TOLLENS en RISCHBIET neemt het laatstgenoemde cijfer als juist aan, doch tracht rekening te houden met de samenstelling van het natriumderivaat ($C_{12}H_{21}NaO_{11}$, bevattende 6.32 pCt. Na) en met de hoeveelheid slijmzuur (22—23 pCt.), die door de inwerking van salpeterzuur op de genoemde suikersoort ontstaat.

Om de vraag te beantwoorden, welke van deze formules de juiste is, heb ik gebruik gemaakt van de stelling, dat organische stoffen denzeltden isotonischen coëfficiënt bezitten. Hieruit toch volgt, dat oplossingen, die per liter evenveel grammoleculen der opgeloste stof bevatten, ongeveer dezelfde osmotische spanning hebben. Ik heb daarom de concentratie gezocht van eene oplossing van raffinose, die dezelfde osmotische spanning heeft, als eene oplossing van 0.1 Mol. rietsuiker.

Ik heb daartoe gebruik gemaakt van de plasmolytische methode en gezocht naar de concentratiën van rietsuiker en raffinose, die met het celvocht van *Tradescantia discolor*

isotonisch waren. Als zoodanig beschouw ik de gemiddelden tusschen de hoogste concentratie die geene, en de laagste, die in alle cellen plasmolyse doet ontstaan. In vier proeven, elk met een afzonderlijk blad genomen, vond ik als isotonisch met het celvocht:

Mol. rietsuiker.	pCt. raffinose.	pCt. raffinose isoton. m. 0.1 mol. rietsuiker.
0.19	10.5	5.526
0.17	10.5	6.176
0.17	10.0	5.882
0.20	12.5	6.250
	Gemiddeld:	5.957

Eene oplossing van 5.957 pCt. raffinose, die dus 5.957 gram der kristalwaterhoudende stof per 100 CC. bevat, is dus met eene oplossing van 0.1 Mol. rietsuiker isotonisch. Zij moet dus ook ongeveer 0.1 Mol. per liter bevatten. Het moleculaire gewicht moet dus ongeveer 595.7 zijn. Dit komt, zooals men ziet, voldoende overeen met de formule van Loiseau en Scheibler, en slechts deze kan dus, volgens de wet der isotonische coëfficiënten, juist zijn.

— De Heer Hubrecht behandelt de gegevens, die in de latere jaren aan het licht gekomen zijn over de vroegste ontwikkelingsstadiën van de zoogdierkiemblaas en geeft een overzicht van de resultaten waartoe hij gekomen is, met betrekking tot de ontwikkeling van den Egel, Erinaceus europaeus, waarvan de embryologie tot heden nog niet onderzocht is.

De centrale positie die de Insectivora onder de Zoogdieren en die de Egel (met Gymnura) onder de Insectivora inneemt, gaven hoop, dat de ontogenie van deze diersoort uit een vergelijkend oogpunt belangrijk zou kunnen wezen.

Ten aanzien van meerdere punten, acht spreker, dat de uitkomsten van zijn onderzoek dit vermoeden versterken.

Met name wordt in de allervroegste stadiën de wijze van ontstaan van het binnenste kiemblad afwijkend gevonden van wat dienaangaande voor de overige, te dier zake onderzochte, Zoogdieren tot nu toe beschreven is.

In plaats van zich tegen den binnenwand der aanvanke-

lijk éénbladige kiemblaas gaandeweg uit te breiden en door peripheren groei eindelijk den geheelen binnenwand te bekleeden, is het hypoblast van den Egel in den aanvang een groepje cellen in moerbeivorm, waarin zich spoedig eene centrale ruimte vertoont, die toeneemt in grootte, naarmate de wand van dezen »hypoblastzak" toeneemt in oppervlakte.

Aanvankelijk dus geheel zelfstandig van het epiblast, heeft het er somtijds den schijn van alsof het hypoblast eerst tengevolge der preparatie daarvan heeft losgelaten. De jongste stadiën, zooeven vermeld, bewijzen dat deze interpretatie onjuist is, terwijl latere stadiën, wanneer de allereerste aanduiding van de vorming van primitiefstreep en mesoblast begint, aantoonen, dat eerst op dat oogenblik epiblast en hypoblast van het embryo in enger verband treden, en zich ook over de geheele peripherie van de kiemblaas tegen elkaar sluiten.

Het epiblast is van den beginne af meerdere cellagen dik. Deze woekeren verder en vergroeien over den geheelen omtrek der kiemblaas met het moederlijke deciduale weefsel. De kiemblaas is daarbinnen opgenomen onder vorming eener decidua reflexa. Op één punt, dat altijd ten opzichte van de as van den uterus eene vaste ligging heeft, splijt van den epiblastischen kiemblaaswand een celplaat af, die daarna in omvang belangrijk toeneemt en het epiblast van het embryo wordt, maar aan den rand met den kiemblaaswand blijft samenhangen.

Het mesoblast ontstaat allereerst in de primitiefstreep door woekering van het epiblast. Kort daarna neemt men waar, dat in dat gedeelte van de kiemschijf vóór de primitiefstreep, waar het embryo zich zal gaan vormen, ook het hypoblast aan de vorming van het mesoblast, en wel door directe afsplijting, aandeel neemt.

Verder achterwaarts versmelten de zijdelingsche mesoblastplaten, die uit het hypoblast ontstaan, met het mesoblast van de primitiefstreep.

Er ontstaat reeds vroeg eene *area vasculosa,* die zich tegen den kiemblaaswand aanlegt. De bloedrijkdom van deze

laatste, ook in vroege stadiën, werd door injecties, van de moederlijke aorta uit, vastgesteld.

Een sterk ontwikkeld proamnion is aanwezig.

De allantois, die tot het ontstaan der schijfvormige placenta medewerkt, blijft een ruime holte bevatten.

De segmentaal-gang ontstaat ook bij den egel uit het epiblast.

De vroegste stadiën der egel-kiemblaas maken eene interpretatie van de jongste kiemblazen van den mensch, die tot nu toe bekend zijn, gemakkelijker. In overeenstemming met His is het waarschijnlijk te achten, en thans door het feitelijk voorbeeld van den egel gestaafd, dat de dojerblaas van den mensch door uitholling van een aanvankelijk solide celgroep ontstaat. De vorming van het epiblast van het embryo zal echter, in afwijking van His, veeleer als een afsplijtingsproces in den kiemblaaswand, zooals thans bij den egel is waargenomen, moeten worden opgevat.

De vasthechting van het embryo aan den kiemblaaswand, die men bij het vroege menschelijk embryo waarneemt en waaraan His den naam »buiksteel" gegeven heeft, is ook bij Erinaceus van den aanvang af aanwezig, als gevolg van de boven beschreven ontwikkelingsverschijnsels der primaire kiembladen. Alleen langs dien weg kan de vorming van dien buiksteel op afdoende wijze verklaard worden en moeten de onderling afwijkende interpretaties van His, Kölliker en Hertwig, voor de hier aangegevene plaats maken.

— De Heer Treub deelt mede, dat het hem gelukt is, eene som van *f* 2400 bijeen te brengen, waaruit reeds dadelijk de onkosten bestreden kunnen worden voor de uitzending van een Nederlandsch natuuronderzoeker naar het Buitenzorgsche Station. Des sprekers keuze viel op den Heer Dr. Boerlage, Conservator aan 's Rijks Herbarium te Leiden, voor wien een bezoek aan Buitenzorg, om er de Javaansche en andere plantenvormen in levenden staat te onderzoeken en na te gaan, zeker een leerzame afwisseling zou zijn met zijne tegenwoordige betrekking, die hem slechts met gedroogde voorwerpen in aanraking brengt.

Spreker dankt de Afdeeling voor den steun, hem verleend bij de pogingen om zijne plannen verwezenlijkt te zien, en beveelt het Buitenzorgsche Station bij voortduring in hare belangstelling aan.

De Voorzitter dankt den Heer TREUB wederkeerig voor den doortastenden ijver, waarmede hij een voor de wetenschappelijke eer onzer natie gewichtig plan in vervulling heeft weten te doen overgaan, en wenscht hem, bij eene voorspoedige reis, al verder toe, dat hij moge blijven voortgaan de botanische wetenschap te dienen, zooals hij tot hiertoe op uitnemende wijze gedaan heeft.

— Ter plaatsing in de werken der Akademie worden aangeboden:

1. door den Secretaris een opstel van den Heer Dr. JAN DE VRIES, leeraar aan de H. B. S. te Kampen: »Over vlakke configuraties";

2. door den Heer BUYS BALLOT eene verhandeling van den Heer Dr. J. D. VAN DER PLAATS, leeraar aan de Veeartsenijschool te Utrecht: »Over Standaardbarometers, in het bijzonder over dien van het Kon. Ned. Meteorol. Instituut";

3. door den Heer VAN DER WAALS een opstel van den Heer Dr. CH. M. VAN DEVENTER te Amsterdam: »Over eenige belangrijke thermodynamische vergelijkingen";

4. door den Heer LORENTZ eene verhandeling van den Heer Dr. V. A. JULIUS, leeraar aan de H. B. S. te Breda, »Over de lineaire spectra der elementen";

5. door het lid der Akademie Dr. P. H. SCHOUTE, een opstel van hemzelven: »Het lineaire complex en de congruentie (I, 1)";

6. door den Heer ENGELMANN, uit naam van den Heer DONDERS, eene verhandeling van den Heer Dr. J. L. HOORWEG: »Experimenteel onderzoek naar de polsbeweging".

— Tot rapporteurs worden benoemd:

a. over den arbeid van den Heer DE VRIES, de Heeren BIERENS DE HAAN en VAN DEN BERG;

b. over dien van den Heer VAN DER PLAATS, de Heeren BOSSCHA en VAN DE SANDE BAKHUYZEN;

c. over dien van den Heer VAN DEVENTER, de Heeren VAN DER WAALS en LORENTZ;

d. over dien van den Heer JULIUS, de Heeren GRINWIS en LORENTZ;

e. over dien van den Heer HOORWEG, de Heeren PLACE en KORTEWEG.

— Voor de bibliotheek der Akademie wordt aangeboden:

1. door den Heer FRANCHIMONT, uit naam van de redactie, het 6de deel van het »Recueil des travaux chimiques dans les Pays-Bas";

2. door den Heer STOKVIS diens voordrachten: »Over Homoeopathie", gehouden aan de Amsterdamsche Universiteit.

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de vergadering.

UEBER DIE ANWENDUNG DER PLASMOLYTISCHEN METHODE

AUF DIE

BESTIMMUNG DES MOLEKULARGEWICHTS CHEMISCHER SUBSTANZEN

VON

HUGO DE VRIES.



Die relative Grösse der osmotischen Spannkraft chemischer Verbindungen in verdünnten wässrigen Lösungen wird durch die Zahlen angegeben, für welche ich den Namen der isotonischen Coëfficienten gewählt habe. Diese Werthe sind für sämmtliche Glieder einer und derselben Gruppe nahezu dieselben *). Und da diese Gruppen äusserst natürliche sind, so kann man für sämmtliche zu ihnen gehörige aber bisjetzt darauf noch nicht geprüfte Körper den isotonischen Coëfficienten im Voraus angeben.

Ist nun das Molekulargewicht des betreffenden Körpers bekannt, so kann man aus diesem und dem Coëfficienten die Concentrationen berechnen, welche dieselbe osmotische Spannkraft besitzen, als irgend welche verdünnte Lösung einer anderen gegebenen Substanz. In dieser Weise finden die isotonischen Coëfficienten bei plasmolytischen Versuchen regelmässig Anwendung.

Ist aber das Molekulargewicht einer fraglichen Verbindung noch nicht bekannt, so wird man offenbar umgekehrt,

*) PRINGHEIM's *Jahrbücher für wiss. Bot.*, Bd. XIV, S. 514.

aus ihrem isotonischen Coëfficienten und dem Resultate einer experimentellen Ermittelung ihres isotonischen Werthes die Grösse dieses Molekulargewichts, wenigstens annähernd ableiten können. Die Ermittelung des isotonischen Werthes ist aber für alle Körper, deren Lösungen in Pflanzenzellen die Erscheinung der normalen Plasmolyse hervorrufen können, eine leichte und einfache Operation, welche in genau derselben Weise, wie die Bestimmung der isotonischen Coëfficienten, ausgeführt wird.

In ähnlicher Weise wie für Gase hat die Berechnung des Molekulargewichts auf physikalischem Wege in allen jenen Fällen Werth, in denen das Studium der chemischen Eigenschaften eines Körpers die Wahl offen lässt zwischen mehreren, aus derselben elementaren Zusammensetzung abgeleiteten Formeln, welche verschiedenen Molekulargrössen entsprechen. Und wo es sich um wässrige Lösungen von Substanzen handelt, welche als plasmolytische Reagentien benutzt werden können, empfiehlt sich zu diesem Zwecke also die plasmolytische Methode.

Ihre Resultate erreichen denselben Grad von Genauigkeit, wie die zur Ermittelung des Molekulargewichts vorgeschlagenen rein chemischen oder physikalischen Methoden, da die Endreaction, das Eintreten des ersten Anfanges der Plasmolyse, sich bei den von mir gewählten Indicatorpflanzen stets mit der gewünschten Schärfe erkennen lässt.

Meine Methode weist nicht die absolute Grösse der osmotischen Spannung der untersuchten Lösung an, sondern nur das Verhältniss zu dem analogen Werth einer anderen Verbindung. Denn man hat für zwei Substanzen diejenige Concentration zu ermitteln, welche grade den Anfang der Plasmolyse hervorruft. Diese sind unter sich isotonisch, d. h. sie haben dieselbe osmotische Spannung. Hat man aber beide Substanzen aus derselben Gruppe gewählt, d. h. besitzen beide denselben isotonischen Coëfficienten, so verhalten sich die Concentrationen der isotonischen Lösungen offenbar wie die Molekulargewichte. Ist dieser Werth für die eine der beiden Substanzen bekannt, so kann man ihn also für die anderen berechnen. Trotzdem sie also nur rela-

tive Zahlen giebt, ist die Methode aber, wie man sieht, eine äusserst einfache und völlig sichere.

Bei der hier vorgeschlagenen Anwendung handelt es sich aber stets um Körper deren isotonischer Werth noch nicht experimentell bestimmt wurde, für welche also die Gültigkeit der betreffenden Gesetze nicht direct bewiesen worden ist. Und auf die Annahme, dass diese Gesetze auch für sie gelten, beruht offenbar die Zuverlässigkeit des Resultates.

Es ist somit erforderlich, die Berechtigung dieser Annahme ausführlich zu begründen. Sie beruht in erster Linie auf die bedeutende Anzahl der untersuchten Substanzen, und auf die Erwägung, dass Ausnahmen von den betreffenden Gesetzen bis jetzt nicht aufgefunden worden sind (l. c. S. 512). Zweitens aber auf alle jene Fälle, in denen der isotonische Coëfficient im Voraus aus den Gesetzen abgeleitet und nachher durch das Experiment bestätigt wurde (l. c. S. 515). Zu diesen Beispielen ist jetzt auch das Glycerin zu stellen *).

Die Zuverlässigkeit der Gesetze der isotonischen Coëfficienten geht aber besonders klar hervor aus der Bestätigung, welche diese nach einer ganz andern aber gleichfalls physiologischen Methode erfahren haben. In seinen Untersuchungen über den Einfluss chemischer Substanzen auf die Blutkörperchen, und über die Beziehung dieses Einflusses zu den Molekulargewichten †) hat Hamburger den Nachweis geliefert, dass die Blutkörperchen in Lösungen neutraler, unschädlicher Verbindungen ähnliche Erscheinungen aufweisen, wie die Pflanzenzellen, und dass sie in diesen Lösungen nur dann unverändert erhalten bleiben, wenn deren Concentration mit der osmotischen Spannung des Blutes isotonisch ist. Dabei verhalten sich aber verschiedene Verbindungen quantitativ in derselben Weise, wie gegenüber Pflanzenzellen, und es sind somit die Gesetze der isotonischen Coëfficienten für diese letzteren dieselben wie für die Blutkörperchen.

---

*) Maandblad voor Natuurwetenschappen 1888, N°. 7, *Bot. Zeitung* 1888, N°. 15 en 16.

†) H. J. Hamburger in de Onderzoekingen van het physiologisch Laboratorium te Utrecht, 3de Reeks, IX, blz. 26, 1884.

In meiner »Methode zur Analyse der Turgorkraft" habe ich hervorgehoben, dass die Verminderung der Dampfspannung des Wassers durch darin gelöste Stoffe, die Erniedrigung des Dichtigkeitsmaximums von Lösungen und die Erniedrigung der Temperatur des Gefrierens Erscheinungen sind, welche als Folgen derselben osmotischen Kräfte zu betrachten sind, wie die Plasmolyse, und dass eine Vergleichung der isotonischen Coëfficienten mit den Resultaten der Erforschung jener Vorgänge im Allgemeinen zu einer Bestätigung der betreffenden Gesetze führt (l. c., S. 522).

Diese Bestätigung ist nun durch die seitdem veröffentlichten Resultate RAOULT's über die molekulare Gefrierpunktserniedrigung bedeutend erweitert worden, und etwaige Zweifel über die Anwendbarkeit meiner Gesetze auf andere als die bisher untersuchten Stoffe werden durch eine Vergleichung der von RAOULT gewonnenen Zahlen völlig beseitigt. Auch hat dieser Forscher auf die Bestimmung der Gefrierpunktserniedrigung eine Methode gegründet, welche die Ermittelung des Molekulargewichts für eine äusserst grosse Reihe von Körpern gestattet und welche ohne Zweifel in den meisten Fällen den Vorzug vor der plasmolytischen Methode verdient *).

Die Verminderung der Dampfspannung des Wassers durch darin gelöste Substanzen ist im vergangenen Jahre von G. TAMMAN †) studirt worden, und auch hier verhalten sich die verschiedenen Substanzen genau so wie bei der Plasmolyse und bei der Erniedrigung des Gefrierpunktes.

Schliesslich finden alle diese Einzeluntersuchungen ihre theoretische Grundlage und ihr gemeinschaftliches Band in den Untersuchungen von VAN 'T HOFF über die Grundgesetze der osmotischen Spannung verdünnter Lösungen, und

*) F. M. RAOULT, *Méthode universelle pour la détermination des poids moléculaires; Annales de chimie et de physique*, 6de Serie, T. VIII, p. 29, Juillet 1886.

†) GUSTAV TAMMAN, Die Dampftensionen der Lösungen, in *Mémoires de l'Acad. d. Sc. de St. Pétersbourg*, 7de Série, T. XXXV, N°. 9, 1887, S. 171.

in dem von diesem Forscher gelieferten Nachweis, dass die Gesetze von Boyle, Gay-Lussac und Avogadro nicht auf Gase beschränkt sind, sondern auch die sämmtlichen Spannungserscheinungen in verdünnten Lösungen beherrschen *). Es kann somit die Berechtigung der hier vorgeschlagenen Anwendung meiner Methode keinem begründeten Zweifel mehr ausgesetzt sein.

Das Molekulargewicht der Raffinose.

Die im Vorhergehenden betonte Leistungsfähigkeit der plasmolytischen Methode wollen wir jetzt durch ein Beispiel näher begründen. Ich wähle dazu die Raffinose, und werde zunächst die Gründe auseinandersetzen, welche eine Bestimmung des Molekulargewichts dieses Körpers erwünscht machen.

Die Raffinose ist eine Zuckerart, welche im Jahre 1876 von Loiseau entdeckt wurde in einer kristallinischen Kruste, welche sich in der Raffinerie von Sommier und Co. in Paris allmählig aus der zuckerhaltigen Mutterlauge abgesetzt hatte †). Sie unterscheidet sich von anderen Zuckerarten durch ihren nur wenig süssen Geschmack und durch ihr Vermögen, das polarisirte Licht weit stärker zu drehen als der Rohrzucker.

Seitdem wurde die Raffinose erkannt als die Ursache einer bis dahin häufig beobachteten, aber noch nicht völlig aufgeklärten Erscheinung. Die Melassen der Rübenzuckerindustrie, und namentlich die durch das Strontianverfahren gewonnenen, wiesen häufig im Polarisations-apparate einen grösseren Gehalt an Zucker auf als 100 pCt. Sie mussten also einen unbekannten, das polarisirte Licht stärker drehenden Bestandtheil enthalten. Dieser lange Zeit vorläufig als Plus-Zucker bezeichnete Stoff stellte sich nun, wenigstens

*) J. H. van 't Hoff, Lois de l'équilibre chimique dans l'état dilué, gazeux ou dissous. — Kon. Svensk. Vetenskap. Akademiens Handlinger Bd. 21, N°. 17, 1886 und *Archives Néerl.*, T. XX, p. 239.

†) *Comptes rendus* 1876, II, Tom. 32, p. 1058.

der Hauptsache nach, als Raffinose heraus, und es gelang SCHEIBLER ein einfaches Verfahren anzugeben, um die Raffinose aus diesen Melassen abzuscheiden, und in reiner kristallisirter Form in den Handel zu bringen *).

Die Raffinose entsteht nicht etwa während des Fabriksprocesses; sie kommt bereits in den Rüben selbst vor, und zwar in bedeutenderer Menge, als man nach dem Gehalt der Melassen annehmen würde. Sie wird also bei der Zuckergewinnung theilweise zersetzt. Ausser in Rüben wurde sie von RICHARDSON und CRAMPTON im Weizen und von SULLIWAN im Gerste aufgefunden. Sie wird demnach voraussichtlich im Pflanzenreich wohl eine weite Verbreitung haben. Dafür spricht auch der Umstand, dass neuere Untersuchungen ihre Identität mit den aus anderen pflanzlichen Produkten bereiteten Zuckerarten *Melitose* und *Gossypose* nachgewiesen haben.

Die Melitose wurde von JOHNSTON aus der Australischen *Eucalyptus*-manna gewonnen und von BERTHELOT eingehend studirt †). Ihre Identität mit der Raffinose wurde von TOLLENS und RISCHBIET entdeckt und ausführlich nachgewiesen §), welche Autoren auch, wie wir bald sehen werden, die von BERTHELOT aufgestellte Molekularformel übernahmen.

Auf die Identität der von RITTHAUSEN und BÖHM aus Baumwollensamenkuchen gewonnenen *Gossypose* mit der Raffinose hatte TOLLENS bereits früher hingewiesen, während SCHEIBLER bald darauf den endgültigen Nachweis dafür brachte **).

Die Raffinose muss somit eine im Pflanzenreich ziemlich weit verbreitete Zuckerart sein.

Während ich für die chemischen Eigenschaften dieses Körpers auf die betreffende Literatur, und namentlich auf die ausführliche und gründliche Zusammenstellung in STAM-

---

*) C. SCHEIBLER, *Berichte d. d. chem. Gesellsch*, 18 S. 1409.

†) JOHNSTON, *Philos. Magazine* 1843, S. 14; BERTHELOT, *Ann. Chim. Phys.*, (3) T. 46, p. 66.

§) TOLLENS und RISCHBIET, *Zeitschr. f. Zuckerindustrie*, T. 35, p. 1030.

**) SCHEIBLER, *Ber. d. d. chem. Gesellsch.*, Bd. 18, S. 1779.

MER's »*Jahresbericht über die Untersuchungen und Fortschritte im Gesammtgebiete der Zuckerfabrikation*" (Band XXV, 1885, 162—202), verweise, werde ich jetzt versuchen eine Uebersicht desjenigen zu geben, was zu den verschiedenen Ansichten über die Molekularformel unserer Zuckerart Veranlassung gegeben hat.

BERTHELOT hatte für seine Melitose die Formel $C_{12}H_{22}O_{11} + 3H_2O$ aufgestellt, und zu derselben Zusammensetzung war RITTHAUSEN für die Gossypose gelangt. Dagegen hatte LOISEAU, welcher der Raffinose seit 1876 eine Reihe gründlicher Arbeiten im *Journal des fabricants de sucre* gewidmet hat, für diesen Körper die Formel $C_{18}H_{32}O_{16} + 5H_2O$ angenommen. Beide Formeln entsprechen demselben Resultate der Elementar-analyse, da beide $= n(C_6H_{14}O_7)$ sind, indem n von BERTHELOT und RITTHAUSEN $= 2$, von LOISEAU $= 3$ gestellt wurde. Die Entscheidung hierüber war in beiden Fällen durch die Bestimmung des Gehalts an Kristallwasser gewonnen, welcher Gehalt für die erste Formel 13,64 pCt., für die zweite aber 15,15 pCt. beträgt.

Man sollte nun glauben, dass die Frage nach der Kristallwassermenge sich leicht entscheiden liesse. Man stösst hierbei aber auf unerwartete Schwierigkeiten. Erwärmt man zu rasch, so schmilzt die Substanz in ihrem Kristallwasser, und eine völlige Austreibung dieses ist nicht mehr zu erreichen. Weicht man dieser Schwierigkeit durch sehr langsames Erwärmen aus, so erhält man bei 100° C allerdings einen Wasserverlust von etwa 13—14 pCt., aber dieser wird nicht constant. Erhitzt man bis zu 120—130° C, so fängt die Raffinose an sich zu zersetzen und zu caramelisiren, bevor ein Gewichtsverlust von 15,15 pCt. erreicht worden ist. Dabei entsteht Glucose, wie man mittelst FEHLING'scher Lösung nachweisen kann, denn die Raffinose reducirt die Kupferlösung nicht.

SCHEIBLER hat eine Methode gefunden, um den Kristallwassergehalt ohne jegliche Zersetzung genau zu bestimmen. Er lässt die fein-kristallinische Substanz im Vacuum über Schwefelsäure etwa 14 Tage vortrocknen, und setzt dann die Operation im Wasserbade bei 100° C fort, bis ein völ-

lig constantes Gewicht eingetreten ist. Der Verlust beträgt dann genau 15,15 pCt., und SCHEIBLER betrachtete die Frage damit als zu Gunsten LOISEAU's entschieden *).

Ihm gegenüber vertheidigten TOLLENS und RISCHBIET die Formel BERTHELOT's †). Sie behaupten, »dass man je nach der Art des Trocknens zu recht verschiedenen Formeln gelangen kann", dass mitunter sogar ein Verlust von mehr als 15,15 pCt. gefunden sei. Sie versuchten somit eine Bestimmung auf rein chemischen Wege, und wählten dazu die Darstellung des Natriumderivats. Dieses hatte die Zusammensetzung $C_{12} H_{21} Na O_{11}$ (= 6.32 pCt. Na), oder $C_{12} H_{22} O_{11} Na OH$ (6.02 pCt. Na), und entschied also für die Formel $C_{12} H_{22} O_{11} + 3 H_2 O$.

Als die genannten Verfasser ihre Untersuchungen über die chemischen Eigenschaften der Raffinose fortsetzten, gelangten sie aber allmählig zu der Ansicht, dass die Moleküle dieser Verbindung wahrscheinlich grösser seien, als dieser Formel entsprechen würde, ja sogar grösser als von LOISEAU und SCHEIBLER angenommen wurde. Manches schien darauf hin zu deuten, dass die Raffinose sich den höher in der Reihe stehenden Stoffen, wie Amylodextrin und Inulin nähert, da sie sich in vielen Hinsichten diesen ähnlich verhält. Namentlich das Verhalten gegenüber Salpetersäure führte zu diesem Schlusse, denn es entstehen dabei 22—23 pCt. Schleimsäure. Dieses ist aus dem Formel $C_{12} H_{22} O_{11} + 3 H_2 O$ nicht zu erklären, wohl aber aus $C_{18} H_{32} O_{16} + 5 H_2 O$ oder deren Polymeren, wenn man annimmt, dass darin eine Galactose-gruppe $C_6 H_{12} O_6$ vorhanden ist, oder doch durch die Einwirkung der Saüre daraus entstehen kann.

Um nun sowohl dieser letzteren Reaction, als dem Natriumderivate und endlich auch dem Kristallwassergehalt von 15.15 pCt. zu genügen, schlagen die beiden genannten Forscher vor, die Formel LOISEAU's zu verdoppeln und das Molekül der Raffinose als der Formel $C_{36} H_{64} O_{32} + 10 H_2 O$ entsprechend zu betrachten.

---

*) l. c. S. 181—191.

†) *Zeitsch. f. Zuckerindustrie*, T. 35, S. 1030.

In einer späteren ausführlicheren im Jahre 1886 erschienenen Arbeit halten sie diese Meinung aufrecht, indem sie sagen »Die Formel $C_{36} H_{64} O_{32} + 10 H_2 O$ ist diejenige, welche allen bekannten Thatsachen genügt" *).

Ueber die Molekularformel der Raffinose liegen also derzeit die drei folgenden Ansichten vor †):

	Kristallwasser-gehalt.	Molekular-gewicht.	
1. $C_{12}H_{22}O_{11} + 3H_2O$	13.64 pCt.	396	BERTHELOT und RITTHAUSEN.
2. $C_{18}H_{32}O_{16} + 5H_2O$	15.15 „	594	LOISEAU und SCHEIBLER.
3. $C_{36}H_{64}O_{32} + 10H_2O$	15.15 „	1188	TOLLENS und RISCHBIET.

Diese Formeln entsprechen derselben elementaren Zusammensetzung der kristallisirten Substanz, tragen aber verschiedenen Bestimmungen des Kristallwassergehaltes und verschiedenen chemischen Reactionen Rechnung.

Bestimmung des Molekulargewichts der Raffinose nach der plasmolytischen Methode.

Um zu einer Entscheidung über die schwebende Frage zu gelangen, wollen wir jetzt den Satz anwenden, *dass organische Körper in verdünnten Lösungen bei derselben molekularen Concentration annähernd dieselbe osmotische Spannung besitzen.* Dieses Gesetz ist ein Theil meines ersten Gesetzes für die isotonischen Coëfficiënten §), und zwar derjenige Theil, welcher sich auf die erste der dort unterschiedenen Gruppen, diejenige der organischen metallfreien Verbindungen bezieht.

Wir haben also die osmotische Spannung verdünnter Lösungen von Raffinose zu vergleichen mit dem analogen Werthe für irgend eine andere organische Substanz, und wählen dazu aus leicht ersichtlichen Gründen den *Rohrzucker*, als einen genau bekannten, und mit der Raffinose am nächsten verwandten, also am besten vergleichbaren Stoff.

Wir haben also zu erforschen, bei welchen Concentrationen die Lösungen beider Substanzen denselben isotonischen

*) *Zeitschr. f. Rübenzuckerindustrie*, T. 36, S. 214.

†) Man vergleiche auch die Uebersicht von LIPPMANN über diesen Streit in N°. 39 der *Deutschen Zuckerindustrie* (1885).

§) PRINGSHEIM's *Jahrbücher*, Band XIV, S. 514.

Werth, d. h. dieselbe osmotische Spannung besitzen, denn solche Lösungen werden pro Liter annähernd dieselbe Anzahl von Molekülen enthalten. Es reicht hin, für eine Concentration des Rohrzuckers die damit isotonische Concentration der Raffinose zu ermitteln.

Als Indicator wählen wir die Erscheinung der Plasmolyse. In Lösungen, welche geringere Anziehung für Wasser haben als der Zellsaft der betreffenden Zellen, wird sich der den Saft umschliessende Protoplast nicht von der Zellhaut abheben, in hyperisotonischen *) Lösungen wird solches wohl der Fall sein. Die auf der Grenze stehende Concentration wird offenbar mit dem Zellsaft isotonisch sein; hat man diese »plasmolytische Grenzlösung" für zwei Substanzen ermittelt, so sind diese Lösungen auch unter sich isotonisch. Es kommt nur darauf an, eine Pflanze und ein Gewebe zu wählen, in denen in Tausenden von Zellen die Grenze bei genau derselben Concentration überschritten wird, und diese Erscheinung sich leicht und mit voller Schärfe beobachten lässt. Solches ist aber bei den sogenannten Indicatorpflanzen der Fall †). Unter diesen wählte ich die *Tradescantia discolor*, und zwar die violette Oberhaut auf der Unterseite des Mittelnerven ausgewachsener Blätter. Dieses Gewebe ist, wie meine früheren Untersuchungen lehrten, für ähnliche Zwecke durchaus zuverlässig.

Ich habe nun in verschiedenen Versuchen die plasmolytische Grenzconcentration des Rohrzuckers für dieses Gewebe, und den ihr jedesmal entsprechenden analogen Werth für die Raffinose bestimmt. Aus diesen Zahlen lässt sich, nach dem angeführten Gesetze, das Molekulargewicht der Raffinose ohne Weiteres berechnen.

Da die oben mitgetheilten Zahlen für das Molekulargewicht der Raffinose sehr weit auseinander liegen, müsste ich durch einen Vorversuch zunächst entscheiden, welche von ihnen der Wahrheit am nächsten entsprach, ehe ich an die

---

*) Hamburger in *Onderzoekingen van het Physiologisch Laboratorium te Utrecht*, 3e Reihe, Bd. X, S. 49, 1886.

†) Pringheim's *Jahrbücher*, Bd. XIV, S. 444.

genaue Ermittelung herantreten konnte. Ich bin dabei von folgender Berechnung ausgegangen.

Eine Lösung von 0.22 Mol. Rohrzucker pflegt in den erwähnten Zellen von *Tradescantia discolor* einen schwachen Grad von Plasmolyse hervorzurufen. Eine Lösung von 0.22 Mol. Raffinose muss sich also, nach dem obigen Gesetze, gleich verhalten. Eine solche Lösung enthält aber, je nachdem man eine der drei Formeln annimmt, 0.22×396, 0.22×594 oder 0.22×1188 Gramm pro Liter, ihre Concentration ist demgemäss 8.7, 13.1 oder 26.1 pCt. der kristallwasserhaltenden Substanz. Ich bereitete mir nun eine Lösung von 13.1 pCt. und brachte in diese ein Praeparat des nahmhaft gemachten Gewebes. Ist das Molekulargewicht = 396, so muss darin eine sehr starke Plasmolyse eintreten; ist es = 594, so muss diese Erscheinung in schwächerm Grade, und bei einem Molekulargewicht von 1188 muss sie gar nicht eintreten. Nach 4 Stunden zeigte sich, dass der zweite Fall vorlag; in sämmtlichen Zellen war der Protoplast an einer kleinen Ecke von der Zellhaut abgehoben. Nur die Ansicht von LOISEAU und SCHEIBLER konnte also richtig sein. Zur Contrôle machte ich noch eine Lösung von 26.1 pCt.; in dieser war nach vier Stunden die Plasmolyse so stark, dass die Protoplaste sich bis auf etwa die Hälfte ihres ursprünglichen Volumens contrahirt hatten. Diese Lösung hatte also eine etwa doppelt so grosse Spannkraft wie der Zellsaft, was mit dem Resultate des ersteren Versuches übereinstimmt.

Für die genaue Bestimmung der osmotischen Spannkraft der Raffinose stellte ich mir zwei Reihen von Lösungen her. Die erste von reinem Kandiszucker; diese wurden der einfacheren Berechnung halber gleich nach Grammolekülen (= 342 Gramm) pro Liter gewählt, und zwar in Concentrationen von 0.16—0.18—0.20—0.22—0.24 und 0.26 Molekül. Für die zweite Reihe machte ich die Lösungen nach Prozenten der kristallwasserhaltenden Substanz. Sie enthielten 9, 10, 11, 12, 13 und 14 pCt. Raffinose. Für jeden Versuch wurde von jeder dieser Lösungen 2—5 CCm. in einen kleinen Glascilinder gebracht und mit einem Praeparat

aus der violetten Oberhaut des Blattnerven von *Tradescantia discolor* beschickt. Und zwar wurden die Praeparate in jedem Versuch einem und demselben Blatte entnommen, und aus diesem in möglichst geringer Entfernung von einander geschnitten. Benachbarte Schnitte kamen dabei stets in nahezu isotonische Lösungen, um die Vergleichbarkeit eine möglichst vollständige zu machen.

Jeder Versuch dauerte 4 Stunden. Dann wurden die Praeparate unter dem Mikroskop, bei etwa 100-maliger Vergrösserung untersucht. Nach weiteren zwei bis vier Stunden wiederholte ich diese Prüfung und überzeugte mich in jedem einzelnen Fall, dass die gesuchte Grenze sich nicht verschoben hatte.

Die Resultate der vier, mit verschiedenen Blättern ausgeführten Versuche enthält die folgende Tabelle. Am Kopfe der einzelnen Spalten findet man die Concentrationen der Lösungen in obiger Weise ausgedrückt. Es bedeutet I. C. die sich aus dem Versuch ergebende, mit dem Zellsaft isotonische Concentration. Das Verhältniss dieser beiden Zahlen, durch 10 dividirt, gibt die mit 0.1 Mol. Rohrzucker isotonische Concentration der Raffinose in pCt.

Es bedeutet ferner: *n* keine Zelle plasmolysirt, *hp* etwa die Hälfte der Zellen und *p* sämmtliche Zellen plasmolysirt. Die mit *n* bezeichneten Lösungen waren also, in Bezug auf dem Zellsaft hypisotonisch, die durch *hp* angedeuteten isotonisch, und die einen *p* führenden hyperisotonisch.

Im Uebrigen vergleiche man über die Bedeutung solcher Tabellen meine oben citirte Arbeit *).

	Mol. Rohrzucker						pCt. Raffinose.							
Versuch.	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	I. C.	9	10	11	12	13	14	I. C.	$\frac{\text{I. C. Raff.}}{\text{I. C. Rohrz.}} \times \frac{1}{10}$
I		*n*	*p*	*p*	*p*	0.19	*n*	*n*	*p*	*p*			10.5	5.526
II	*n*	*p*	*p*	*p*	*p*	0.17	*n*	*n*	*p*	*p*			10.5	6.176
III	*n*	*p*	*p*	*p*	*p*	0.17	*n*	*hp*	*p*	*p*			10.0	5.882
IV		*n*	*hp*	*p*	*p*	0.20	*n*	*n*	*n*	*hp*	*hp*	*p*	12.5	6.250

*) PRINGSHEIM's *Jahrbücher*, Bd. XIV, S. 450—465.

Im Mittel ist also die mit 0.1 Mol. Rohrzucker isotonische Concentration der Raffinose:

= 5.957 pCt.

Zu bemerken ist, dass diese Zahl eine rein empirische ist, und dass zu ihrer Ermittelung keine theoretische Voraussetzung erforderlich war.

Um mich von der Zuverlässigkeit des erhaltenen Resultates noch weiter zu überzeugen, habe ich noch einige Controllversuche nach genau derselben Methode gemacht. Erstens habe ich die Versuche wiederholt mit einer im hiesigen chemischen Laboratorium aus Baumwolle dargestellten Raffinose, welche nicht so schön kristallisirt und nicht so völlig aschenfrei war als das oben benutzte, aus dem Handel bezogene Muster. Zweitens habe ich die Versuche, welche bei 15° C gemacht waren, bei etwa 0° C wiederholt. Drittens habe ich statt der *Tradescantia discolor* die *Begonia manicata* als Indicatorpflanze benutzt. In allen diesen Versuchen fand ich das mitgetheilte Resultat bestätigt, da die Concentrationen der Raffinose, welche mit 0.1 Mol. Rohrzucker isotonisch waren, nur unerheblich von der obigen Zahl abwichen. Da die Versuche aber nur zur Contrôle, und also nicht mit derselben Genauigkeit ausgeführt wurden, unterlasse ich es, auf die erhaltenen Zahlen näher ein zu gehen.

Wenn es sich nun darum handelt, aus dem rein empirischen Resultate unserer Versuche das Molekulargewicht der Raffinose zu berechnen, so haben wir darauf das im Anfange citirte Gesetz anzuwenden. Dieses lehrte uns, dass die mit 0.1 Mol. Rohrzucker isotonischen Lösungen anderer organischer Verbindungen gleichfalls im Liter annähernd 0.1 Molekül enthalten müssen.

Hieraus folgt, das für Raffinose, annähernd:

5.957 pCt. = 0.1 Mol. pro Liter

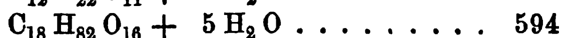
ist.

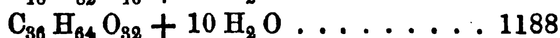
Das Molekulargewicht der Raffinose ist also annähernd

= 595.7.

Die von den verscheidenen Formeln geforderten Molekulargewichte waren aber:


$C_{12}H_{22}O_{11} + 3\,H_2O$ 396


$C_{18}H_{32}O_{16} + 5\,H_2O$ 594


$C_{36}H_{64}O_{32} + 10\,H_2O$ 1188

Wir finden also mit der zweitgenannten Formel eine sehr genügende Uebereinstimmung. Es folgt daraus aber, dass, nach dem Gesetze der isotonischen Coëfficienten, nur diese von LOISEAU aufgestellte und von SCHEIBLER in so überzeugender Weise vertheidigte Formel die richtige sein kann.

HET LINEAIRE COMPLEX

EN DE

CONGRUENTIE (1,1)

DOOR

P. H. SCHOUTE.



Onder een *complex* van den n^{den} graad verstaat men een drievoudig oneindig aantal lijnen zoo in de ruimte gegeven, dat er door elk willekeurig punt P in elk willekeurig door dit punt aangenomen vlak π een aantal n dier lijnen gaan. Hieruit volgt dan, dat de door een punt P gaande lijnen van het complex een kegel van den n^{den} graad vormen en de in een vlak π liggende lijnen van het complex een kromme van de n^{de} klasse omhullen; deze kegel heet de *complexkegel* van het punt P en deze kromme de *complexkromme* van het vlak π.

Onder een *congruentie* (m, n) verstaat men een tweevoudig oneindig aantal lijnen zoo in de ruimte gegeven, dat er m dezer lijnen door elk willekeurig punt P gaan en n dezer lijnen in elk willekeurig vlak π liggen; van deze getallen heet m de *graad* en n de *klasse* van de congruentie.

Volgende bladzijden zullen eerst een meetkundige behandeling bevatten van het eenvoudigste complex, het complex van den eersten graad of *het lineaire complex*, en van de eenvoudigste congruentie, *de congruentie* (1,1). Daarbij zullen uitsluitend bekende uitkomsten verkregen worden, maar langs een meer rechtstreekschen weg, die bij het onderzoek

van het lineaire complex geen kennis van de theorie der reciprociteit in de ruimte onderstelt en bij de beschouwing van de congruentie (1,1) onafhankelijk blijft van de theorie van het lineaire complex. En daarna zullen eenige nieuwe uitkomsten verkregen worden door beide vormingen in verband met elkaar te beschouwen.

I. Het lineaire complex.

1. Is het complex, dat we beschouwen, een lineair complex, dan herleidt zich de complexkegel van elk punt P tot een vlak door P, het *complexvlak* π van P, en de complexkromme van elk vlak π tot een stralenbundel van lijnen door een punt in π, het *complexpunt* P van π. Daar dit geen verwarring veroorzaken kan, vervangen we kortheidshalve de namen complexpunt, complexvlak en lijn van het complex door *pool*, *poolvlak* en *straal.*

2. *Ligt het punt* Q *in het poolvlak* π *van het punt* P, *dan ligt* P *ook in het poolvlak* φ *van* Q. Want als Q in het poolvlak π van P ligt, is PQ een straal en als PQ een straal is, ligt P ook in het poolvlak φ van Q.

Indien men op de willekeurige lijn l' (fig. 1) twee punten P en Q aanneemt, van deze punten de poolvlakken π en φ zoekt en de doorsnee dezer vlakken l'' noemt, dan zal een willekeurig punt R van l'' volgens de juist bewezen stelling het vlak $(R\,l')$ en evenzoo een willekeurig punt S van l' het vlak $(S\,l'')$ tot poolvlak hebben. Omdat in het algemeen het poolvlak van een willekeurig punt van een der lijnen l' en l'' dus het vlak door dit punt en de andere lijn is, noemt men lijnen als l' en l'' *weerkeerige poollijnen* van het complex. Van zulk een lijnenpaar kan men bij een bepaald complex steeds een der twee willekeurig aannemen; de andere is dan bepaald.

Elke lijn, die twee weerkeerige poollijnen snijdt, is een straal. En elke straal, die van twee weerkeerige poollijnen er een snijdt, snijdt ook de andere.

a). Wat men hier bij stralen en weerkeerige poollijnen ontmoet, herinnert aan de verhouding tusschen bestaanbare en toegevoegd onbestaanbare lijnen. Even als elke bestaanbare lijn, die van twee toegevoegd onbestaanbare lijnen er een ontmoet, dit ook de andere doet, snijdt elke straal, die van twee weerkeerige poollijnen er een ontmoet, ook de andere. In dit opzicht speelt de viervoudige oneindigheid van bestaanbare lijnen in het achtvoudig oneindige gebied der onbestaanbare lijnen tegenover de paren van toegevoegd onbestaanbare lijnen dezelfde rol, die in het lineaire complex de stralen met betrekking tot de paren van weerkeerige poollijnen vervullen. Maar terwijl in het complex elke lijn, die twee weerkeerige poollijnen snijdt, een straal is, zal elke lijn, die twee toegevoegd onbestaanbare lijnen snijdt, nog geen bestaanbare lijn behoeven te zijn.

b). De namen pool, poolvlak en weerkeerige poollijnen zijn aan de theorie der *reciprociteit* ontleend, met welke het lineaire complex in nauw verband staat. Zoo als men weet, noemt men twee ruimtestelsels reciprook, als met een punt van het eene een bepaald vlak van het andere en met punten in een vlak van het eene bepaalde vlakken door een punt van het andere overeenkomen, als dus met punt en vlak van het eene vlak en punt van het andere overeenstemmen. Heeft daarbij *involutie* plaats, d. w. z. komt met elk willekeurig punt P hetzelfde vlak π overeen, tot welk der beide stelsels men P ook laat behooren, dan heeft men met een *poolstelsel in de ruimte* te doen en zijn de beide ruimtestelsels, die het samenstellen, elkaars *weerkeerige poolfiguren* met betrekking tot een bestaanbaar of onbestaanbaar oppervlak van den tweeden graad; tenzij het gebeuren mocht, dat elk punt in zijn poolvlak ligt, welk bijzonder geval zich bij het lineaire complex voordoet. Dit bijzondere poolstelsel is door Möbius een *nulstelsel* genoemd. Op dit nulstelsel komen we later terug (art. 11^c).

Omtrent de stelkundige behandeling van de complexen van eersten en tweeden graad verwijzen wij in de eerste plaats naar Pluecker's *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*, in 1868 door F. Klein bij Teubner uitgegeven. In dit werk maakt Pluecker gebruik van *lijncoördinaten*. Deze treden echter daarin nog niet op in den meest algemeenen vorm, waarin men ze vindt in Klein's dissertatie en in enkele verhandelingen van lateren tijd. Men vergelijke bijv. den herdruk van Klein's dissertatie in deel XXIII van de *Mathematische Annalen*.

Voor de meetkundige behandeling van het lineaire complex kan men Th. Reye's *Geometrie der Lage* raadplegen. Van deze

afleiding zal wat hier gegeven wordt slechts in zoover afwijken, dat het zich zelfstandig ontwikkelt uit de bewezen betrekking tusschen weerkeerige poollijnen en stralen en geen gebruik maakt van uitkomsten verkregen door de theorie der reciprociteit, die evenzeer uit de in den aanvang van dit artikel bewezen stelling wordt opgetrokken. Bij deze wijze van voorstelling zullen we genoodzaakt zijn voorloopig aan te nemen, dat er een lineair complex bestaat om dan eerst later na te gaan hoe men het verkrijgt (art. 8^b).

c). Behooren bij de vier niet in een vlak gelegen punten A, B, C, D de dan ook niet door een punt gaande vlakken $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, dan zijn de twee viervlakken $A\,B\,C\,D$ en $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ elkaar tegelijkertijd in- en omgeschreven. Terwijl nl. A in α ligt, enz., gaat het vlak $(B\,C\,D)$ door het punt $(\beta\,\gamma\,\delta)$, enz.; want de lijnen, die het punt $(\beta\,\gamma\,\delta)$ met B, C, D verbinden, zijn door dit punt gaande stralen en liggen dus in het poolvlak van $(\beta\,\gamma\,\delta)$, enz.

Men vergelijke Möbius (Crelle's *Journal*, *III*, blz. 273 en Neuberg (*Mémoires de la Société royale des sciences de Liège*, 2de reeks, XI.)

3. De onderstelling, dat twee weerkeerige poollijnen elkaar snijden, voert tot een bijzonder geval van het lineaire complex.

Zijn nl. de lijnen l' en l'' (fig. 2) twee in het vlak π gelegen weerkeerige poollijnen, dan zal π het poolvlak zijn van elk punt P' van l' en van elk punt P'' van l''. Daaruit zal dan volgen, dat elke lijn $P'P''$ van π straal is en π dus poolvlak is van elk zijner punten.

Is nu π (fig. 3) een vlak, dat poolvlak is voor al zijn punten P, φ het poolvlak van een willekeurig buiten π aangenomen punt Q en a de snijlijn van π en φ, dan is a de weerkeerige poollijn van $P\,Q$. Wijl nu bij verplaatsing van P in π blijkt, dat elke willekeurige lijn $P\,Q$ door Q de lijn a tot weerkeerige poollijn heeft en het poolvlak ϱ van elk willekeurig punt R dus door a gaat, is het complex de vereeniging van alle lijnen, die a snijden. Werkelijk voldoet die verzameling van lijnen aan de van het lineaire complex gegeven bepaling. We noemen zulk een lineair complex een *oneigenlijk complex* en de lijn, die door al zijn stralen gesneden wordt, zijn *as*. Ligt deze as in het oneindige, dan

bestaat het complex uit alle lijnen evenwijdig aan een zelfde vlak.

a). We noemen het bijzondere complex een oneigenlijk en niet een ontaard complex, omdat onder een *ontaard complex* van hoogeren graad in overeenstemming met het begrip van ontaarde kromme een complex verstaan wordt, dat zich in complexen van lageren graad splitst.

b). Hadden we er boven de aandacht op gevestigd, dat het snijpunt P (fig. 2) van twee elkaar snijdende weerkeerige poollijnen pool is van elk door dit punt gebracht vlak, dan zouden we gevonden hebben, dat de polen van alle vlakken op een bepaalde lijn a moeten liggen en het complex dus langs dien weg ook gebleken zijn te bestaan uit alle lijnen, die een zekere lijn a snijden, enz.

Sluiten we het bijzondere geval van het oneigenlijke complex voorloopig uit, dan kunnen twee weerkeerige poollijnen elkaar dus niet snijden. Hieruit volgt, dat de weerkeerige poollijn van een straal s met s moet samenvallen. Is nl. P een punt van s, dan zal het poolvlak π van P door s gaan. En nu voert de onderstelling, dat de in π gelegen weerkeerige poollijn van s verschilt van s, tot het oneigenlijke complex. Bij het algemeene lineaire complex zullen twee weerkeerige poollijnen derhalve òf elkaar kruisen, òf in een straal samenvallen.

c). In dit opzicht wijkt het lineaire complex af van het poolstelsel in de ruimte. Want bij het laatste vormen twee toegevoegde raaklijnen aan het ordeoppervlak van den tweeden graad, dat de reciprociteit beheerscht, twee elkaar snijdende weerkeerige poollijnen. En in dit opzicht verschilt het lineaire complex ook van het viervoudig oneindige gebied der onbestaanbare lijnen. Want, zooals bekend is, kunnen toegevoegd onbestaanbare lijnen een punt gemeen hebben, dat dan even als het vlak door beide lijnen altijd bestaanbaar is.

Omtrent de wijze van samenvalling van twee weerkeerige poollijnen in een straal vergelijke men art. 15^c.

In zijn *Geometrie der Lage* noemt TH. REYE de onbestaanbare lijnen met een bestaanbaar punt *imaginäre Geraden erster Art* en die zonder bestaanbaar punt *imaginäre Gera-*

den zweiter Art. Dit is in zoover minder logisch als de groepen niet gelijkwaardig zijn, maar de eerste een onderafdeeling vormt van de tweede.

d). Men vindt de coördinaten der weerkeerige poollijn eener gegeven lijn op de meest eenvoudige wijs in die der gegeven lijn uitgedrukt in TH. REYE's verhandeling *Ueber lineaire und quadratische Strahlencomplexe und Complexengewebe* (CRELLE's *Journal XCV*, blz. 330).

Uit het bovenstaande volgt, dat het algemeene lineaire complex geen vlak bevat, dat poolvlak is voor meer dan een zijner punten. Want is een vlak poolvlak voor twee zijner punten, dan is het dit voor al zijn punten en deze onderstelling leidt tot het oneigenlijke complex. En evenmin kan het algemeene lineaire complex een punt bevatten, dat pool is voor meer dan een der door dit punt gaande vlakken. Want is een punt pool voor twee der door dit punt gaande vlakken, dan hebben alle vlakken door dit punt in dit punt hun pool en ook deze onderstelling leidt tot het oneigenlijke complex. Beide opmerkingen laten zich vereenigen in de stelling, die zegt, dat het algemeene complex geen *uitzonderingselementen* toelaat.

e). Met het oog op de bepaling van het lineaire complex kan het den oningewijde overbodig schijnen het bewijs van het ontbreken der uitzonderingselementen te leveren. Het is dit echter niet. Want bij het oneigenlijke complex, dat toch ook altijd een lineair complex is, komen deze uitzonderingselementen wel voor; daar zijn alle punten der as en alle vlakken door de as uitzonderingselementen. Bovendien komen uitzonderingselementen van geheel denzelfden aard bij complexen van hoogeren graad voor. Wijl de complexkegels en complexkrommen daar geen vlakken en punten zijn, maar kegels van den n^{den} graad en krommen van de n^{de} klasse, zal een punt P daar uitzonderingspunt zijn, als de complexkromme van elk vlak π door P bestaat uit het als kromme van de eerste klasse beschouwde punt P en een kromme van de $n-1^{ste}$ klasse, en evenzoo een vlak π uitzonderingsvlak wezen, als de complexkegel van elk punt P van dit vlak zich in dit vlak en een kegel van den $n-1^{sten}$ graad splitst. Deze uitzonderingselementen heeten dan *hoofdpunt* en *hoofdvlak*. En doet zich het geval voor, dat een punt als kromme van de

eerste klasse k-maal tot de complexkromme van elk door dit punt gaand vlak behoort, of dat een vlak k-maal deel uitmaakt van den complexkegel van elk zijner punten, dan spreekt men van een *k-voudig hoofdpunt* en een *k-voudig hoofdvlak*. Zoo heeft het onder den naam van *tetraëdraalcomplex* bekende complex van den tweeden graad (Th. Reye, *die Geometrie der Lage*) de hoekpunten en zijvlakken van een viervlak tot enkelvoudige hoofdpunten en hoofdvlakken. Zoo speelt, als P en P' isogonaal verwant zijn met betrekking tot een viervlak, dit viervlak geheel dezelfde rol ten opzichte van het complex van den derden graad door de verbindingslijnen PP' gevormd (*Association française*, Congrès de Toulouse, 1887). Zoo bezit het complex van den vierden graad, waarvoor de afstanden der stralen tot twee gegeven lijnen een gegeven verhouding hebben, twee tweevoudige hoofdpunten, zes enkelvoudige hoofdvlakken en één tweevoudig hoofdvlak en heeft het complex van den vierden graad, waarbij het product dier afstanden standvastig is, twee tweevoudige hoofdpunten en acht enkelvoudige hoofdvlakken (*Annales de l' École Polytechnique de Delft*, III, 52), enz.

Elke lijn, waarvan elk punt een k-voudig hoofdpunt en elk er door gaand vlak dan ook een k-voudig hoofdvlak is, noemt men een *k-voudige hoofdlijn*. Als een lineair complex in een oneigenlijk complex overgaat, heeft het dus de as van dit oneigenlijke complex tot enkelvoudige hoofdlijn. En indien een complex van den n^{den} graad een k-voudige hoofdlijn heeft, splitst het zich in het k-maal getelde oneigenlijke complex, dat deze hoofdlijn tot as heeft, en een complex van den graad $n-k$.

Behalve de genoemde uitzonderingselementen bevat elk complex van hoogeren dan den eersten graad nog *bijzondere punten* en *bijzondere vlakken*, d. w. z. punten, waarvan de complexkegels een dubbelribbe meer hebben dan die der overige punten, en vlakken, waarvan de complexkrommen een dubbelraaklijn meer hebben dan die der overige vlakken. Zoo is bij het algemeene complex van den tweeden graad de meetkundige plaats der punten, wier complexkegels een dubbelribbe hebben en dus uit twee vlakken bestaan, tevens het omhullend oppervlak der vlakken, wier complexkrommen een dubbelraaklijn bezitten en dus uit twee punten samengesteld zijn, nl. een oppervlak van den vierden graad en de vierde klasse met zestien conische punten en zestien conische vlakken, d. w. z. vlakken die het in de punten eener kegelsnee aanraken; dit is het *oppervlak van* Kummer.

Omtrent de algemeene theorie der complexen verwijzen wij naar de verhandelingen van Clebsch, F. Klein, Weiler en Voss in de *Mathematische Annalen*.

4. Wijl elk vlak door l' zijn snijpunt met l'' tot pool heeft, liggen de polen van een bundel evenwijdige vlakken op een rechte lijn, de weerkeerige poollijn van de in het oneindige gelegen as des bundels. Deze meetkundige plaats van polen noemt men een *middellijn* van het complex. Dus is middellijn van het complex elke lijn, waarvan de weerkeerige poollijn oneindig ver ligt.

Alle middellijnen van het complex zijn onderling evenwijdig. Want, daar de bundels van evenwijdige vlakken het vlak in het oneindige gemeen hebben, hebben hun middellijnen de in het oneindige gelegen pool van dit vlak met elkaar gemeen. We noemen dit aan alle middellijnen gemeenschappelijke punt het *middelpunt* van het complex.

De middellijn, die behoort bij den bundel van vlakken loodrecht op alle middellijnen, noemt men de *as* van het complex. Wijl zij haar in het oneindige gelegene weerkeerige poollijn loodrecht kruist, zullen alle lijnen, die haar loodrecht snijden, stralen wezen; omgekeerd wordt zij door elken straal, die haar snijdt, loodrecht gesneden.

Bij elken bundel van evenwijdige vlakken, wier gemeenschappelijke lijn niet door het middelpunt gaat, behoort een middellijn in het eindige; bij elken bundel van evenwijdige vlakken door het middelpunt is de as des bundels een straal en dus als weerkeerige poollijn van zich zelf de dan in het oneindige liggende middellijn des bundels.

Bij het oneigenlijke complex vallen alle middellijnen samen met de lijn, die door alle stralen gesneden wordt en de as van het oneigenlijke complex genoemd is. Dus kan de as van het oneigenlijke complex werkelijk als as beschouwd worden in den zin, dien we bij het algemeene lineaire complex aan dit woord gehecht hebben, en is er geen tegenstrijdigheid tusschen de twee verschillende beteekenissen, waarin we het woord hebben gebezigd.

a). Men komt het voorstellingsvermogen te hulp door zich het middelpunt van het complex in het zenith (en nadir) te denken. Alle middellijnen van het complex zijn dan vertikaal. Alle bundels van niet vertikale evenwijdige vlakken hebben dan een vertikale middellijn in het eindige, alle bundels van vertikale

evenwijdige vlakken hebben dan een door den top gaande middellijn in het oneindige. Alle horizontale stralen snijden dan de as en alle horizontale lijnen, die de as snijden, zijn stralen, enz.

In het volgende zal men zich de as van het complex steeds vertikaal denken om alleen hiervan af te wijken als men twee lineaire complexen met niet evenwijdige assen te beschouwen heeft.

5. Zij a (fig. 4) de as van het complex, s een straal en σ het vlak door s evenwijdig aan a. Omdat dit vlak σ door het oneindig ver gelegen punt van a, d. i. door de pool van het vlak in het oneindige gaat, zal de pool van σ in het oneindige liggen en dus elke lijn in σ evenwijdig aan s straal zijn. In elk vlak σ evenwijdig aan a loopen de stralen dus onderling evenwijdig, m. a. w. *als geheel verandert het complex niet, wanneer het in de richting van de as verschoven wordt.*

6. Als van het complex de as a en een straal s gegeven is, vindt men gemakkelijk de weerkeerige poollijn van elke lijn l', die met s in een vlak σ evenwijdig aan a ligt. Bij de afleiding dezer constructie wordt eenvoudigheidshalve ondersteld, dat l' den straal s ontmoet in het punt S (fig. 5) van den kortsten afstand AS tusschen a en s; wijl het complex in de richting van de as verschuifbaar is, doet deze onderstelling de algemeenheid niet te kort.

Vooreerst snijdt l' al de stralen evenwijdig aan het loodrecht op a staande vlak α, die op a en l' rusten en moet l'' op de door deze stralen gevormde hyperbolische paraboloïde dus een lijn van het stelsel (a, l') zijn. Ten tweede snijdt l' alle stralen in het vlak σ en moet l'' dus, wijl ze — èn als weerkeerige poollijn van l' èn als lijn van het stelsel (a, l') der hyperbolische paraboloïde — niet met l' in een vlak liggen mag, door het gemeenschappelijk punt dier stralen gaan en dus evenwijdig aan s wezen. Dus is l'' de aan s evenwijdige beschrijvende lijn der hyperbolische paraboloïde, wat voor deze lijn de volgende constructie oplevert. Breng een vlak β aan evenwijdig aan α en laat dit a, de lijn door S evenwijdig aan a en de lijnen l' en s achtereenvolgens in B, C, L en T snijden. Zoek in dit vlak

β het snijpunt L' van BL met de lijn door T evenwijdig aan BC en trek door L' de lijn $L'S'$ evenwijdig aan s, dan is deze laatste lijn de gevraagde lijn l''.

a). Als l' evenwijdig aan a aangenomen is, vereenvoudigt zich de constructie, wijl de hyperbolische paraboloïde een vlak wordt (plus het vlak in het oneindige); dan is l' een middellijn en de weerkeerige poollijn l'' van l' de lijn in het oneindige, die s en een gemeenschappelijke loodlijn van a en l' snijdt. Als l' in α ligt, wordt l'' de lijn door A evenwijdig aan s. En is l' evenwijdig aan s, d. w. z. valt zij met s samen, dan is ze straal en dus haar eigen weerkeerige poollijn.

7. De lijn $S'T'$ door S' evenwijdig aan SL getrokken is een straal; want ze rust op l'' en is evenwijdig aan l'. Verandert men nu in het vlak σ de richting der lijn l' door S, dan vindt men achtereenvolgens alle stralen $S'T'$, die den kortsten afstand AS van a en s loodrecht snijden.

Stellen r en r' de afstanden AS en AS' voor en zijn δ en δ' de hoeken, waaronder de stralen ST en $S'T'$ de as kruisen, dan volgt uit de evenredigheid

$$CL : C'L' = BC : BC',$$

waarin C' het snijpunt van $L'T'$ met BC aanduidt, onmiddellijk de betrekking

$$r \, tg \, \delta = r' \, tg \, \delta';$$

dus behoudt de uitdrukking $r \, tg \, \delta$ steeds dezelfde waarde, als men den straal s achtereenvolgens door elk der AS loodrecht snijdende stralen vervangt.

a). De stralen, die AS loodrecht snijden, snijden het vlak β in de punten eener gelijkzijdige hyperbool, die B tot middelpunt en BC tot een der asymptoten heeft. Het oppervlak dier lijnen is dus een *orthogonale hyperbolische paraboloïde* met a tot as, A tot top, α tot topraakvlak en het vlak ABS tot een der twee loodrecht op elkaar staande richtvlakken.

Indien het punt T in plaats van tusschen C en L aan de zijde van C buiten CL gelegen was, zou L' aan de zijde van B buiten BL en dus ook S' aan de zijde van

A buiten $A\,S$ gevallen zijn; dan zouden r' en δ' beide het tegengestelde teeken verkregen en het product $r'\,tg\,\delta'$ geen verandering van teeken ondergaan hebben. Als men behoorlijk op het teeken let, is de uitdrukking $r\,tg\,\delta$ dus standvastig voor alle stralen loodrecht op $A\,S$, onverschillig aan welke zijde van A het voetpunt S' ligt.

Gaat men nu van den afstand $A\,S$ (fig. 6) tot den gelijken maar tegengestelden afstand $A\,S'$ over, dan keert de hoek δ van teeken om. Men vindt dan den straal s', terwijl de lijnen l' en l'' uit S evenwijdig aan s' en uit S' evenwijdig aan s dan weer twee weerkeerige poollijnen zijn. Draait nu de lijn s om a, dan brengt zij een omwentelingshyperboloïde voort, die l' en l'' bevat; bij die beweging is s in elken stand een straal van het complex, wijl ze in elken stand op l' en l'' rust. Bij draaiing van het complex om de as zal elke lijn s, die straal is, straal blijven en derhalve ook geen lijn, die geen straal was, straal worden; m. a. w. *als geheel verandert het complex niet, wanneer het om de as gedraaid wordt.* Hieruit blijkt tevens, dat de uitdrukking $r\,tg\,\delta$ niet slechts standvastig is voor alle stralen, die $A\,S$ loodrecht snijden, maar ook voor alle stralen, wier kortste afstand tot a in A loodrecht op a staat, d. i. met het oog op de verschuifbaarheid in de richting van de as, voor alle stralen zonder onderscheid. Aan die onveranderlijke grootheid $\mu = r\,tg\,\delta$ geeft men den naam van *constante* van het complex; zij is de afstand van de as tot de stralen, die deze onder een halven rechten hoek kruisen.

b). Als de constante $r\,tg\,\delta$ nul is, is het complex een oneigenlijk complex met a tot as; is ze oneindig groot, dan bestaat het complex uit alle lijnen die a loodrecht kruisen en is het complex dus een oneigenlijk complex met een in het oneindige liggende as.

8. De as a en een straal s bepalen samen het complex. Want de ligging van dezen straal met betrekking tot de as doet de constante van het complex kennen en met behulp van de as en deze constante kan men alle stralen vinden.

Als men het complex alleen door stralen bepalen wil, zal men er minstens vijf moeten aannemen. Want vier

willekeurig gekozen stralen komen met betrekking tot de bepaling van het complex geheel overeen met de twee deze vier stralen snijdende lijnen, die nu weerkeerige poollijnen van het complex zijn moeten. En is behalve een paar weerkeerige poollijnen l' en l'' niets gegeven, dan is van het poolvlak van een punt P nog slechts één straal, de snijlijn der vlakken $(P\,l')$ en $(P\,l'')$, bekend, terwijl men van de pool van een vlak π nog slechts weet, dat ze op één bepaalden straal, de verbindingslijn der punten $(\pi\,l')$ en $(\pi\,l'')$, liggen moet. Geeft men echter behalve het paar weerkeerige poollijnen l' en l'' nog een straal s, dan is het complex ondubbelzinnig bepaald. Dan is nl. de pool Q van het poolvlak $(P\,s)$ en het poolvlak φ van het punt $(\pi\,s)$ onmiddellijk te vinden; zoodat men het poolvlak van P als het vlak door Q en de snijlijn van de vlakken $(P\,l')$ en $(P\,l'')$, de pool van π als het snijpunt van φ met de verbindingslijn der punten $(\pi\,l')$ en $(\pi\,l'')$ bepalen kan. Het complex kan dus door twee weerkeerige poollijnen en een straal en derhalve ook door vijf stralen bepaald worden.

a). Het lineaire complex is bepaald door vijf enkelvoudige voorwaarden. Dat een gegeven lijn straal is, is een enkelvoudige voorwaarde; dat een punt een bepaald poolvlak, of een vlak een bepaalde pool heeft, is een dubbele voorwaarde; dat een lijn een bepaalde weerkeerige poollijn heeft, of as is, is een viervoudige voorwaarde, enz.

Het getal vijf volgt bij de theorie der reciprociteit hieruit, dat de reciprociteit tusschen twee ruimtestelsels bepaald is, als men vijf willekeurig gekozen punten van het eene met vijf willekeurig gekozen vlakken van het andere laat overeenkomen. Zoo is (REYE, *die Geometrie der Lage*) een lineair complex ook bepaald door een *ruimtevijfhoek*, enz.

Bij stelkundige behandeling is het getal vijf dat der onderling onafhankelijke verhoudingen van de zes coëfficienten der lineaire homogene betrekking tusschen de zes lijncoördinaten der stralen. Omtrent de lijncoördinaten vergelijke men den herdruk der dissertatie van F. KLEIN (*Mathematische Annalen* XXIII, blz. 539—547) en omtrent nieuwere studie van het lineaire complex in lijncoördinaten REYE (CRELLE's *Journal*, XCV, blz. 330—335).

b). In het voorgaande ligt het bewijs, dat er niet oneigenlijke

lineaire complexen bestaan, waarmee de bedenking van art. 2[b] ontzenuwd is.

9. Zijn s_1 en s_2 twee elkaar snijdende stralen van het complex, dan is elke lijn in hun vlak en door hun snijpunt straal. Dit volgt uit de bepaling van het complex.

Zijn s_1, s_2 en s_3 drie elkaar twee aan twee kruisende stralen, dan is elke lijn van het stelsel (s_1, s_2, s_3) op het door deze lijnen bepaalde regelvlak een straal. Want als l' een lijn is, die s_1, s_2, s_3 snijdt, dan zal de weerkeerige poollijn l'' van l' die lijnen ook snijden en zijn de lijnen van het stelsel (s_1, s_2, s_3) dus stralen, wijl ze alle de beide op het regelvlak liggende weerkeerige poollijnen l' en l'' snijden. Op dit oppervlak zijn dan de lijnen van het stelsel (l', l'') als weerkeerige poollijnen involutorisch gepaard; onder hen komen dus twee stralen voor, de dubbelelementen dier involutie.

Zijn l_1', l_1'' en l_2', l_2'' twee paar weerkeerige poollijnen en hebben de lijnen van het eene paar geen punten gemeen met die van het andere, dan hebben zij hyperboloïdische ligging. Want elke lijn, die op l_1', l_1'' en l_2' rust, is straal als snijlijn van l_1', l_1'' en elke straal, die l_2' snijdt, snijdt ook l_2''. Snijden echter l_1' en l_2' elkaar, dan liggen l_1'' en l_2'' in het poolvlak van dit snijpunt. De punten (l_1' l_2'), en (l_1'' l_2'') hebben dan de vlakken (l_1'' l_2'') en (l_1' l_2') tot poolvlakken. De vereenigingslijn der punten is dan tevens de snijlijn der vlakken en dus een straal.

10. De as a van het complex en een straal s bepalen een *schroeflijn*, die a tot as en s tot raaklijn heeft. Alle raaklijnen dezer schroeflijn zijn stralen. Draait men deze schroeflijn om de as, dan zullen haar achtereenvolgende standen op een omwentelingscylinder een bundel van schroeflijnen vormen, waarvan alle raaklijnen stralen zijn. En laat men nu den cylinder zich achtereenvolgens naar beide zijden uitbreiden en daarbij tevens de er op gelegen schroeflijnen zich zoo vervormen als de standvastigheid van het product $r \, tg \, \delta$ dit vereischt, dan zullen de raaklijnen aan de schroeflijnen op de coaxiale cylinders gelegen gezamenlijk alle stralen van het complex vormen.

a). **Naar aanleiding van fig. 6 zou men de stralen van het complex eveneens kunnen vereenigen tot telkens een der beide stellen beschrijvende lijnen van een tweevoudig oneindig aantal omwentelingshyperboloïdes.**

Beschouwt men op een der schroeflijnen het punt P als het snijpunt van twee opvolgende raaklijnen der schroeflijn, dan is het duidelijk, dat het door deze beide raaklijnen gaande *kromtevlak* der schroeflijn in P het poolvlak van P is. En dit bewijst met betrekking tot een willekeurige schroeflijn de stelling, dat de kromtevlakken in de snijpunten met een willekeurig vlak π door een zelfde punt gaan, nl. door de pool van π met betrekking tot het complex, waartoe de schroeflijn behoort.

Met het oog op de winding der schroeflijnen noemt men het complex *rechts of links gewonden*, naarmate $r \, tg \, \delta$ positief of negatief is.

11. Men zou kunnen meenen, dat elke ruimtefiguur, die bij een willekeurig punt P een door dit punt gaand vlak π en omgekeerd bij een willekeurig vlak π een in dit vlak liggend punt P doet vinden, ook een lineair complex oplevert, als men de lijnen door P in het bij P gevonden vlak π en de lijnen in π door het bij π gevonden punt P als stralen beschouwt. Dit behoeft echter niet het geval te zijn, zoo lang men nog niet heeft aangetoond, dat elke straal als straal optreedt voor elk der punten P op hem en elk der vlakken π door hem.

Als voorbeeld nemen we in de ruimte twee paren elkaar kruisende lijnen m_1, m_2 en n_1, n_2 aan. Stellen dan m_p en n_p de door een willekeurig punt P gaande en m_π en n_π de in een willekeurig vlak π gelegene lijnen voor, die op deze lijnenparen m_1, m_2 en n_1, n_2 rusten, dan kan men aan het punt P het vlak $(m_p \, n_p)$ en aan het vlak π het punt $(m_\pi \, n_\pi)$ toewijzen en dus voor P de lijnen door P in het vlak $(m_p \, n_p)$ en voor π de lijnen in π door het punt $(m_\pi \, n_\pi)$ als stralen aanmerken Onderzoeken we nu of elke straal dien naam verdient voor al zijn punten en al zijn vlakken.

Is s (fig. 7) een straal voor het punt P en het vlak π, dan zal deze lijn in het algemeen geen straal zijn met be-

trekking tot een ander punt Q willekeurig op haar gekozen. Immers de lijnen m_q en n_q bepalen in het algemeen een niet door P gaand vlak φ. Want men kan zich voorstellen, dat eerst de lijnen m_q en n_q zoo zijn aangenomen, dat het vlak $(m_q\, n_q)$ niet door P gaat en men daarna m_1 en m_2 op m_p en m_q en evenzoo n_1 en n_2 op n_p en n_q heeft laten rusten. In het algemeen is elke straal s van P dus geen straal van een willekeurig op hem gekozen punt Q en kan deze lijn dit hoogstens voor een zeker aantal harer punten zijn. Hiermee is niet alleen aangetoond, dat de bedoelde verzameling van lijnen geen lineair complex vormt, maar zelfs, dat zij geen complex, van welken graad dan ook, kunnen vormen. Want uit den aard der zaak laat een complex slechts stralen toe, die stralen zijn voor elk der punten, die er op liggen, en elk der vlakken, die er door gaan.

a). Bij complexen van hoogeren graad komen wel lijnen voor, die *veelvoudige lijnen* zijn van den complexkegel van slechts een harer punten en *veelvoudige raaklijnen* van de complexkromme in slechts een der door haar gaande vlakken. Men vergelijke *Annales de Delft*, III, 52.

Dat de bedoelde lijnengroep geen complex vormt, blijkt ook hieruit, dat elke willekeurige lijn l tweemaal tot die verzameling behoort. Is nl. P een willekeurig punt dier lijn l, dan zal l straal zijn voor P, wanneer de raakvlakken in P aan de beide door l, m_1, m_2 en l, n_1, n_2 bepaalde oppervlakken van den tweeden graad samenvallen. En wijl die raakvlakken bij beweging van P over l twee vlakkenbundels vormen, die met de puntreeks P en dus ook onderling projectief zijn, vallen deze raakvlakken voor twee punten P van l samen, enz. Hieruit blijkt tevens, dat elke willekeurige lijn l straal is voor twee der door haar gaande vlakken, de vlakken door l, die de beide regelvlakken in een der beide juist gevonden punten aanraken.

b). Indien twee stelsels van lijnen zoo uit stralenbundels worden opgebouwd, dat elk vlak en elk punt een stralenbundel meebrengt, dan bezitten die beide stelsels denzelfden graad van oneindigheid als men rekening houdt met den graad van oneindigheid van elken straal. Wijl nu de stralen van een lineair

complex voor al hun punten en vlakken stralen zijn en dus een oneindig aantal malen geteld worden als men de stralen van alle punten en alle vlakken bij elkaar voegt, terwijl de stralen van de nu onderzochte groep onder deze omstandigheden slechts een eindig aantal malen genomen worden, moet dit bij de laatste lijnengroep hierin vergoeding vinden, dat de graad van oneindigheid dier nieuwe groep dien van het lineaire complex met een overtreft, m. a. w. dat alle lijnen in de ruimte een eindig aantal malen tot de nieuwe verzameling behooren.

Hebben de lijnenparen m_1, m_2 en n_1, n_2 echter hyperboloïdische ligging, dan zal elke straal voor al zijn punten en vlakken straal zijn en de verzameling van stralen werkelijk een lineair complex vormen. Is nl. P een willekeurig punt en s een lijn door P in het vlak $(m_p\ n_p)$ willekeurig getrokken, dan zal s straal zijn voor P en voor haar beide snijpunten met het door m_1, m_2 en n_1, n_2 gaande oppervlak van den tweeden graad; zoodat de beide projectivische bundels van raakvlakken in de punten van s aan de oppervlakken (s, m_1, m_2) en (s, n_1, n_2) aangebracht drie samenvallingen vertoonen en dus identisch zijn. En als elke straal straal is voor al zijn punten en vlakken, dan geldt de aan het begin van art. 2 bewezen stelling met al haar gevolgen en vormt dus de bedoelde verzameling van stralen een lineair complex; van dit lineaire complex zijn m_1, m_2 en n_1, n_2 twee paar weerkeerige poollijnen, enz.

c). Aan het slot van deze meetkundige beschouwing van het lineaire complex wijzen we met enkel woord den weg aan, langs welken Möbius in zijne studie op het gebied der statica tot het met het lineaire complex samenhangende nulstelsel (art. 2^b) gekomen is.

Zoo als bekend is, laat een willekeurig in de ruimte gegeven stelsel van krachten zich in het algemeen steeds herleiden tot twee elkaar kruisende krachten of tot een kracht en een koppel, terwijl men slechts in een bijzonder geval een enkele kracht of een koppel vindt. In het algemeene geval van twee krachten K' en K'' kan de lijn l', langs welke de eene kracht werkt, willekeurig aangenomen worden; maar dan is ook de lijn l'', langs welke de andere kracht werkt, ondubbelzinnig bepaald. Draait l' om een harer punten P, dan beweegt l'' zich in een vlak π door P; beweegt l' zich in een vlak π, dan draait l'' om een punt P. Gemakkelijk herkent men in de lijnenparen l', l'' de paren weerkeerige poollijnen en in de met elkaar overeenkomende ele-

menten P en π de bij elkaar behoorende polen en poolvlakken van een lineair complex. Elke middellijn van dit complex is dan omgekeerd een lijn, langs welke men een bepaalde kracht kan laten werken, die in vereeniging met een bepaald koppel, d. i. met een nulkracht in het oneindige, het krachtenstelsel kan vervangen; onder deze middellijnen is de as van het complex de *centrale as* van POINSOT, d. i. de lijn, waarbij de resultante met het kleinste koppel behoort. De stralen van het complex zijn, omdat ze de twee weerkeerige poollijnen snijden zoodra men weet dat zij het er een van beide doen, *de lijnen, voor welke de som der momenten van de krachten van het stelsel nul is.* En herleidt het krachtenstelsel zich tot een enkele resultante of tot een koppel, dan herleidt zich het lineaire complex tot een oneigenlijk complex met een as in het eindige of in het oneindige. Men vergelijke omtrent het nulstelsel de verhandeling van MÖBIUS (CRELLE's *Journal*, X, 317 of A. F. MÖBIUS' *gesammelte Werke* I, 489).

Aan deze mechanische behandeling van het complex heeft ZEUTHEN een andere voorstellingswijze verbonden. Verstaat men onder het *moment van twee lijnen*, langs welke men een positieve richting aangenomen heeft, het product van haar kortsten afstand met den sinus van den hoek, dien haar positieve richtingen met elkaar vormen, d. i. het moment van een *eenheidskracht* langs de eene lijn met betrekking tot de andere lijn, dan is het complex met betrekking tot elk harer paren weerkeerige poollijnen l', l'' te beschouwen als *de meetkundige plaats der lijnen, voor welke de met betrekking tot l' en l'' genomen momenten een gegeven verhouding hebben.* ZEUTHEN komt tot dit resultaat met behulp van lijncoördinaten, die hij als momenten ten opzichte van de zes ribben van het coördinatenviervlak en daarna als verhoudingen van inhouden van viervlakken leert beschouwen (*Mathematische Annalen* I, 432).

Ten slotte zou men kunnen meenen, dat de beschouwing van ZEUTHEN vereenvoudiging moet ondergaan, als men niet de verhouding der momenten van een straal tot l' en l'' maar de verhouding zijner afstanden tot l' en l'' standvastig stelt. Dan komt men echter integendeel op een complex van den vierden graad terecht (*Annales de Delft*, III, 52).

II. DE CONGRUENTIE (1,1).

12. Volgens bepaling is de congruentie (1,1) een tweevoudig oneindig aantal lijnen zoo in de ruimte gegeven, dat er één door een willekeurig punt P gaat en één in

een willekeurig vlak π ligt. Kortheidshalve zullen we de congruentielijnen *koorden* noemen.

De koorden, die een willekeurig aangenomen lijn m snijden, vormen een oppervlak F^2 van den tweeden graad door m. Want, daar er door elk punt P van m een koorde gaat, ligt m eenmaal op dit oppervlak en verder bevat elk willekeurig vlak π door m nog een lijn van dit oppervlak, de in π gelegen koorde.

a). We sluiten voorloopig het bijzondere geval, waarin m koorde is, uit. Later zal blijken, wat dan het oppervlak F^2 vervangt (art. 14^b).

b). Geheel langs denzelfden weg vindt men, dat bij een congruentie (m, n) de een gegeven rechte lijn snijdende koorden een oppervlak van den $m+n^{\text{den}}$ graad vormen, dat m-maal door de gegeven lijn gaat.

13. Een willekeurige andere lijn m_1 wordt door het bij m behoorende oppervlak F^2 in twee punten gesneden. Dus zijn er twee op m en m_1 rustende koorden, die natuurlijk bestaanbaar, samenvallend of onbestaanbaar kunnen zijn. Zij laten zich onmiddellijk aanwijzen als m en m_1 (fig. 8) elkaar snijden. Dan is de eene koorde k in het vlak π door m en m_1 gelegen en gaat de andere k' door het snijpunt P van m en m_1.

Beschouwen we nu de bij de lijnen m en m_1 behoorende oppervlakken F^2 en F_1^2, die de twee elkaar kruisende koorden k en k' gemeen hebben, en nemen we aan, dat Q een niet op k of k' gelegen gemeenschappelijk punt dier oppervlakken is, dan is het duidelijk, dat de lijn, die door Q gaat en op k en k' rust, drie punten met elk der beide oppervlakken gemeen hebben en dus op elk dier beide oppervlakken liggen zal. Derhalve bestaat de doorsnee van F^2 en F_1^2 uit k en k' en twee lijnen t_1 en t_2, die k en k' snijden. Deze lijnen t_1 en t_2 kunnen weer bestaanbaar, samenvallend of onbestaanbaar zijn; we bewijzen, dat ze voor de congruentie (1,1) een belangrijke beteekenis hebben.

Snijdt t_1 het vlak π in T_1 en is m_2 een willekeurige lijn door dit punt in π getrokken, dan zal het bij m_2 behoorende oppervlak F_2^2 drie punten met t_1 gemeen hebben

en deze lijn dus bevatten. Zijn nl. M en M_1 de snijpunten van m_2 met m en m_1, dan zullen de drie koorden door M, M_1 en T_1, waarvan de laatste de lijn k is, in verschillende punten op t_1 rusten. Hieruit volgt, dat de koorde van elk punt M_2 van m_2 op t_1 rust en — als we m_2 in π om T_1 laten draaien — dat de koorde van elk punt van π — en dus ook elke koorde — t_1 ontmoet. Wijl nu met behulp van de oppervlakken $F_3{}^2$ behoorende bij lijnen m_3 door het snijpunt T_2 van t_2 met π geheel op dezelfde wijs blijken kan, dat elke koorde t_2 snijdt, is hiermee aangetoond, dat elke koorde de beide lijnen t_1 en t_2 ontmoet; m. a. w. *de congruentie* (1,1) *is de vereeniging der lijnen, die twee gegevene elkaar kruisende lijnen* t_1 *en* t_2 *snijden.* Deze lijnen t_1 en t_2 noemt men de *richtlijnen der congruentie.*

a). Het schijnt, dat men de oppervlakken F^2 behoorende bij de lijnen m_2 door T_1 eveneens gebruiken kan om te bewijzen, dat alle koorden t_2 snijden. Omdat in het volgende artikel hiertegen bezwaren zullen rijzen, is dit niet geschied.

Het oppervlak F^2 der lijn m is het oppervlak der lijnen, die op t_1, t_2 en m rusten.

b). We maken opmerkzaam op de rangschikking van al de koorden der congruentie tot telkens een der stellen beschrijvende lijnen der oppervlakken (m, t_1, t_2), die door draaiing van m om P in π worden voortgebracht. Zij vormen een bundel van oppervlakken met de uit vier lijnen k, k', t_1, t_2 bestaande basiskromme.

In het algemeen vormen de op een bundel van oppervlakken van den tweeden graad liggende rechte lijnen een congruentie (2,6); alleen als de basiskromme van den bundel een scheeve vierhoek is, splitst deze congruentie zich in twee congruenties (1,1) die elk een paar overstaande zijden des vierhoeks tot richtlijnen hebben en vier congruenties (0,1) die elk bestaan uit alle lijnen in een vlak door twee opvolgende zijden des vierhoeks.

Evenzoo als de lijnen in een vlak hier als een congruentie (0,1) verschijnen, komen alle lijnen door een punt als een congruentie (1,0) voor. Zoo splitst de congruentie (1,1) zich in een congruentie (1,0) en een congruentie (0,1), als de richtlijnen elkaar snijden. We noemen de congruenties (1,0) en (0,1) *oneigenlijke congruenties.*

Naderen de beide richtlijnen tot elkaar als twee nabij elkaar gelegen beschrijvende lijnen van een scheef oppervlak, dan bestaat de grensstand der congruentie uit de lijnen, die dit oppervlak in

de punten der lijn van samenvalling aanraken. Bij elk punt der lijn behoort dan een bundel van stralen door dit punt in het raakvlak aan het oppervlak door dit punt. Men spreekt dan van een *bijzondere congruentie* en kan het oppervlak gevormd door de loodrecht op de lijn van samenvalling staande koorden, dat de congruentie bepaalt, *de hyperbolische paraboloïde der congruentie* noemen (WEILER, *Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen*, Zeitschrift von SCHLÖMILCH, XXVII, 257).

14. De punten van en de vlakken door elk der beide richtlijnen maken uitzondering op den regel, dat door elk punt slechts een koorde gaat en in elk vlak slechts een koorde ligt; deze punten en vlakken zijn dus *uitzonderingselementen* der congruentie. Voor elk punt P_1 van t_1 zijn alle lijnen door P_1 in het vlak $(P_1 t_2)$ koorden, voor elk vlak π_1 door t_1 is dit met alle lijnen in π_1 door het punt $(\pi_1 t_2)$ het geval, enz. Snijden twee koorden elkaar, dan is dus elke lijn door haar snijpunt en in haar vlak koorde; het snijpunt ligt dan op de eene der beide richtlijnen en het vlak gaat door de andere.

a). Wat zich hier bij de uitzonderingselementen voordoet, is volkomen analoog aan hetgeen men in de stelkunde opmerkt. Een vergelijking van den n^{den} graad, die $n+1$ wortels bezit, is een identiteit, enz.

b). Indien de lijn m de richtlijn t_1 in T_1 en t_2 het vlak $(m\,t_1)$ in T_2 snijdt, vormen de op m rustende koorden in plaats van het eene stel beschrijvende lijnen van een oppervlak van den tweeden graad twee vlakke stralenbundels nl. de lijnen door T_1 in het vlak $(T_1 t_2)$ en de lijnen door T_2 in het vlak $(T_2 t_1)$. Het oppervlak dier koorden bestaat dan uit de twee vlakken $(T_1 t_2)$ en $(T_2 t_1)$. En snijdt m niet alleen t_1 in T_1 maar ook t_2 in T_2, dan blijft het resultaat onveranderd, ligt alleen T_2 ook op m.

c). Het zou kunnen schijnen, dat door deze uitkomst het in art. 13 gegeven bewijs zijn kracht verliest. Daar toch is gevonden, dat elke op m_2 (fig. 8) rustende koorde t_1 snijdt, omdat drie dezer koorden dit doen en het oppervlak F_2^2 dier koorden dus t_1 bevatten moet. En nu blijkt, dat de koorden, die rusten op de lijn m_2, die t_1 in T_1 snijdt, zich in twee groepen splitsen, waarvan de eene de lijnen door T_1 bevat die t_2 snijden en de andere de lijnen door een bepaald punt T_2 van t_2 die t_1 snijden; zoodat het mogelijk zou zijn, dat de drie koorden door M, M_1, en T_1 de richtlijn t_1 niet in drie verschillende punten sneden. Bij nader

onderzoek blijkt echter, dat de punten, waarin t_1 door de koorden van M en M_1 gesneden wordt, noodzakelijk van T_1 verschillen en het besluit, dat het oppervlak der op m_2 rustende koorden drie punten met t_1 gemeen heeft, ook nu dit oppervlak uit twee platte vlakken bestaat, volkomen geldig blijft; terwijl met behulp der lijn m_2 nog niet onmiddellijk blijken kan, dat t_2 op het bij m_2 behoorende oppervlak F_2^2 ligt, daar de koorden van M en M_1 de richtlijn t_2 in hetzelfde punt snijden. Daarom is, hoewel deze leemte natuurlijk gemakkelijk aan te vullen geweest zou zijn, de vervanging der lijnen m_2 door lijnen m_3 verkozen.

15. De congruentie (1,1) is door vier willekeurig gekozen koorden bepaald. Want deze doen, mits zij geen hyperboloïdische ligging hebben, de beide richtlijnen kennen.

Elk drietal koorden bepaalt een regelvlak van den tweeden graad, waarvan alle lijnen, die met de drie gegevene koorden tot hetzelfde stel behooren, koorden zijn; want al deze lijnen snijden de beide richtlijnen.

Denkt men zich nu de congruentie door de vier koorden k_1, k_2, k_3, k_4 bepaald en neemt men naast deze vier koorden een vijfde lijn s willekeurig aan, dan kan men onmiddellijk bewijzen, dat het door de vijf stralen k_1, k_2, k_3, k_4 en s bepaalde lineaire complex de congruentie door k_1, k_2, k_3, k_4 bepaald omvat en elke koorde dier congruentie dus straal is van het complex. Immers de beide richtlijnen t_1 en t_2 der congruentie zijn dan weerkeerige poollijnen van het complex, wijl met de lijn t_1, die k_1, k_2, k_3, k_4 snijdt, de eenige andere lijn, die deze vier stralen ontmoet, d. i. t_2, als weerkeerige poollijn overeenkomt. En dan is elke lijn, die t_1 en t_2 snijdt, d. i. elke koorde der congruentie, straal van het complex.

Het voorgaande leert ons de congruentie bepaald door de koorden k_1, k_2, k_3, k_4 beschouwen als de vereeniging der stralen gemeen aan de beide complexen (k_1, k_2, k_3, k_4, s) en $(k_1, k_2, k_3, k_4, s_1)$, waarbij s en s_1 twee geheel willekeurig gekozen lijnen zijn; m. a. w. *de congruentie* (1,1) *is de doorsnee van twee lineaire complexen.*

a). Gewoonlijk wordt de congruentie (1,1) als de doorsnee van twee lineaire complexen bepaald (Reye, *die Geometrie der Lage*). Dit is echter in zeker opzicht niet algemeen, omdat niet elke congruentie de doorsnee van twee complexen behoeft te zijn.

Indien een congruentie de doorsnee is van twee complexen van hoogeren graad, dan zijn in het algemeen haar graad m en haar klasse n aan elkaar gelijk. Dan is nl. het aantal koorden door een punt P als het aantal gemeenschappelijke beschrijvende lijnen der complexkegels van P en eveneens het aantal koorden in een vlak π als het aantal gemeenschappelijke raaklijnen der beide complexkrommen van π aan het product der graden van beide complexen gelijk. Toch zijn er congruenties, wier graad en klasse van elkaar verschillen. Zoo hebben we in art. 13^b de oneigenlijke congruenties (1,0), (0,1) en de congruentie (2,6) ontmoet en noemen we hier, om van andere voorbeelden niet te spreken, de bekende congruentie $(n^3 - n^2 + n, n^2 - n)$ gevormd door de normalen aan een puntalgemeen oppervlak F^n van den n^{den} graad (*Nieuw Archief voor Wiskunde*, VI, blz. 24 en 25).

Nu er werkelijk congruenties zijn, die niet als de doorsnee van twee complexen beschouwd kunnen worden, moet rekening gehouden worden met de mogelijkheid, dat de meest algemeene congruentie (1,1) niettegenstaande de gelijkheid van graad en klasse tot deze groep van congruenties behoort. En hoewel dit ons nu gebleken is niet het geval te zijn, is toch — juist omdat dit langs dezen weg eerst gebleken is — de hier gevolgde weg te verkiezen.

b). Bij de voorstelling der congruenties door tweetallen van vergelijkingen in lijncoördinaten, staat men met betrekking tot de congruenties, waarvan graad en klasse verschillend zijn, voor hetzelfde bezwaar, dat men bij de voorstelling der ruimtekrommen door twee vergelijkingen in puntcoördinaten ontmoet. Alleen de ruimtekromme, die de volledige doorsnee is van twee oppervlakken, kan door twee vergelijkingen worden voorgesteld; gedeeltelijke doorsneden, zoo als bijv. de ruimtekromme van den derden graad, vereischen meer dan twee van elkaar afhangende vergelijkingen. En evenzoo is het met congruenties gesteld. Zoo moet de congruentie (m, n) in vereeniging met een zekere andere congruentie $(pq - m, pq - n)$ de doorsnee zijn van twee complexen van de graden p en q. Maar deze aanvullende congruentie is even als de graden p en q der complexen in het algemeen niet te vinden.

Is een zeker vlak α een r-voudig hoofdvlak van een complex van den p^{den} graad en een s-voudig hoofdvlak van een complex van den q^{den} graad, dan bestaat de doorsnee dier complexen uit het rs-maal getelde vlak α en een congruentie $(pq, pq - rs)$. Een dergelijke congruentie, die zich door toevoeging van eenige oneigenlijke congruenties (0,1) of (1,0) tot de volledige doorsnee van twee complexen laat aanvullen, is de eenvoudigste congruentie met van elkaar verschillende kenmerkende getallen m en n, die

men zich denken kan; we zullen er later een voorbeeld van ontmoeten (art. 24).

De uitwerking van deze overeenkomst van bezwaren bij de analytische voorstelling van ruimtekrommen en congruenties leidt tot allerlei opmerkingen. Vooreerst is het duidelijk, dat gelijkheid van graad en klasse niet de eenige voorwaarde behoeft te zijn, waaronder een congruentie de volledige doorsnee is van twee complexen; want was dit het geval, dan zouden bij een congruentie met een ondeelbaar getal tot graad en klasse de door een punt P gaande koorden tevens in een vlak liggen en de in een vlak π liggende koorden tevens door een punt gaan moeten. Op dezelfde wijze als CAYLEY (*Comptes rendus* 1862 I blz. 55, 396, 672 en 1864 I blz. 994) getracht heeft het oppervlak van den laagsten graad te vinden, dat door een gegeven ruimtekromme gaat, — welk oppervlak door hem een *monoïde* genoemd is — kan men den graad van het complex van den laagsten graad zoeken, dat door een gegeven congruentie (m, n) kan gebracht worden, enz.

Omtrent de stralenstelsels of congruenties van hoogeren graad en klasse raadplege men de verhandelingen van KUMMER (*Über die algebraïschen Strahlensysteme u. s. w.* in de Abhandlungen van Berlijn 1864 en *Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme* (CRELLE's *Journal* LVII, blz. 202), een verhandeling van HIRST (*On Cremonian congruences* in de Proceedings of the London Math. Soc., XIV, 1883) en de reeds aangehaalde studie van VOSS in de *Math. Annalen*.

c). Zijn l' en l'' weerkeerige poollijnen van een lineair complex, dan bevat dit ook de koorden van de congruentie (1,1), die deze lijnen tot richtlijnen heeft, als stralen (art. 2). En de stralen, die een gegeven straal snijden, vormen blijkbaar een bijzondere congruentie (art. 14^c). Dus moet men aannemen, dat twee weerkeerige poollijnen in een straal samenvallen even als twee opvolgende standen der beschrijvende lijn van een scheef oppervlak, nl. zoo, dat het vlak door beide lijnen om de lijn draait als het snijpunt van beide lijnen zich over de lijn beweegt, enz. (art. 3^c).

16. Op een paar willekeurige vlakken π en π' teekenen de koorden der congruentie (1,1) twee vlakke stelsels af, tusschen welke een *kwadratische overeenkomst* bestaat. Want de hyperboloïde der op t_1, t_2 en een willekeurige lijn l van π (of π') rustende lijnen snijdt π' (of π) volgens een kegelsnee. In geval de snijlijn der vlakken echter een koorde is, gaat de overeenkomst in homografie of collineätie over.

a). Deze door STEINER gevondene afleiding der kwadratische

overeenkomst (*Systematische Entwickelung u. s. w.*, N°. 59, of *gesammelte Werke*, I, blz. 407) heeft historische waarde; zij vormt de eerste behandeling van dit onderwerp.

III. Stelsels van lineaire complexen.

17. Als een congruentie door vier koorden k_i ($i = 1$, 2, 3, 4) gegeven is, dan bepaalt elke vijfde willekeurig aangenomen lijn s een lineair complex, dat deze lijn s en al de koorden der gegeven congruentie tot stralen heeft. Laat men daarna s veranderen, dan verkrijgt men een enkelvoudig oneindig aantal lineaire complexen; wijl zij alle de koorden der gegeven congruentie als stralen gemeen hebben en er door elke willekeurige andere lijn s steeds een van hen gaat, geeft men aan dit samenstel van complexen den naam van *complexbundel* en aan de aan alle complexen des bundels gemeenschappelijke congruentie den naam van *basiscongruentie* des bundels.

a). De verzameling van lineaire complexen is enkelvoudig oneindig. Want bij de onderstelling, dat elke lijn s een nieuw complex bepaalt, zou het aantal der complexen viervoudig oneindig zijn. Maar, wijl elk complex een drievoudig oneindig aantal stralen heeft, wordt het bij deze onderstelling een drievoudig oneindig aantal malen geteld, enz.

Twee lineaire complexen bepalen samen een congruentie, die de gemeenschappelijke stralen van beide tot koorden heeft. Zij bepalen dus ook den complexbundel, waarvan deze congruentie de basiscongruentie is; m. a. w. een complexbundel is door twee zijner complexen bepaald.

Bepaalt men de basiscongruentie door haar twee richtlijnen t_1 en t_2 in plaats van door vier koorden, dan zal elke lijn s, die geen der richtlijnen snijdt, een complex bepalen, dat s tot straal en t_1 en t_2 tot een paar weerkeerige poollijnen heeft. Even als boven vormen al deze complexen weer een bundel, enz.

Een eigenaardig bijzonder geval doet zich voor, wanneer de beide richtlijnen elkaar loodrecht kruisen en een van beide in het oneindige ligt. Dan hebben de complexen des

bundels een gemeenschappelijke as, de in het eindige liggende richtlijn der congruentie, en zijn zij door de waarde der constante $\mu = r\, tg\, \delta$ van elkaar onderscheiden.

De complexbundel bevat twee oneigenlijke complexen, waarvan het eene t_1 en het andere t_2 tot as heeft. Wijl deze twee oneigenlijke complexen de basiscongruentie bepalen kunnen zij even goed als twee andere complexen des bundels den bundel bepalen. Men vindt een dezer oneigenlijke complexen als s een der beide richtlijnen snijdt; snijdt s beide richtlijnen, dan bepaalt ze als aan alle complexen des bundels gemeenschappelijke straal geen complex.

Als de richtlijnen t_1, t_2 der basiscongruentie elkaar snijden en de basiscongruentie zich dus splitst in alle lijnen door het snijpunt P van t_1, t_2 en alle lijnen in het vlak π door t_1, t_2, dan zal elk der complexen des bundels een oneigenlijk complex zijn met een as door P en in π. Snijdt nl. de lijn s, die met de basiscongruentie het complex bepaalt, het vlak π in S, dan zullen zoowel alle lijnen door S als alle lijnen door P tot dit complex behooren. Want het bevat de lijnen door S in π en s, dus alle lijnen door S, enz. Dus moet het complex een oneigenlijk complex zijn met de lijn $P\,S$ in π tot as.

18. De assen der lineaire complexen van den bundel, die een gegeven congruentie (1,1) tot basiscongruentie heeft, noemt men de *assen der congruentie*. We zoeken het oppervlak, dat de meetkundige plaats dier assen is.

De as van een complex snijdt het vlak in het oneindige in diens pool en ontmoet dus al de in het oneindige gelegen stralen; derhalve moeten de assen der congruentie alle haar oneindig ver gelegen koorde snijden. Maar dan moet ook het oppervlak F^2, dat volgens art. 12 de meetkundige plaats is van de koorden, die een willekeurig gegeven lijn snijden, voor elk van de assen der congruentie een hyperbolische paraboloïde zijn en wel een rechthoekige. Want, daar de as van een complex al de haar ontmoetende stralen loodrecht snijdt, staat zij loodrecht op het richtvlak der haar ontmoetende koorden en staan dus de beide richtvlakken loodrecht op elkaar.

Uit de beschouwingen van art. 6 volgt, dat de as van een complex den kortsten afstand van elk paar weerkeerige poollijnen loodrecht snijdt. Nemen we voor het complex een der complexen des bundels en voor het paar weerkeerige poollijnen de richtlijnen t_1 en t_2 der basiscongruentie, dan vinden we, dat alle assen der congruentie den kortsten afstand van t_1 en t_2 loodrecht snijden.

a). Nu zou men kunnen meenen, dat hieruit in verband met het voorgaande voor het gezochte oppervlak een hyperbolische paraboloïde gevonden wordt. Want de assen moeten evenwijdig blijven aan een vlak loodrecht op den kortsten afstand tusschen t_1 en t_2 en bovendien twee lijnen snijden, den genoemden kortsten afstand en de in hét oneindige liggende koorde der congruentie. Bij nader inzien blijkt echter, dat het rusten op deze koorde met het evenwijdig zijn aan een vlak loodrecht op den kortsten afstand identisch is en dat in elk vlak loodrecht op dien kortsten afstand de as nu verder zoo bepaald moet worden, dat zij door de haar snijdende koorden loodrecht gesneden wordt.

De twee lijnen a (fig. 9), die in het vlak α loodrecht op den kortsten afstand $A_1 A_2$ van de richtlijnen t_1 en t_2 in het midden O tusschen A_1 en A_2 aangebracht den hoek tusschen de projecties u_1 en u_2 van t_1 en t_2 op dit vlak middendoordeelen, zijn assen der congruentie. Want uit de beschouwing der hyperbolische paraboloïde, die t_1, t_2 en een der beide lijnen a tot richtlijnen heeft, blijkt onmiddellijk, dat deze lijn a de haar ontmoetende koorden loodrecht snijdt. En aan den anderen kant zijn de lijnen a de eenige assen door O, waaruit dus volgen moet, dat er door elk punt van $A_1 A_2$ twee assen der congruentie gaan, daar de lijn $A_1 A_2$ zelve niet tot deze assen behoort. We toonen dit nog nader aan door voor een willekeurig punt van $A_1 A_2$ de assen te construeeren.

Brengt men een willekeurig vlak aan evenwijdig aan $A_1 A_2$, dat t_1 in B en t_2 in C snijdt, projecteert men B in B' en C in C' op het vlak der assen a, laat men uit O de loodlijn $O D'$ op de verbindingslijn $B' C'$ neer en zoekt men het punt D van de lijn $B C$ waarvan D' de projectie is op het vlak der assen, dan is de lijn $D E$ uit D

evenwijdig aan $D' O$ getrokken een as der congruentie. Want deze lijn $D E$ is richtlijn der hyperbolische paraboloïde, die door de richtlijnen t_1, t_2 en het evenwijdig aan $A_1 A_2$ aangenomen richtvlak bepaald wordt; dus zal zij als loodlijn op dit richtvlak de beschrijvende lijnen van dit oppervlak, d. w. z. de koorden die zij ontmoet, loodrecht snijden, enz.

Uit de figuur volgt onmiddellijk

$$\frac{A_1 E}{A_1 A_2} = \frac{B D}{B C} = \frac{B' D'}{B' C'}.$$

Wijl nu de meetkundige plaats van D' bij draaiing van het aan $A_1 A_2$ evenwijdig aangenomen vlak om $B B'$ de in het vlak α op $B' O$ als middellijn beschreven cirkel is en deze door de bij de verhouding $\frac{A_1 E}{A_1 A_2}$ passende lijn evenwijdig aan u_2 in twee punten D' gesneden wordt, gaan er twee assen der congruentie door elk punt E van $A_1 A_2$ en zijn deze assen gemakkelijk te construeeren, als het punt E gegeven is.

In elk vlak $A_1 A_2 D$ door $A_1 A_2$ ligt een der assen van de congruentie. Want bij het loodrecht op $A_1 A_2 D$ staande richtvlak door $B B'$ behoort een enkele as. Dus is de gezochte meetkundige plaats een *regelvlak van den derden graad* met $A_1 A_2$ tot dubbellijn en de haar loodrecht kruisende koorde in het oneindige tot enkelvoudige richtlijn.

b) De verhouding $\frac{A_1 E}{A_1 A_2} = \frac{B' D'}{B' C'}$ wordt het grootst, als men voor D' het punt D'' neemt, waar rechts van $B' O$ de raaklijn aan den hulpcirkel evenwijdig is aan $C' O$. Is nu $\angle B' O C' = 2 \delta$, dan vindt men met betrekking tot het bedoelde punt D'' onmiddellijk $\frac{B' D''}{B' C'} = \frac{\sin^2 (45° + \delta)}{\sin 2 \delta}$. Eveneens wordt het punt D''', waar de verhouding haar kleinste waarde heeft en dat in den hulpcirkel middellijnig tegenover D'' gelegen is, door de betrekking $\frac{B' D'''}{B' C'} = - \frac{\sin^2 (45° - \delta)}{\sin 2 \delta}$ bepaald. De punten D'' en D''' zijn niet in de figuur aangewezen.

De beide gevonden grensverhoudingen geven op $A_1 A_2$ de punten F aan, voor welke de beide assen samenvallen. Zij liggen,

zooals te verwachten was, symmetrisch ten opzichte van O, want $\frac{B'D'}{B'C'} + \frac{B'D''}{B'C'} = 1$. Tusschen deze grenspunten F liggen de punten E met bestaanbare, er buiten liggen de punten E met onbestaanbare assen. In het algemeen liggen de grenspunten buiten het segment $A_1 A_2$; alleen als $\delta = 45°$ is, vallen zij met A_1 en A_2 samen.

In A_1 zijn de beide assen de lijn t_1 behoorende bij een oneigenlijk complex en de loodlijn door A_1 op het vlak $(A_1 t_2)$; werkelijk zijn deze lijnen altijd bestaanbaar en vallen ze voor $\delta = 45°$ samen.

Is de gegeven congruentie een bijzondere (art. 13[b]), dan zal het voorgaande in hoofdzaak doorgaan. De punten $A_1 A_2$ vereenigen zich dan in het centraalpunt A der beschrijvende lijn van samenvalling met betrekking tot de hyperbolische paraboloïde der congruentie, δ wordt nul en de grenspunten F liggen aan weerskanten van A op een afstand, die het dubbel is van den *parameter* dier beschrijvende lijn (DE LA GOURNERIE, Traité de géométrie descriptive, deel II, blz. 144).

c). De bij de afleiding van het oppervlak der assen gebruikte hyperbolische paraboloïdes hebben de zijden van een scheeven vierhoek ($A_1 A_2$, t_1, de in het oneindige liggende koorde en t_2) gemeen. Zij vormen dus een bundel. We vinden derhalve hier de in art. 13[b] aangewezen rangschikking der koorden zoo herhaald, dat met ieder oppervlak een as der congruentie in verband staat.

d). Als t_1 in het oneindige ligt en t_2 niet loodrecht kruist, herleidt het oppervlak van den derden graad zich tot een plat vlak, het vlak door t_2, dat met een willekeurig vlak door t_1 een loodlijn op de projectie van t_2 op dit vlak tot doorgang heeft. In dit vlak zijn de lijnen evenwijdig aan t_2 de assen van de complexen des bundels. Kruist de in het oneindige liggende richtlijn t_1 de andere t_2 loodrecht, dan vallen, zoo als we reeds zagen, al de assen met t_2 samen.

19. Alle complexen, die drie gegeven lijnen s_1, s_2, s_3 tot stralen hebben, hebben als stralen al de lijnen s gemeen, die op het door deze drie lijnen bepaalde oppervlak van den tweeden graad met deze drie lijnen tot een zelfde stel behooren. Zij vormen een tweevoudig oneindig samenstel van complexen, waaraan men den naam van *complexnet* geeft; van dit complexnet vormt het oppervlak der lijnen s het *basisregelvlak*.

Elke lijn a', die de drie gegeven stralen s_1, s_2, s_3 ont-

moet, is as van een oneigenlijk complex in het net begrepen; de meetkundige plaats der assen a' is dus eveneens het basisregelvlak.

Elke willekeurige lijn l bepaalt met de drie lijnen s_1, s_2, s_3 een congruentie (1,1), die de twee op l rustende lijnen a' van het basisregelvlak tot richtlijnen heeft.

Elk willekeurig paar lijnen l_1, l_2 bepaalt met de drie gegeven stralen een complex; de assen van deze complexen, noemt men de assen van het complexnet. We zullen later zien welk een congruentie zij vormen.

Het complexnet is bepaald door drie onderling onafhankelijke complexen C_1, C_2, C_3, d. w. z. door drie complexen, die niet tot een zelfden bundel behooren. Zijn nl. t_1 en t_2 de richtlijnen der congruentie gemeen aan C_1 en C_2, t_1' en t_2' de richtlijnen der congruentie gemeen aan C_2 en C_3, dan hebben deze vier lijnen als twee paar weerkeerige poollijnen van C_2 hyperboloïdische ligging en vormen de op deze vier lijnen rustende stralen het basisregelvlak van het net.

a). Indien s_1 en s_2 elkaar in S snijden en s_3 het vlak σ door s_1 en s_2 in T ontmoet, bestaat het basisregelvlak uit twee stralenbundels. Gaan de drie stralen s door een zelfde punt S, of liggen zij in een zelfde vlak σ, dan treedt er onbepaaldheid in bij de in het net begrepen congruenties, die alle uit de vereeniging eener congruentie (0,1) met een congruentie (1,0) bestaan; terwijl al de complexen van het net dan oneigenlijke complexen zijn.

20. Alle complexen, die twee gegeven lijnen s_1, s_2 tot stralen hebben, vormen een drievoudig oneindig samenstel, waaraan we den naam van *complexweefsel* geven; van dit weefsel vormen s_1 en s_2 de *basisstralen*.

Elke lijn a', die s_1 en s_2 ontmoet, is de as van een oneigenlijk complex van het weefsel; dus vormen de assen der oneigenlijke complexen van het weefsel de congruentie (1,1), die s_1 en s_2 tot richtlijnen heeft.

Gemakkelijk blijkt, dat een, twee en drie lijnen l met de beide basisstralen achtereenvolgens een complexnet, een congruentie en een lineair complex bepalen. En aanstonds zal blijken, welk een complex gevormd wordt door de assen der in het weefsel begrepen complexen.

Het complexweefsel is bepaald door vier onderling onafhankelijke complexen C_1, C_2, C_3, C_4, d. w. z. door vier complexen, die niet tot een zelfde complexnet behooren. Zijn nl. t_1 en t_2 de richtlijnen der congruentie gemeen aan C_1 en C_2, t_1' en t_2' de richtlijnen der congruentie gemeen aan C_3 en C_4, dan zullen de twee lijnen, die op deze vier lijnen rusten, de beide basisstralen van het weefsel doen kennen.

a). Het geval, dat s_1 en s_2 elkaar snijden, wordt in verband met art. 19 gemakkelijk in zijn bijzonderheden geschetst.

21. Alle complexen, die een gegeven lijn s tot straal hebben, vormen een viervoudig oneindig samenstel, dat we een *complexstelsel* noemen; van dit stelsel mag s de *basisstraal* heeten.

Elke lijn a', die s ontmoet, is de as van een oneigenlijk complex in het stelsel begrepen; dus vormen de assen der oneigenlijke complexen in het stelsel begrepen een oneigenlijk complex met den basisstraal van het stelsel tot as.

Het hier beschouwde complexstelsel is niet het meest algemeene. Want dit laatste wordt bepaald door vijf onderling onafhankelijke complexen C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, d. w. z. door vijf complexen, die niet tot een zelfde complexweefsel behooren, en deze hebben in het algemeen geen straal gemeen. Dit algemeene complexstelsel bepaald door C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 omvat al de complexen, die met een der vijf complexen en een der complexen uit het door de vier overige complexen bepaalde weefsel tot een zelfden bundel behooren. En nu blijkt gemakkelijk, dat deze verzameling van complexen met het eerst besproken stelsel daarin overeenkomt, dat alle er toe behoorende complexen, die een, twee of drie willekeurig gegeven lijnen tot stralen hebben achtereenvolgens een weefsel, een net of een bundel vormen en er slechts één complex toe behoort, dat vier willekeurig gegeven lijnen tot stralen heeft. Is nl. F^2 het regelvlak van het net (C_1, C_1, C_3), zijn daarop s_1, s_2 de basisstralen van het weefsel (C_1, C_2, C_3, C_4) en s_1', s_2' die van het weefsel (C_1, C_2, C_3, C_5), terwijl l een willekeurige lijn aanduidt, dan zullen de beide lijnen door de snijpunten van l met F^2, die niet met de

lijnen s tot hetzelfde stel behooren, aan de oppervlakken (s_1, s_2, l) en (s_1', s_2', l) van den tweeden graad gemeen zijn en deze elkaar dus verder nog volgens een lijn l' van het stel der lijnen s snijden. Deze lijn vormt met l de basisstralen van het door l in het complexstelsel bepaalde complexweefsel, enz.

Tevens blijkt hieruit, dat de assen der oneigenlijke complexen van dit meer algemeene stelsel nu niet een oneigenlijk, maar een eigenlijk complex vormen. Want alle assen die een lijn l snijden, snijden ook een tweede l', enz.

22. De assen der complexen begrepen in een complexstelsel vormen de viervoudige oneindigheid der lijnen in de ruimte. Dit is onmiddellijk duidelijk bij het stelsel met een basisstraal s. Want elke lijn a bepaalt een complex, waarvan s straal is. En bij een meer algemeen complex kan men als volgt redeneeren. Zijn op het basisregelvlak F^2 van het net (C_1, C_2, C_3) door s_1, s_2 en s_1', s_2' weer de basisstralen van de weefsels (C_1, C_2, C_3, C_4) en (C_1, C_2, C_3, C_5) voorgesteld, dan zullen de basisstralen van de weefsels $(C_1, C_2, C_3, C_\lambda)$, waarbij C_λ elk willekeurig complex uit den bundel (C_4, C_5) aangeeft, op F^2 de involutie $(s_1 s_2, s_1' s_1')$ vormen. Maar op dit zelfde oppervlak zullen de basisstralen van het weefsel (C_1, C_2, C_3, C_μ), waarvan C_μ het complex is met een willekeurig gegeven lijn a tot as en μ tot constante, bij verandering van μ een tweede involutie vormen. Het aan beide involuties gemeenschappelijke paar lijnen is een stralenpaar van het in het stelsel begrepen complex met a tot as.

23. We zoeken thans de meetkundige plaats van de assen der complexen begrepen in een weefsel. Zijn s_1 en s_2 de beide basisstralen en a de as van één in het door ben bepaalde weefsel begrepen complex, dan hebben naar de uitdrukking van Zeuthen (art 11[c]) de lijnen s_1 en s_2 gelijke momenten μ met betrekking tot a. Maar dan heeft a ook gelijke momenten μ met betrekking tot s_1 en s_2. Dus is de meetkundige plaats der lijnen a de meetkundige plaats van de congruentie gemeen aan de beide complexen, die s_1 en s_2 tot assen en μ tot constante hebben, als men μ laat veranderen.

Deze meetkundige plaats van de doorsnee der overeenkomstige complexen van twee projectivische complexbundels is een *complex van den tweeden graad.* Immers de poolvlakken π_μ en π'_μ van een willekeurig gekozen punt P met betrekking tot de complexen C_μ en C'_μ, die s_1 en s_2 tot assen en μ tot constante hebben, brengen bij verandering van μ twee projectivische vlakkenbundels voort, die de loodlijnen uit P op s_1 en s_2 tot assen hebben, en de meetkundige plaats van de snijlijn dier vlakken π_μ en π'_μ is een kegel van den tweeden graad. En evenzoo doorloopen de polen P_μ en P'_μ van een willekeurig gekozen vlak π met betrekking tot de complexen C_μ en C'_μ bij verandering van μ twee projectivische puntreeksen, waarvan de in π gelegen loodlijnen op s_1 en s_2 de dragers zijn, en omhult de verbindingslijn dier punten een kromme van de tweede klasse. Dus is de verzameling van assen a een complex van den tweeden graad, wijl de complexkegel van elk punt P van den tweeden graad en de complexkromme van elk vlak π van de tweede klasse is.

Bij de beschouwing van het complex der assen a als de meetkundige plaats der congruenties gemeen aan de overeenkomstige complexen C_μ en C'_μ van twee projectivische complexbundels (C_μ) en (C'_μ) verdient het opmerking, dat de oneigenlijke complexen van den eenen bundel met die van den anderen overeenstemmen, wijl zij met dezelfde waarden van μ, nl. nul en oneindig, overeenkomen. En de assen der oneigenlijke complexen, die bij de oneindig groote waarde van μ behooren, snijden elkaar bovendien, wijl ze beide in het vlak in het oneindige liggen. Dus bevat de meetkundige plaats een congruentie (1,1), die zich splitst in de congruentie (0,1) der lijnen in dit vlak π_∞ en de congruentie (1,0) der lijnen, die s_1 en s_2 loodrecht snijden en dus door een in het oneindige gelegen punt P_∞ gaan; m. a. w. het vlak π_∞ is een enkelvoudig hoofdvlak en het punt P_∞ een enkelvoudig hoofdpunt van het complex van den tweeden graad.

Wanneer de twee basisstralen s_1 en s_2 elkaar snijden, is het vlak (s_1, s_2) een tweede hoofdvlak en het punt (s_1, s_2) een tweede hoofdpunt der meetkundige plaats.

a). In het voorbijgaan mag hier worden aangestipt, dat niet elk complex van den tweeden graad door middel van twee projectivische lineaire complexbundels kan worden voortgebracht. Men vergelijke de in art. 13[b] aangehaalde verhandeling van WEILER.

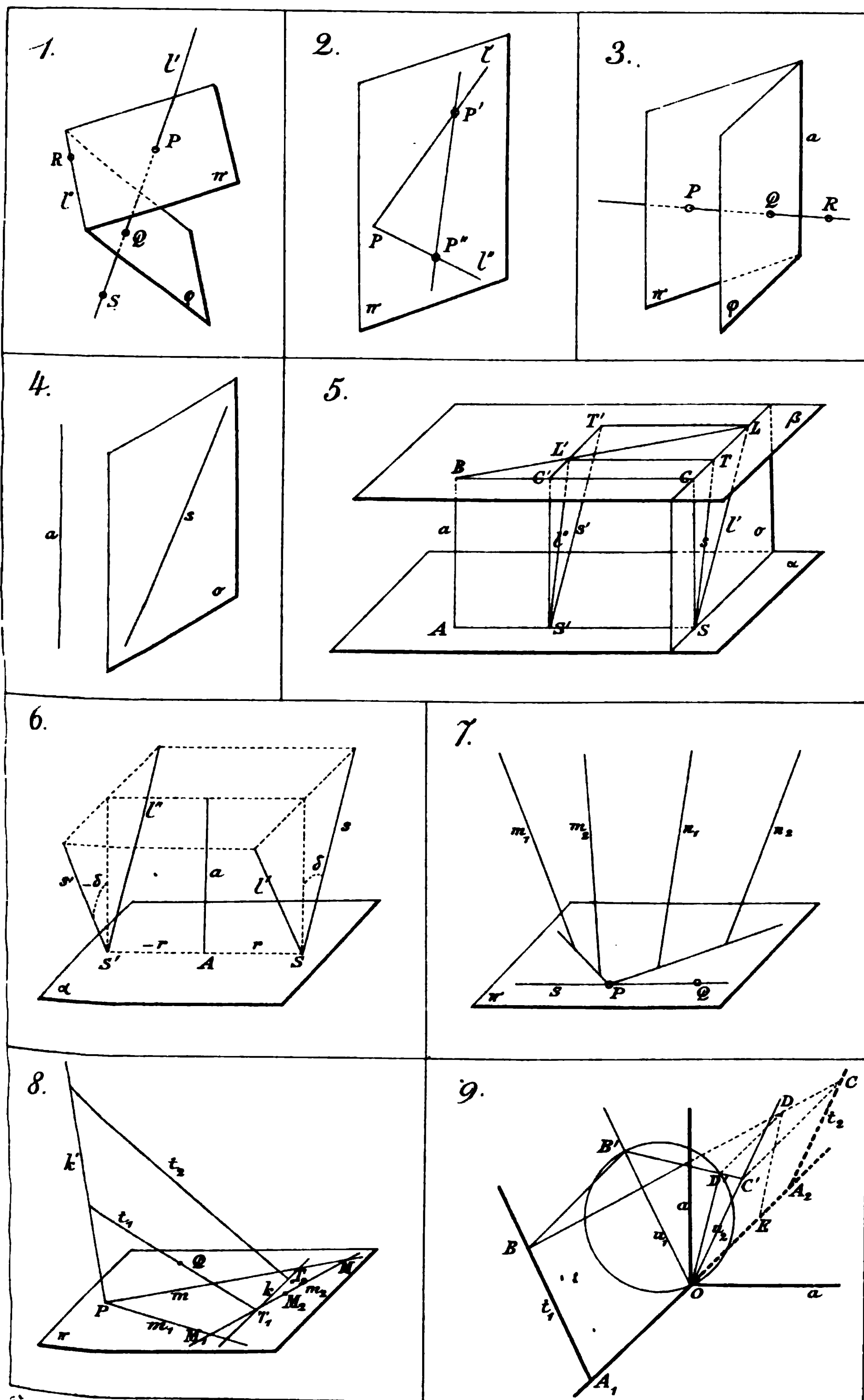
b). Indien er slechts één hoofdvlak en één hoofdpunt is, zal het oppervlak der bijzondere punten van het complex van den tweeden graad een oppervlak van den derden graad en de derde klasse wezen. Zijn er echter twee hoofdvlakken en twee hoofdpunten, dan gaat het bedoelde oppervlak in een oppervlak van den tweeden graad en de tweede klasse over.

24. Eindelijk bepalen we de meetkundige plaats van de assen der complexen begrepen in een net, waarvan s_1, s_2, s_3 de gegeven basisstralen zijn. We slagen hierin onmiddellijk als we dit net als aan de weefsels (s_1, s_2) en (s_1, s_3) gemeen beschouwen. Dan blijkt namelijk, dat de bedoelde meetkundige plaats als de doorsnee van twee complexen van den tweeden graad met een gemeenschappelijk hoofdvlak π_∞ een *congruentie* (4,3) is.

Zijn de basisstralen s_1, s_2, s_3 evenwijdig aan een zelfde vlak, dan zal het gemeenschappelijk punt der loodlijnen op dit vlak een gemeenschappelijk hoofdpunt van beide complexen van den tweeden graad zijn en dus de doorsnee een *congruentie* (3,3) wezen.

a). Omtrent de bundels, netten, weefsels en stelsels van lineaire complexen vergelijke men nog de verhandeling *Introduzione alla teoria dello spazio rigato* van E. CAPORALI en P. DEL PEZZO, opgenomen in het dit jaar uitgekomen werk *Memorie di geometria di Ettore Caporali*, en het eerste gedeelte der verhandeling *Fondamenti di una teoria dello spazio generato dai complessi lineari* van R. DE PAOLIS (Reale Accademia dei Lincei, 15 Februari, 1885).

We besluiten met het volgende overzicht, dat uit zich zelf duidelijk is en waarin de overeenkomst tusschen de van boven naar beneden gelezen derde kolom en de van beneden naar boven gelegen vierde kolom in het oog springt.



Lith Gebr Renmeringer, Amst.

Beschouwde vormen.	Aantal bepalende stralen.	Gemeenschappelijke elementen.	Assen van oneigenlijke complexen.	Assen in het algemeen.
I^a. Complex. I^b. Oneigenlijk complex.	5	(Complex). (Oneigenlijk complex).	 Een lijn.	Een lijn.
II. Complexbundel.	4	Congruentie (1,1) met richtlijnen t_1, t_2.	De twee lijnen t_1, t_2	Een regeloppervlak F^3.
III. Complexnet.	3	Regelvlak s_1, s_2, s_3	Regelvlak der lijnen, die s_1, s_2, s_3 snijden.	
		a) Hyperboloïde.		Congruentie(4,3)
		b) Paraboloïde.		Congruentie(3,3)
IV. Complexweefsel.	2	Twee basisstralen s_1, s_2.	Congruentie (1,1) met richtlijnen s_1, s_2.	Complex van den tweeden graad met hoofdvlak (π_∞) en hoofdpunt (P_∞).
V^a. Beperkt complexstelsel.	1	Een basisstraal s_1.	Oneigenlijk complex met as s_1.	Alle lijnen in de ruimte.
V^b. Algemeen complexstelsel.	0	Niets.	Complex.	

Groningen, 24 Februari 1888.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 31 Maart 1888.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DER WAALS, Onder-Voorzitter, SCHOUTE, STOKVIS, FORSTER, MICHAËLIS, VAN DE SANDE BAKHUYZEN, SCHOLS, BAEHR, HUBRECHT, VAN BEMMELEN, PLACE, VAN RIEMSDIJK, KORTEWEG, A. C. OUDEMANS JR., GRINWIS, DIBBITS, VAN 'T HOFF, VAN DORP, HOEK, J. A. C. OUDEMANS, FRANCHIMONT, LORENTZ, MAC GILLAVRY, PEKELHARING, MARTIN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, ZEEMAN, BIERENS DE HAAN, VAN DIESEN en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris; voorts het correspondeerend Lid de Heer: VAN DER BURG en van de letterkundige Afdeeling de Heer: CAMPBELL.

— Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— De Heer BUYS BALLOT heeft zich schriftelijk over het niet bijwonen der vergadering verontschuldigd. De Heer VAN DER WAALS leidt, als Onder-Voorzitter, de vergadering.

— Worden gelezen Brieven van dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. den Secretaris van het historisch Genootschap te Utrecht, 1888; den Directeur van de Universiteits-boekerij te Upsala, 7 Maart 1887; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van binnenlandsche Zaken, 's Gravenhage, 29 Februari 1888; 2°. het Ministerie van Marine, 's Gravenhage, 29 Februari 1888; 3°. J. F. L. Schneider, Bibliothecaris der polytechnische School te Delft, 26 Maart 1888; 4°. L. Janmart de Brouillant, Brussel, 1888; 5°. von Bezold, Directeur van het kön. preuss. meteorologisches Institut te Berlijn, 1888; 6°. J. J. Bride, Bibliothecaris der public Library of Victoria te Melbourne, 18 October 1887; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de boekerij.

— De Heer Bierens de Haan leest, ook uit naam van den Heer van den Berg, het rapport over de verhandeling des Heeren Dr. J. de Vries (Over vlakke configuraties).

De conclusie strekt om haar op te nemen in de werken der Akademie. Aldus wordt besloten.

— De Heer Grinwis leest, ook uit naam van den Heer Lorentz, het rapport over de verhandeling des Heeren Dr. V. A. Julius (Over de lineaire spectra der elementen). Het voorstel om haar in de werken der Akademie op te nemen, wordt aangenomen.

— De Heer van de Sande Bakhuyzen deelt, ook uit naam van den Heer Bosscha, mede, dat zij met den Heer Dr. J. D. van der Plaats overeengekomen zijn, dat deze zijne verhandeling: »Over Standaardbarometers, in het bijzonder over die van het koninklijk Nederlandsch Meteorologisch Instituut" in twee deelen splitsen, en daarvan het eerste voor de werken der Akademie afstaan, het tweede echter voor de werken van een ander wetenschappelijk lichaam bestemmen zal. — Dit eerste gedeelte, in ietwat gewijzigden vorm, zou der Commissie van beoordeeling binnen kort opnieuw worden toegezonden.

— De Heer Martin deelt mede, dat hem door den Heer

van Lansberge, oud Gouverneur-Generaal van Nederlandsch-Indië, voor het Leidsch Museum ten geschenke werd aangeboden een stuk kaak van een reusachtigen Ichthyosaurus, afkomstig van de zuidkust van Ceram. Uit dit fossiel kan het bestaan van mesozoïsche lagen op genoemd eiland worden afgeleid, en, op grond van het feit, dat in Engelsch-Indië en Australië overblijfselen van hetzelfde dier in het krijt gevonden zijn, ook tot de aanwezigheid van eene krijtformatie op Ceram besloten worden. De opgave in Berghaus' »Physikalischer Atlas" dat er aan de zuidkust van Ceram eene palaeozoïsche formatie zoude voorkomen, is van grond ontbloot.

— De Heer J. A. C. Oudemans biedt voor de werken der Akademie aan eene verhandeling van den Heer Dr. J. D. van der Plaats, leeraar aan de Veeartsenijschool te Utrecht, getiteld: »Over den Secundeslinger", 1e gedeelte. Aan de Heeren Bosscha, van de Sande Bakhuyzen en Schols wordt opgedragen, daarover rapport uit te brengen.

— De Heer Lorentz biedt voor de werken der Akademie aan eene verhandeling van den Heer Dr. V. A. Julius, getiteld: »Over de trillende beweging van een vervormden vloeistofbol". Tot rapporteurs daarover worden aangewezen de Heeren Grinwis en Korteweg.

— Daar er verder niets te behandelen is, wordt de vergadering gesloten.

RAPPORT

OVER EENE

VERHANDELING VAN **Dr. J. DE VRIES,**

„OVER VLAKKE CONFIGURATIES".

(Uitgebracht in de Vergadering van 31 Maart 1888).



De Afdeeling heeft ons in hare zitting van 25 Februari ll. opgedragen, een advies uittebrengen over eene verhandeling van Dr. J. DE VRIES, met den titel: *Over vlakke configuraties*; zij bevatte 9 paragrafen. Spoedig daarop zond de schrijver ons paragraaf 10 tot 13, die wij gemeend hebben bij de beoordeeling in het stuk te mogen opnemen.

De configuraties zijn door den Straatsburger hoogleeraar TH. REYE het eerst genoemd in zijn bekend werk: *Geometrie der Lage*, en daarna door hem behandeld in CRELLE's *Journal*, Bd. 86, in zijn *Systematische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsystemen*, en in de *Acta Mathematica*, T. 1.

Schr. begint met de bepaling van zulk eene vlakke configuratie, en de nomenclatuur, die door KANTOR, SCHOENFLIES, AMESEDER, allengs daarbij werd ingevoerd ter verduidelijking en vereenvoudiging; — en behandelt dan, als punt van uitgang de configuratie $(12_4, 16_3)$, gevormd door de twaalf gelijkvormigheidspunten van vier cirkels.

Hij bewijst, dat die configuratie is samengesteld uit drie quadrupels, in iedere waarvan elk drietal punten de restfiguur van het vierde punt is, en daarop, dat omgekeerd elke configuratie $(12_4, 16_3)$, welke uit drie zoodanige qua-

drupels samengesteld is, tot een in vorm bepaald stel van vier cirkels behoort. Van deze configuratie leert hij onderscheidene merkwaardige eigenschappen, in verband met de theorie der volkomen vierhoeken en vierzijden — en komt eerst tot de configuratië $(15_4, 20_3)$, die op bepaalde wijze met de eerste samenhangt, — en later tot de (geassocieerde) configuratie $(12_4, 16_3)$, die met de eerste de hoekpuntslijnen gemeen heeft, en weder tot de gelijksoortige configuratie $(15_4, 20_3)$ voert. De hoekpunten van twee zoodanige geassocieerde configuratiën vormen met de achttien hoekpuntslijnen eene nieuwe configuratie $(24_3, 18_4)$.

Door de punten van vier der quadrupels dezer configuratie en het gemeenschappelijk nevenhoekpunt der beide overige quadrupels wordt eene kromme der vierde orde K_4 bepaald.

Door de punten eener regelmatige configuratie $(12_4, 16_3)$ gaat steeds eene kromme der derde orde K_3. En van deze worden dan merkwaardige betrekkingen met de configuratie aangetoond.

In de laatste paragrafen wordt in hoofdzaak eene configuratie $(12_4, 16_3)$, van anderen aard dan de voorgaande, onderzocht, en worden hiervoor nieuwe eigenschappen afgeleid met betrekking tot eene eentakkige, en tot den oneven tak eener tweetakkige kromme der derde orde.

Met eene nadere opsomming der uitkomsten willen wij de Afdeeling niet lastig vallen, maar merken alleen op, dat zij merkwaardig zijn, en door eene eenvoudige, heldere methode worden gevonden. En daarom aarzelen wij ook geenzins de Afdeeling aanteraden, dit stuk in hare werken optenemen, waarin het de plaatsing volkomen verdient.

Leiden en Hilversum,
20 en 19 Maart 1888.

D. BIERENS DE HAAN,

F. J. VAN DEN BERG.

OVER VLAKKE CONFIGURATIES,

DOOR

J. DE VRIES.



1 Eene configuratie (p_m, l_n) is eene vlakke figuur, welke uit p punten en l rechte lijnen zoodanig is samengesteld, dat met elk punt m lijnen en met elke lijn n punten incident zijn *). Om de verschillende, collineair niet verwante, configuraties, welke bij vier bepaalde waarden van p, m, l, n behooren, van elkander te onderscheiden, kan men vaak met vrucht gebruik maken van de restfiguren †). De restfiguur van een punt der cf. ontstaat, wanneer men de in dat punt samenkomende lijnen met de op hen gelegen punten der cf. afzondert; zij wordt gevormd door de overgebleven punten en de lijnen der cf., welke minstens twee dezer punten bevatten. Eene cf. heet regelmatig §), wanneer zij ten opzichte van al haar punten en lijnen op gelijksoortige wijze is samengesteld. Eene lijn, welke twee punten der cf. verbindt zonder tot haar te behooren, heet diagonaal **): de door haar vereenigde punten worden gescheiden ††) punten genoemd. Het uitgangspunt der volgende beschouwingen is eene door de gelijkvormigheidspunten van vier cir-

*) REYE, das Problem der Configurationen, *Acta Math.*, I.

†) KANTOR, die Conf. $(3, 3)_{10}$, *Wiener Sitzber.*, Bd. 84.

§) SCHOENFLIES, Ueber einige ebene Conf., *Nachr. d. Kön. Ges. d. Wiss.* Göttingen, N°. 14, 1887.

**) REYE, Die Hexaeder und Oktaeder Cf., *Acta Math.*, I.

††) SCHOENFLIES, l. c.

kels gevormde cf. (12_4, 16_3), welke in de theorie der krommen van de derde orde en der krommen van de vierde orde met twee of drie dubbelpunten een groote rol speelt *).

2. De 12 gelijkvormigheidspunten, welke vier cirkels 2 aan 2 bepalen en de 16 gelijkvormigheidsassen, op welke zij in drietallen gelegen zijn, vormen eene (12_4, 16_3). Stellen u_{12} en i_{12} het uitwendige en het inwendige gelijkvormigheidspunt der cirkels 1 en 2 voor, dan bevat de volgende tabel de verdeeling der 12 cf. punten over de 16 cf. lijnen.

u_{12}	u_{13}	u_{23}	u_{34}	u_{13}	u_{14}	i_{12}	i_{13}	u_{23}	i_{34}	i_{13}	u_{14}	
u_{12}	i_{13}	i_{23}	u_{34}	i_{13}	i_{14}	i_{12}	u_{13}	i_{23}	i_{34}	u_{13}	i_{14}	. .(A).
u_{12}	u_{14}	u_{24}	u_{34}	u_{23}	u_{24}	i_{12}	i_{14}	u_{24}	i_{34}	i_{23}	u_{24}	
u_{12}	i_{14}	i_{24}	u_{34}	i_{23}	i_{24}	i_{12}	u_{14}	i_{24}	i_{34}	u_{23}	i_{24}	

De punten u_{34} i_{12} i_{34}, welke niet gelegen zijn op de in u_{12} samenkomende lijnen, zijn »gescheiden" punten; zij vormen dus met u_{12} een gesloten groep, waarin elk drietal punten de rol van restfiguur van het vierde punt vervult. De cf. bestaat uit drie zulke kwadrupels, en behoort blijkbaar tot de regelmatige.

Elke (12_4, 16_3) waarvoor de verdeeling der cf. punten over de cf. lijnen door tabel A kan voorgesteld worden, kan uit vier cirkels worden afgeleid, waarvan de middelpunten en de verhoudingen der stralen door de cf. gegeven zijn. Immers worden de drie paren overstaande hoekpunten van eene tot de cf. behoorende volledige vierzijde door u_{12} i_{12}, u_{13} i_{13}, u_{23} i_{23} aangewezen en de drie snijpunten der diagonalen m_1 m_2 m_3 genoemd, dan geeft de stelling van de Ceva

$$u_{12}\,m_1 \times u_{23}\,m_2 \times u_{13}\,m_3 = u_{12}\,m_2 \times u_{23}\,m_3 \times u_{13}\,m_1,$$

en deze vergelijking is niet in strijd met

---

*) Ameseder, Conf u. Polygone auf biquadr. Curven., *Wiener Sitz. ber*, Bd. 93.

$$u_{12}\, m_1 : u_{12}\, m_2 = r_1 : r_2$$
$$u_{23}\, m_2 : u_{23}\, m_3 = r_2 : r_3$$
$$u_{13}\, m_3 : u_{13}\, m_1 = r_3 : r_1.$$

3. Worden de kwadrupels eener $(12_4, 16_3)$ door de letters $a_i\ b_i\ c_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ onderscheiden, dan kan tabel A door het volgende overzicht vervangen worden.

$a_1\ b_1\ c_1$	$a_2\ b_1\ c_2$	$a_3\ b_1\ c_3$	$a_4\ b_1\ c_4$
$a_1\ b_2\ c_2$	$a_2\ b_2\ c_1$	$a_3\ b_2\ c_4$	$a_4\ b_2\ c_3$
$a_1\ b_3\ c_3$	$a_2\ b_3\ c_4$	$a_3\ b_3\ c_1$	$a_4\ b_3\ c_2$
$a_1\ b_4\ c_4$	$a_2\ b_4\ c_3$	$a_3\ b_4\ c_2$	$a_4\ b_4\ c_1$

. . . (B).

Hieruit blijkt, dat a_1 het gemeenschappelijk hoekpunt is van 6 volledige vierzijden, in welke elk der punten $a_2\ a_3\ a_4$ tweemaal als overstaand hoekpunt van a_1 voorkomt. De cf. bestaat dus uit 12 volledige vierzijden en, in verband daarmede, uit 48 driezijden.

De lijn $a_1\ b_1\ c_1$ wordt in de punten $a_1\ b_1\ c_1$ door 9 andere cf lijnen gesneden; de overige 6 lijnen, namelijk

$a_2\ b_3\ c_4$		$a_2\ b_4\ c_3$
$a_3\ b_4\ c_2$	en	$a_3\ b_2\ c_4$
$a_4\ b_2\ c_3$		$a_4\ b_3\ c_2$

. . . . . . (C)

vormen eene $(9_2, 6_3)$.

Elk der beide afzonderlijk geschreven drietallen van lijnen bevat de 9 punten $a\ b\ c$; deze kunnen dus als de basis van een krommenbundel der derde orde beschouwd worden.

4. Daar $b_2\ c_2$ en $b_3\ c_3$ in a_1, $a_2\ c_2$ en $a_3\ c_3$ in b_1, $a_2\ b_2$ en $a_3\ b_3$ in c_1 samenkomen, liggen de cf. driehoeken $a_2\ b_2\ c_2$, $a_3\ b_3\ c_3$ collineair ten opzichte van $a_1\ b_1\ c_1$ als as en het punt $\delta_4 \equiv (a_2\ a_3,\ b_2\ b_3,\ c_2\ c_3)$ als centrum. Op dezelfde wijze blijkt, dat de „diagonalen" $a_2\ a_4$, $b_2\ b_4$, $c_2\ c_4$ naar een punt δ_3, $a_3\ a_4$, $b_3\ b_4$, $c_3\ c_4$ naar δ_2 convergeren. Nu is c_1 als snijpunt van $a_2\ b_2$, $a_3\ b_3$, $a_4\ b_4$ het collineatiecentrum der diagonaaldriehoeken $a_2\ a_3\ a_4$, $b_2\ b_3\ b_4$; dus

zijn δ_2 δ_3 δ_4 als snijpunten van overeenkomstige zijden incident met de collineatieas dier driehoeken, die tevens de collineatieas is voor de driehoeken a_2 a_3 a_4, c_2 c_3 c_4 met centrum b_1 en b_2 b_3 b_4, c_2 c_3 c_4 met centrum a_1.

„Elke lijn is de gemeenschappelijke collineatieas van drie „cf. driehoeken, waarvan de drie collineatiecentra gelegen „zijn in eene rechte, die tevens de gemeenschappelijke colli-„neatieas van drie uit dezelfde negen hoekpunten gevormde „diagonaaldriehoeken is, wier collineatiecentra met de ge-„noemde cf. lijn incident zijn."

Anders uitgedrukt:

„Elke cf. lijn behoort met de 9 op haar samenkomen-„de cf. lijnen, de 9 diagonalen, die haar niet in cf. pun-„ten snijden, en de verbindingslijn der drie punten, in „welke deze diagonalen in drietallen samenkomen, tot eene „$(15_4, 20_3)$, waarin elk punt eene volledige vierzijde tot „restfiguur heeft."

De $(15_4, 20_3)$, waartoe a_1 b_1 c_1 aanleiding geeft, bestaat uit de lijnen:

	a_1 b_2 c_2	a_1 b_3 c_3	a_1 b_4 c_4	
a_1 b_1 c_1	a_2 b_2 c_1	a_3 b_3 c_1	a_4 b_4 c_1	
	a_2 b_1 c_2	a_3 b_1 c_3	a_4 b_1 c_4	
				. . . (D.).
	δ_2 a_3 a_4	δ_2 b_3 b_4	δ_2 c_3 c_4	
δ_2 δ_3 δ_4	δ_3 a_2 a_4	δ_3 b_2 b_4	δ_3 c_2 c_4	
	δ_4 a_2 a_3	δ_4 b_2 b_3	δ_4 c_2 c_3	

Uit deze rangschikking blijkt, dat de lijnen a_1 b_1 c_1 en δ_2 δ_3 δ_4 met elk der nevens hen geschreven drietallen eene volledige vierzijde vormen. Met het oog hierop kunnen de 20 cf. lijnen tot 10 paren gebracht worden. Elke der 15 volledige vierzijden, welke in de cf. voorkomen, is de restfiguur van het snijpunt der 4 lijnen, welke de zijden der volledige vierzijde tot paren aanvullen.

5. Met behulp van de notatie $(a_k\, a_l,\ b_1\, b_i,\ c_1\, c_i) = \alpha_i$, $(a_1\, a_i,\ b_k\, b_l,\ c_1\, c_i) = \beta_i$, $(a_1\, a_i,\ b_1\, b_i,\ c_k\, c_l) = \gamma_i$, (waar

$i = 2, 3, 4$), geeft de volgende tabel eene samenstelling van de 16 cf. lijnen der $(12_4, 16_3)$ met de cf. driehoeken, waarvan zij de collineatieassen zijn en de overeenkomstige collineatiecentra; elke regel bevat de 15 punten eener cf. $(15_4, 20_3)$.

Cf. lijnen.	Cf. driehoeken.			Coll. centra.
$a_1\, b_1\, c_1$	$a_2\, b_2\, c_2$	$a_3\, b_3\, c_3$	$a_4\, b_4\, c_4$	$\delta_4\, \delta_2\, \delta_3$
$a_1\, b_2\, c_2$	$a_2\, b_1\, c_1$	$a_3\, b_4\, c_4$	$a_4\, b_3\, c_3$	$\alpha_4\, \alpha_3\, \delta_2$
$a_1\, b_3\, c_3$	$a_2\, b_4\, c_4$	$a_3\, b_1\, c_1$	$a_4\, b_2\, c_2$	$\alpha_4\, \alpha_2\, \delta_3$
$a_1\, b_4\, c_4$	$a_2\, b_3\, c_3$	$a_3\, b_2\, c_2$	$a_4\, b_1\, c_1$	$\delta_4\, \alpha_2\, \alpha_3$
$a_2\, b_1\, c_2$	$a_1\, b_2\, c_1$	$a_3\, b_4\, c_3$	$a_4\, b_3\, c_4$	$\beta_3\, \delta_2\, \beta_4$
$a_2\, b_2\, c_1$	$a_1\, b_1\, c_2$	$a_3\, b_3\, c_4$	$a_4\, b_4\, c_3$	$\gamma_3\, \delta_2\, \gamma_4$
$a_2\, b_3\, c_4$	$a_1\, b_4\, c_3$	$a_3\, b_2\, c_1$	$a_4\, b_1\, c_2$	$\beta_3\, \alpha_2\, \gamma_4$ . . (E)
$a_2\, b_4\, c_3$	$a_1\, b_3\, c_4$	$a_3\, b_1\, c_2$	$a_4\, b_2\, c_1$	$\gamma_3\, \alpha_2\, \beta_4$
$a_3\, b_1\, c_3$	$a_1\, b_3\, c_1$	$a_2\, b_4\, c_2$	$a_4\, b_2\, c_4$	$\beta_2\, \delta_3\, \beta_4$
$a_3\, b_2\, c_4$	$a_1\, b_4\, c_2$	$a_2\, b_3\, c_1$	$a_4\, b_1\, c_3$	$\beta_2\, \alpha_3\, \gamma_4$
$a_3\, b_3\, c_1$	$a_1\, b_1\, c_3$	$a_2\, b_2\, c_4$	$a_4\, b_4\, c_2$	$\gamma_2\, \delta_3\, \gamma_4$
$a_3\, b_4\, c_2$	$a_1\, b_2\, c_4$	$a_2\, b_1\, c_3$	$a_4\, b_3\, c_1$	$\gamma_2\, \alpha_3\, \beta_4$
$a_4\, b_1\, c_4$	$a_1\, b_4\, c_1$	$a_2\, b_3\, c_2$	$a_3\, b_2\, c_3$	$\beta_2\, \delta_4\, \beta_3$
$a_4\, b_2\, c_3$	$a_1\, b_3\, c_2$	$a_2\, b_4\, c_1$	$a_3\, b_1\, c_4$	$\beta_2\, \alpha_4\, \gamma_3$
$a_4\, b_3\, c_2$	$a_1\, b_2\, c_3$	$a_2\, b_1\, c_4$	$a_3\, b_4\, c_1$	$\gamma_2\, \alpha_4\, \beta_3$
$a_4\, b_4\, c_1$	$a_1\, b_1\, c_4$	$a_2\, b_2\, c_3$	$a_3\, b_3\, c_2$	$\gamma_2\, \delta_4\, \gamma_3$

De 12 collineatiecentra $\alpha_i\ \beta_i\ \gamma_i\ \delta_i$ vormen met de 16 lijnen, op welke zij in drietallen gelegen zijn, eene cf. $(12_4, 16_3)$, die met de cf. $a_i\, b_i\, c_i$ gelijksoortig is. Immers, door α_4 gaan 4 lijnen, die achtereenvolgens de punten $\beta_3\, \gamma_2$, $\beta_2\, \gamma_3$, $\alpha_3\, \delta_2$, $\alpha_2\, \delta_3$ bevatten, terwijl de drie overige punten

$\beta_4\ \gamma_4\ \delta_4$ gescheiden zijn; elk viertal punten $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ met gelijke indices vormt een kwadrupel der nieuwe $(12_4\ ,\ 16_3)$, die de geassocieerde cf. zal genoemd worden.

In de volledige vierzijde $a_1\,a_2$, $b_1\,b_2$, $c_1\,c_2$ worden de hoekpunten $a_1\,a_2$ door $\gamma_2 \equiv (a_1\,a_2\,,\ b_1\,b_2)$ en $\beta_2 \equiv (a_1\,a_2\,,\ c_1\,c_2)$ harmonisch gescheiden. De 18 diagonalen der oorspronkelijke cf. geven dienovereenkomstig de in tabel (F) vereenigde harmonische groepen.

$a_1\ a_2\ \beta_2\ \gamma_2$	$b_1\ b_2\ \alpha_2\ \gamma_2$	$c_1\ c_2\ \alpha_2\ \beta_2$	
$a_1\ a_3\ \beta_3\ \gamma_3$	$b_1\ b_3\ \alpha_3\ \gamma_3$	$c_1\ c_3\ \alpha_3\ \beta_3$	
$a_1\ a_4\ \beta_4\ \gamma_4$	$b_1\ b_4\ \alpha_4\ \gamma_4$	$c_1\ c_4\ \alpha_4\ \beta_4$	. . (F.)
$a_2\ a_3\ \alpha_4\ \delta_4$	$b_2\ b_3\ \beta_4\ \delta_4$	$c_2\ c_3\ \gamma_4\ \delta_4$	
$a_2\ a_4\ \alpha_3\ \delta_3$	$b_2\ b_4\ \beta_3\ \delta_3$	$c_2\ c_4\ \gamma_3\ \delta_3$	
$a_3\ a_4\ \alpha_2\ \delta_2$	$b_3\ b_4\ \beta_2\ \delta_2$	$c_3\ c_4\ \gamma_2\ \delta_2$	

Evenals bij de cf. $a_i\ b_i\ c_i$ onder 4 is geschied, kan gemakkelijk aangetoond worden, dat $\delta_2\ \delta_3\ \delta_4$ de gem: collineatieas der driehoekeu $\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$, $\beta_2\ \beta_3\ \beta_4$, $\gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4$ is, terwijl de diagonaaldriehoeken $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$, $\alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3$, $\alpha_4\ \beta_4\ \gamma_4$ de lijn $a_1\ b_1\ c_1$ tot gem: collineatieas hebben, zoodat de punten $\alpha_i\ \beta_i\ \gamma_i\ \delta_i\ a_1\ b_1\ c_1$ eene met de boven gevondene gelijksoortige cf. $(15_4,\ 20_3)$ vormen. De lijnen $a_1\ b_1\ c_1$ en $\delta_2\ \delta_3\ \delta_4$ zijn dus door eene wederkeerige betrekking verbonden.

„Twee geassocieërde cf. $(12_4,\ 16_3)$ hebben de diagonalen „gemeen, en vormen op deze harmonische groepen. In elk „der 24 punten komen drie diagonalen samen; elke der „32 lijnen behoort met de punten der andere cf. tot eene „$(15_4,\ 20_3)$, waarin zij met eene bepaalde lijn der tweede cf. „nauwer verbonden is."

6. De lijnen der tweede cf. $(12_4,\ 16_3)$, welke in tabel (E) overeenkomen met vier door een punt der eerste cf. gaande cf. lijnen, vormen eene volledige vierzijde. De beide cf. $(9_2,\ 6_3)$, welke de restfiguren van twee overeenkomstige lijnen der beide cf. vormen, bestaan, zooals uit (E) volgt, uit overeenkomstige lijnen.

„De hoekpunten van twee geassocieërde (12_4, 16_3) vormen „met de 18 gemeenschappelijke diagonalen eene cf. (24_3, 18_4) „die uit twee groepen van drie volledige vierhoeken zoodanig „is samengesteld, dat elke vierhoek der eene groep met elken „vierhoek der andere een nevenhoekpunt *) gemeen heeft."

Elk der 6 kwadrupels, uit welke de cf. (24_3, 18_4) bestaat, bepaalt een volledigen vierhoek; het snijpunt der lijnen $a_1\ a_2\ \beta_2\ \gamma_2$ en $a_3\ a_4\ \alpha_2\ \delta_2$ is b. v. het gemeenschappelijke nevenhoekpunt der vierhoeken $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ en $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2\ \delta_2$. Uit tabel (F) kan verder afgeleid worden, dat de 8 cf. lijnen der (24_3, 18_4), welke $a_1\ a_2\ \beta_2\ \gamma_2$ in cf. punten snijden, ook op $a_3\ a_4\ \alpha_2\ \delta_2$ samenkomen; de overige 8 vormen eene (16_2, 8_4), waarvan de punten als de basis van een krommenbundel der vierde orde kunnen beschouwd worden, daar zij de snijpunten zijn van twee uit rechten samengestelde K_4, n.l.

$b_1\ b_3\ \alpha_3\ \gamma_3$	$b_1\ b_4\ \alpha_4\ \gamma_4$		
$b_2\ b_4\ \beta_3\ \delta_3$	$b_2\ b_3\ \beta_4\ \delta_4$		
$c_1\ c_4\ \alpha_4\ \beta_4$	$c_1\ c_3\ \alpha_3\ \beta_3$	. . . . .	(G.)
$c_2\ c_3\ \gamma_4\ \delta_4$	$c_2\ c_4\ \gamma_3\ \delta_3$		

„Door het gemeenschappelijke nevenhoekpunt van twee „kwadrupels der (24_3, 18_4) en de punten der overige vier „kwadrupels gaat eene kromme K_4".

7. De hoekpunten der volledige vierzijden $a_1\ a_2\ b_1\ b_2\ c_1\ c_2$, $a_1\ a_4\ b_2\ b_3\ c_2\ c_3$ bepalen eene kromme K_3; op haar behooren $a_1\ a_2\ a_4$, $b_1\ b_2\ b_3$, $c_1\ c_2\ c_3$ tot drie puntkwadrupels. †) Daar de corresponderende punten $b_1\ b_3$ uit a_1 in de corresponderende punten $c_1\ c_3$ geprojecteerd worden, zijn ook $a_3 \equiv (b_1\ c_3,\ b_3\ c_1)$ en a_1 correspondeerende punten. §) Om

*) Het snijpunt van twee overstaande zijden van een volledigen vierhoek wordt nevenhoekpunt genoemd.

†) Een puntkwadrupel op K_3 bestaat uit 4 punten met gemeenschappelijk tangentiaalpunt. Zie Durège, die ebenen Curven 3ter Ordnung, blz. 207.

§) l. c. blz. 209.

dezelfde reden vormen $b_4 \equiv (a_4\, c_1,\ a_2\, c_3)$ en $c_4 \equiv (a_2\, b_3,\ a_4\, b_1)$ met b_2 resp. c_2 twee paren corresponderende punten.

»Door de punten eener $(12_4, 16_3)$ gaat steeds eene twee-»takkige kromme der derde orde; de cf. bestaat uit drie »puntkwadrupels met collineaire tangentiaalpunten."

»Eene cf. $(12_4, 16_3)$ is volkomen bepaald door twee vol-»ledige vierzijden, welke eene zijde en de daarop gelegen »hoekpunten gemeen hebben, mits de overstaande hoekpun-»ten tot hetzelfde kwadrupel worden gerekend."

Kent men bijv. $a_3\, b_1\, c_3$, $a_3\, b_3\, c_1$, $a_3\, b_2\, c_4$, dan bepalen $a_1 \equiv (b_1\, c_1,\ b_3\, c_3)$ en $a_2 \equiv (b_2\, c_1,\ b_3\, c_4)$ met de 7 gegeven punten de K_3, welke door de punten der cf. gaat; voor de ontbrekende punten heeft men

$$a_4 \equiv (b_2\, c_3,\ b_1\, c_4),\ b_4 \equiv (a_2\, c_3,\ a_4\, c_1),\ c_2 \equiv (a_1\, b_2,\ a_2\, b_1).$$

Daar

$$p_2 \equiv (a_1\, a_2,\ a_3\, a_4),\ p_3 \equiv (a_1\, a_3,\ a_2\, a_4),\ p_4 \equiv (a_1\, a_4,\ a_2\, a_3)$$

met het tangentiaalpunt p_1 van a_i een puntkwadrupel vormen *), gaat de door $(12_4\,,\ 16_3)$ bepaalde K_3 ook door de 9 nevenhoekpunten der kwadrupels $a_i\, b_i\, c_i$. De cf. is dus, in het algemeen, ook bepaald door een kwadrupel en twee punten; de 6 punten en 3 nevenhoekpunten van het gegeven kwadrupel zijn alleen dan niet toereikende voor de constructie der cf., wanneer de kegelsneden, welke het kwadrupel met de beide andere punten verbinden, door de verbindingslijn dier punten, worden aangeraakt †).

8. Daar de nevenhoekpunten der kwadrupels eener $(12_4, 16_3)$, in andere volgorde genomen, de nevenhoekpunten der geassociëerde cf. zijn, behooren zij tot de beide krommen K_3, welke door de twee cf. bepaald worden. Stelt men

$$(a_1\, a_i, a_k\, a_l) \equiv p_i,\ (b_1\, b_i, b_k\, b_l) \equiv q_i,\ (c_1\, c_i, c_k\, c_l) \equiv r_i\ (i = 2, 3, 4)$$

---

*) DURÈGE, l. c. blz. 214 of 227.

†) DURÈGE, l. c. blz. 230. Ook kan men raadplegen WEYR, Zur Erzeugung der Curven 3. O. *Wiener Sitz. ber.* Bd. 58.

dan zijn, blijkens tabel (F) r_2, q_2, p_2 de nevenhoekpunten van $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \delta_2$, $r_3 q_3 p_3$ en $r_4 q_4 p_4$ resp. de nevenhoekpunten van $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \delta_3$ en $\alpha_4 \beta_4 \gamma_4 \delta_4$. De punten $p_i q_i r_i$ vormen met de tangentiaalpunten $p_1 q_1 r_1$ der kwadrupels a_i, b_i, c_i eene $(12_4, 16_3)$, met de tangentiaalpunten t_i der kwadrupels $(\alpha_i \beta_i \gamma_i \delta_i)$ eene tweede $(12_4, 16_3)$. De restfiguren $(9_2, 6_3)$ der cf. lijnen $p_1 q_1 r_1$ en $t_2 t_3 t_4$ kunnen niet verschillen, daar de 9 nevenhoekpunten geen bestaanbare $(9_4, 12_3)$ kunnen vormen *); inderdaad bestaat de restfiguur voor beide lijnen uit:

$$\begin{matrix} p_2 q_3 r_4, & p_3 q_4 r_2, & p_4 q_2 r_3 \\ p_2 q_4 r_3, & p_3 q_2 r_4, & p_4 q_3 r_2 \end{matrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(H)}$$

De overige 20 lijnen der beide $(12_4, 16_3)$ zijn, met het oog op tabel (B),

$p_1 q_1 r_1$	$t_2 p_3 p_4$	
$p_1 q_2 r_2$	$t_2 q_3 q_4$	
$p_1 q_3 r_3$	$t_2 r_3 r_4$	
$p_1 q_4 r_4$	$t_3 p_2 p_4$	
$p_2 q_1 r_2$	$t_3 q_2 q_4$	.... (I)
$p_2 q_2 r_1$	$t_3 r_2 r_4$	
$p_3 q_1 r_3$	$t_4 p_2 p_3$	
$p_3 q_3 r_1$	$t_4 q_2 q_3$	
$p_4 q_1 r_4$	$t_4 r_2 r_3$	
$p_4 q_4 r_1$	$t_2 t_3 t_4$	

Zij vormen, met de 15 op hen gelegen punten, eene cf.

---

*) Worden van eene $(9_4, 12_3)$ een punt en de 4 in dat punt samenkomende lijnen weggelaten, dan ontstaat eene cf. 8_3, welke niet bestaanbaar is (KANTOR, Ueber die Conf. (3,3) mit den Indices 8,9. *Wiener Sitzber.* Bd. 84).

(15_4, 20_3), die collineair verwant is met de onder 4 gevonden cf., omdat, zooals gemakkelijk uit tabel (I) wordt afgeleid, elk cf. punt eene volledige vierzijde tot restfiguur heeft.

»Door de 9 nevenhoekpunten der puntkwadrupels, welke »bij 3 collineaire tangentiaalpunten eener K_3 behooren, wor»den twee cf. (12_4, 16_3) bepaald, welke eene cf. (9_2, 6_3) »gemeen hebben; de niet gemeenschappelijke lijnen behooren »tot eene cf. (15_4, 20_3)."

9. De bovengenoemde (15_4, 20_3) komt dualistisch overeen met de cf. (20_3, 15_4), welke door de 15 machtlijnen en 20 machtpunten van 6 cirkels gevormd wordt. Immers, worden de machtlijnen der cirkels 1 2 3 4 5 6 aangeduid door

12	23	34	45	56	
13	24	35	46		
14	25	36			. . . . . . (K)
15	26				
16					

dan wordt 12 door de lijnen 13, 23; 14, 24; 15, 25; 16, 26 in de machtpunten 123, 124, 125, 126 gesneden, terwijl de paren 35, 45 en 36, 46 in de op 34 gelegen punten 345, 346, en in de tot 56 behoorende punten 356, 456 samenkomen; de restfiguur van 12 is dus een volledige vierhoek, welke reciprook overeenkomt met de volledige vierzijde, die als restfiguur van elk punt der (15_4, 20_3) werd opgemerkt.

Tabel (K) levert nu tevens eene geschikte notatie voor de 15 punten eener (15_4, 20_3) waarvan alle punten volledige vierzijden tot restfiguren hebben; de 20 lijnen der cf. kunnen dan door de teekens 123, 124, ... 456 worden voorgesteld. Met behulp van deze schrijfwijze vindt men:

»Elke lijn der beschouwde regelmatige (15_4, 20_3) vormt »met de 9 lijnen, welke haar in cf. punten ontmoeten, drie »volledige vierzijden, terwijl de overige 10 cf. lijnen even»eens drie volledige vierzijden met eene gemeenschappelijke »zijde opleveren."

Voorbeeld.

123	123	123	456	456	456
124	125	126	356	256	156
134	135	136	345	245	145
234	235	236	346	246	146

De lijnen der cf. kunnen dus tot 10 paren van „geassociëerde" lijnen gebracht worden. Daar de in 12 samenkomende lijnen 123, 124, 125, 126 door 456, 356, 346, 345 tot paren worden aangevuld, bestaat de restfiguur van elk cf. punt uit de geassociëerden der met dat punt incidente cf. lijnen.

Op dezelfde wijze als in 4 kan nu aangetoond worden, dat elke cf. lijn de gemeenschappelijke collineatieas van 3 cf. driehoeken is, waarvan de collineatiecentra met de geassociëerde lijn incident zijn. Zoo is 123 de collineatieas der driehoeken (14, 24, 34), (15, 25, 35), (16, 26, 36), met de collineatiecentra 45, 56, 46, terwijl omgekeerd 456 de collineatieas van (14, 15, 16), (24, 25, 26), (34, 35, 36) met de centra 12, 23, 13 is. In verband hiermede blijkt nu, dat de in 4 afgeleide $(15_4, 20_3)$ eene bizondere cf. is; immers, wanneer de 12 punten 12, 23, 13; 14, 24, 34; 15, 25, 35; 16, 26, 36 tot eene $(12_4, 16_3)$ behoorden, zouden o. a. de punten 35, 24, 16 collineair moeten zijn, hetgeen, met het oog op de reciproke cf. der machtpunten en machtlijnen van 6 cirkels, in het algemeen niet waar is.

„De bovenbesproken regelmatige $(15_4, 20_3)$ is volkomen bepaald door drie volledige vierzijden, welke drie collineaire hoekpunten gemeen hebben."

De cf. $(15_4, 20_3)$ kan nog uit een ander oogpunt beschouwd worden. Elk van haar punten, b. v. 12, is het gemeenschappelijk collineatiecentrum van 4 paar driehoeken

23, 24, 25 en 13, 14, 15 met collineatieas 345
23, 24, 26 en 13, 14, 16 met collineatieas 346
23, 25, 26 en 13, 15, 16 met collineatieas 356
24, 25, 26 en 14, 15, 16 met collineatieas 456.

De cf. is dus ook bepaald door twee volledige vierhoeken, waarvan de hoekpunten op vier in een punt samenkomende lijnen liggen. De 12 punten en 16 lijnen der $(12_4, 16_3)$ geven dus aanleiding tot 28 cf. $(15_4, 20_3)$.

10. Liggen de hoekpunten a_{12} a_{34}, b_{12} b_{34}, c_{12} c_{34} eener volledige vierzijde op een eentakkige kromme der derde orde of op den oneven tak eener tweetakkige K_3, dan behooren de 6 paren a_1 a_2, a_3 a_4, b_1 b_2, b_3 b_4, c_1 c_2, c_3 c_4, welke de genoemde hoekpunten tot tangentiaalpunten hebben (en voor het geval der tweetakkige K_3 op den oneven tak liggen) tot eene cf. $(12_4, 16_3)$, welke slechts 4 volledige vierzijden bevat, n.l.

a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2 met satelliet a_{12} b_{12} c_{12}
a_1 a_2, b_3 b_4, c_3 c_4 met satelliet a_{12} b_{34} c_{34}
a_3 a_4, b_1 b_2, c_3 c_4 met satelliet a_{34} b_{12} c_{34}
a_3 a_4, b_3 b_4, c_1 c_2 met satelliet a_{34} b_{34} c_{12}.

Deze cf. is dus niet gelijksoortig met de boven beschouwde $(12_4, 16_3)$ waarvan de lijnen 12 volledige vierzijden vormen; zij worde van de eerste, die A genoemd zal worden, onderscheiden door bijvoeging van de letter B.

Komen b_1 c_1, b_2 c_2, b_3 c_3, b_4 c_4 in a_1 samen, dan is a_2 het snijpunt van b_1 c_2 met b_2 c_1 en van b_3 c_4 met b_4 c_3; gaan verder b_1 c_3 en b_2 c_4 door a_3, dan moet a_3 b_3 het punt c_2 en a_3 b_4 het punt c_1 bevatten, daar a_3 en a_1, omdat zij niet hetzelfde tangentiaalpunt bezitten, niet de overstaande hoekpunten van eene volledige vierzijde kunnen zijn.

De volgende tabel geeft dus de verdeeling der 12 punten over de 16 lijnen der cf. $(12_4, 16_3)$ B.

a_1 b_1 c_1	a_2 b_1 c_2	a_3 b_1 c_3	a_4 b_1 c_4	
a_1 b_2 c_2	a_2 b_2 c_1	a_3 b_2 c_4	a_4 b_2 c_3	
a_1 b_3 c_3	a_2 b_3 c_4	a_3 b_3 c_2	a_4 b_3 c_1	. . . (L)
a_1 b_4 c_4	a_2 b_4 c_3	a_3 b_4 c_1	a_4 b_4 c_2	

Door permutatie der letters kan uit tabel (L) afgeleid worden, dat de cf., welke door (B) en (L) worden aange-

wezen, de eenigste (12_4, 16_3) zijn, welke drie kwadrupels van onderling gescheiden punten bezitten.

Daar de lijnen $b_1\ c_1$, $c_1\ b_4$, $b_4\ c_4$, $c_4\ b_2$, $b_2\ c_2$, $c_2\ b_3$, $b_3\ c_3$, $c_3\ b_1$ beurtelings door a_1 en a_3 gaan, zijn deze beide punten de hoofdpunten van eene STEINER'sche achtzijde *). Blijkbaar komen in de cf. nog 11 figuren van dien aard voor.

11. „Elke cf. (12_4, 16_3) waarvoor de verdeeling der pun„ten over de cf. lijnen door tabel (L) kan worden voorge„steld, bestaat uit 6 paren correspondeerende punten eener „K_3, waarvan de 6 tangentiaalpunten eene volledige vierzijde „vormen."

Immers op de K_3, welke door $a_1\ a_2$, $b_1\ b_2$, $c_1\ c_2$, $a_3\ b_3\ c_3$ gaat, zijn de eerste 6 punten drie correspondeerende paren met collineaire tangentiaalpunten $a_{12}\ b_{12}\ c_{12}$. Daar een correspondeerend paar uit elk punt der K_3 in een ander correspondeerend paar geprojecteerd wordt, en a_3 de projectie van b_1 uit c_3 en van c_2 uit b_3 is, zal het met a_3 correspondeerende punt uit c_3 in b_2 en uit b_3 in c_1 geprojecteerd worden, dus met a_4 samenvallen. Op dezelfde wijze blijkt, dat $b_4 \equiv (a_4\ c_2,\ a_3\ c_1)$ met $b_3 \equiv (a_4\ c_1,\ a_3\ c_2)$ en $c_4 \equiv (a_4\ b_1,\ a_3\ b_2)$ met $c_3 \equiv (a_4\ b_2,\ a_3\ b_1)$ een correspondeerend paar vormt. De tangentiaalpunten $a_{34}\ b_{34}\ c_{34}$ der laatste drie paren liggen twee aan twee resp. met $c_{12}\ a_{12}\ b_{12}$ collineair, zoodat de 16 lijnen der cf. (12_4, 16_3) B eene gemeenschappelijke tweede satelliet bezitten, n.l. de satelliet der zijden van de door de 6 tangentiaalpunten bepaalde vierzijde.

Hieruit volgt, dat de cf. B bepaald is door eene volledige vierzijde $a_1\ a_2$, $b_1\ b_2$, $c_1\ c_2$ en een driehoek $a_3\ b_3\ c_3$, waarvan de zijden $a_3\ b_3$, $b_3\ c_3$, $c_3\ a_3$ met drie niet collineaire hoekpunten der vierzijde incident zijn. De overige drie punten worden dan gevonden uit $a_4 \equiv (b_3\ c_1,\ b_2\ c_3)$, $b_4 \equiv (a_3\ c_1,\ a_2\ c_3)$, $c_4 \equiv (a_2\ b_3,\ a_3\ b_2)$. (zie tabel L).

12. De restfiguur van $a_1\ b_1\ c_1$ bevat de lijnen

$$\left\{\begin{matrix} a_2\ b_3\ c_4, & a_3\ b_2\ c_4, & a_4\ b_2\ c_3 \\ a_2\ b_4\ c_3, & a_3\ b_3\ c_2, & a_4\ b_4\ c_2 \end{matrix}\right\}$$

*) De STEINER'sche veelzijden werden o. a. behandeld door Dr. P. H. SCHOUTE in „Die STEINER'schen Polygone." J. v. CRELLE 95.

Zij bestaat uit twee driehoeken $a_4\ b_4\ c_3$ en $a_3\ b_3\ c_4$, waarvan de zijden twee aan twee in de niet collineair gelegen punten $c_2\ a_2\ b_2$ samenkomen, zoodat zij niet gelijksoortig is met de cf. $(9_2, 6_3)$, welke als restfiguur van elke lijn der cf. $(12_4, 16_3)$ A werdt opgemerkt. De beide genoemde restfiguren zijn de eenigste cf. $(9_2, 6_3)$, hetgeen men gemakkelijk kan aantoonen door uit te gaan van twee gescheiden cf. lijnen en te onderzoeken op welke wijzen de overige 4 lijnen door de 6 aangenomen punten kunnen gaan.

De punten $a_2\ b_3\ c_4$ worden uit $c_1\ a_1\ b_1$ in de collineaire punten $b_2\ c_3\ a_4$ geprojecteerd; de overige drie punten vormen een cf. driehoek. Daar elke lijn der cf. $(12_4, 16_3)$ B op deze wijze met elke lijn van haar restfiguur $(9_2, 6_3)$ B in verband gebracht kan worden, bevat de cf. 16 cf $(9_2, 6_3)$ A.

De voornaamste punten van verschil tusschen de beide $(12_4, 16_3)$ zijn in het volgende overzicht samengesteld.

A.	B.
1. De 12 punten vormen 3 puntkwadrupels van eene tweetakkige K_3; de drie tangentiaalpunten zijn collineair.	1. De 12 punten vormen 6 correspondeerende paren eener K_3; de tangentiaalpunten vormen eene volledige vierzijde.
2. Elk punt is als hoekpunt aan 6 volledige vierzijden gemeen.	2. Elk punt behoort tot 2 volledige vierzijden en als hoofdpunt tot 2 STEINER'sche achtzijden.
3. Elke lijn behoort tot 3 volledige vierzijden.	3. Elke lijn behoort tot 1 volledige vierzijde en tot 6 STEINER'sche achtzijden.
4. De restfiguur van elke cf. lijn is eene $(9_2, 6_3)$ A.	4. De restfiguur van elke cf. lijn is eene $(9_2, 6_3)$ B.
5. De cf. is bepaald door een driehoek, waarvan de zijden door 3 collineaire hoekpunten eener volledige vierzijde gaan.	5. De cf. is bepaald door een driehoek, waarvan de zijden door 3 niet collineaire hoekpunten eener volledige vierzijde gaan.
6. De cf. bevat 8 kwadru-	6. De cf. bevat geen kwa-

A.

pels van onderling gescheiden cf. lijnen. Door afzondering van zulk een kwadrupel ontstaat eene regelmatige cf. 12_3, welke als het samenstel van twee in elkander beschreven zeshoeken kan beschouwd worden.

B.

drupels, maar 32 tripels van onderling gescheiden cf. lijnen.

13. Behooren de hoekpunten $a_{12}\,a_{34}$, $b_{12}\,b_{34}$, $c_{12}\,c_{34}$ eener volledige vierzijde tot den oneven tak eener uit twee deelen bestaande K_3, dan vormen de 6 puntkwadrupels $a_1\,a_2\,\alpha_1\,\alpha_2$, $a_3\,a_4\,\alpha_3\,\alpha_4$, $b_1\,b_2\,\beta_1\,\beta_2$, $b_3\,b_4\,\beta_3\,\beta_4$, $c_1\,c_2\,\gamma_1\,\gamma_2$, $c_3\,c_4\,\gamma_3\,\gamma_4$ eene cf. $(24_8\,,\,64_3)$, welke samengesteld is uit de 4 cf. $(12_4\,,\,16_3)$ A, waarvoor de zijden der volledige vierzijde de satellieten zijn. Liggen de door grieksche letters aangewezen punten op het ovaal der K_3, dan bevat de $(24_8\,,\,64_3)$ de volgende cf. $(12_4\,,\,16_3)$ B:

$$a_1\,a_2\,,\ a_3\,a_4\,,\ b_1\,b_2\,,\ b_3\,b_4\,,\ c_1\,c_2\,,\ c_3\,c_4\,;$$
$$a_1\,a_2\,,\ \alpha_3\,\alpha_4\,,\ b_1\,b_2\,,\ \beta_3\,\beta_4\,,\ c_1\,c_2\,,\ \gamma_3\,\gamma_4\,;$$
$$a_1\,a_2\,,\ a_3\,a_4\,,\ \beta_1\,\beta_2\,,\ \beta_3\,\beta_4\,,\ \gamma_1\,\gamma_2\,,\ \gamma_3\,\gamma_4\,;$$
$$a_1\,a_2\,,\ \alpha_3\,\alpha_4\,,\ b_3\,b_4\,,\ \beta_1\,\beta_2\,,\ c_3\,c_4\,,\ \gamma_1\,\gamma_2\,;$$
$$\alpha_1\,\alpha_2\,,\ \alpha_3\,\alpha_4\,,\ b_1\,b_2\,,\ b_3\,b_4\,,\ \gamma_1\,\gamma_2\,,\ \gamma_3\,\gamma_4\,;$$
$$\alpha_1\,\alpha_2\,,\ \alpha_3\,\alpha_4\,,\ \beta_1\,\beta_2\,,\ \beta_3\,\beta_4\,,\ c_1\,c_2\,,\ c_3\,c_4\,;$$
$$\alpha_1\,\alpha_2\,,\ a_3\,a_4\,,\ b_1\,b_2\,,\ \beta_3\,\beta_4\,,\ c_3\,c_4\,,\ \gamma_1\,\gamma_2\,;$$
$$\alpha_1\,\alpha_2\,,\ a_3\,a_4\,,\ \beta_1\,\beta_2\,,\ b_3\,b_4\,,\ c_1\,c_2\,,\ \gamma_3\,\gamma_4\,.$$

Elk punt der $(24_8\,,\,64_3)$ is dus hoofdpunt van 8 Steiner'sche achtzijden, waarvan het andere hoofdpunt tweemaal samenvalt met elk der punten van het kwadrupel, waarvan het tangentiaalpunt met het tangentiaalpunt van het eerste hoofdpunt een corresponderend paar vormt. De cf. bevat dus 96 Steiner'sche achtzijden, en daar in elke $(12_4,\,16_3)$ B 12 zulke achtzijden voorkomen, zijn de bovengenoemde 8 cf. B de eenigste, welke uit de 6 kwadrupels kunnen gevormd worden.

De restfiguur van elke lijn L der cf. is eene $(21_6\,,\,42_3)$ bestaande uit eene $(9_2\,,\,6_3)$ A als restfiguur van L in de

$(12_4, 16_3)$ A waartoe die lijn behoort, en uit de figuren, welke uit de overige 3 cf. A gevormd worden door een punt van L met de 4 daarmede incidente lijnen weg te laten.

Daar elke diagonaal der door de 6 kwadrupels dezer $(24_8, 64_3)$ bepaalde volledige vierhoeken tot twee cf. $(12_4, 16_3)$ A behoort, bevat zij twee paar punten van geassociëerde cf. A, die elk met twee andere diagonalen incident zijn; de punten der 4 cf. A vormen dus met de punten der 4 geassociëerde cf. en de 36 diagonalen eene cf. $(72_3, 36_6)$, waarin op elke lijn twee punten door twee paren van punten harmonisch gescheiden worden.

VERSLAG

OVER DE

VERHANDELING VAN DEN HEER DR. V. A. JULIUS

„DE LINEAIRE SPECTRA DER ELEMENTEN".

(Uitgebracht in de Vergadering van 31 Maart 1888).



De Commissie, door U benoemd om verslag uit te brengen over de verhandeling van den Heer V. A. JULIUS, getiteld: *De lineaire spectra der elementen*, heeft de eer het volgende mede te deelen:

Voortdurend blijven bezwaren bestaan tegen de kinetische gastheorie, voornamelijk gelegen in het theorema van BOLTZMANN omtrent het arbeidsvermogen van een atoom. De schrijver merkt op, dat men de aanvaarding van dit theorema ontgaan kon door rekening te houden met de uitwisseling van vibratorisch arbeidsvermogen tusschen de moleculen en den aether. Daarvoor moet echter onze kennis van de vibratorische beweging der moleculen aanmerkelijk worden uitgebreid.

De studie der spectraallijnen schijnt daartoe de aangewezen weg en hiervoor levert de ingezonden arbeid eene belangrijke bijdrage.

Schrijver, die zich tot de lineaire spectra der elementen als de minst zamengestelde bepaalt, geeft in de eerste plaats een uitvoerig overzicht van het belangrijkste, dat op dit gebied door anderen is gevonden en gedacht. Hij doet daarna in de bedoelde richting een oorspronkelijk onderzoek, dat niet zonder resultaten is en van veel beteekenis blijkt,

Wat vooreerst de homologie betreft tusschen de spectraallijnen van verschillende elementen, merkte MASCART op, dat de zes hoofdlijnen van natrium alle dubbel zijn, terwijl hij in het magnesium bij het groen en ultra-violet dergelijke groepen vond; hij meende hier geen toevalligheid te moeten zien en die groepen van overeenkomstige lijnen te moeten vergelijken met boventonen.

Het uitvoerigst hield omstreeks 1869 LECOQ DE BOISBAUDRAN zich met dit onderwerp bezig; in drie mededeelingen aan de Fransche Akademie ontwikkelt bij eene moleculaire theorie, die van de spectraallijnen rekenschap moet geven, doch van vrij willekeurige onderstellingen uitgaat. Van meer gewicht zijn zijne waarnemingen en opmerkingen omtrent de spectra van kalium- en rubidium-chloruur, tusschen wier spectraallijnen hij verband opmaakt.

Later hield CIAMICIAN zich met het zoeken naar homologieën bezig; hij is echter op het punt van de alkalische metalen het niet eens met zijn voorganger; de metalen der alkalische aarden brengen hem in strijd met zich zelven.

Van meer belang zijn de resultaten van CORNU, die, nadat hij in 1871 had opgemerkt, dat niet alle spectraallijnen, afkomstig van eene gloeiende dampmassa van een of ander metaal, gelijk omgekeerd worden, in 1885 op dit ontwerp terugkwam en opmerkte, dat de lijngroepen, welke zich regelmatig herhalen, juist tot de spontaan omkeerbare lijnen behooren. Zij worden aan de meest breekbare zijde het dichtst bij elkander gevonden en nemen in die richting aan intensiteit af.

CORNU toonde aan, dat de door HUGGINS in het spectrum der witte sterren gevonden lijnen tot waterstof behooren en komt tot het besluit, dat in de spectra der metalen zekere reeksen van spontaan omkeerbare lijnen vrij wel dezelfde wetten volgen als de waterstoflijnen, zoodat de wijze van verdeeling over het spectrum door eene zelfde functie, de »function hydrogénique" zou uitgedrukt kunnen worden.

Van veel belang is eindelijk eene verhandeling van GRÜNWALD die in 1887 in de *Astron. Nachrichten* verscheen. Hij hield zich met de spectra van waterstof en waterdamp bezig

en heeft op grond van voorloopige resultaten eene reeks van golflengten opgemaakt, die in het spectrum van waterdamp zouden moeten voorkomen, maar nog niet waargenomen waren, en die werkelijk later gevonden zijn. GRÜNWALD heeft aan zijne onderzoekingen eene theorie vastgeknoopt, omtrent de chemische structuur der elementen waterstof en zuurstof.

Andere natuurkundigen hebben getracht eene betrekking te vinden tusschen de spectraallijnen van een zelfde element. Men tracht aan te toonen, dat de verschillende lijnen harmonisch tot eene zekere grondlijn zijn, analoog met de harmonische tonen, door eene snaar of orgelpijp voortgebracht. In 1871 werd door STONEY zelfs betoogd, dat eene dergelijke harmonische betrekking moet bestaan: daar toch de ather-verstoringen (die gewoonlijk als de oorzaken der spectraallijnen beschouwd worden) periodisch zijn, mag de aether-beweging als de superpositie van enkelvoudige trillende bewegingen worden aangezien, wier perioden, ingevolge het theorema van FOURIER, aan de harmonische reeks voldoen. Intusschen geldt deze redeneering slechts als de enkelvoudige trillingstijden, waaruit de zamengestelde beweging bestaat, onderling meetbaar zijn, en dit schijnt niet noodwendig. Men kan echter van de meening uitgaan, dat tusschen de lijnen van elk spectrum eene harmonische betrekking bestaat. STONEY vindt, dat de drie bekende waterstoflijnen de 20^e^, 27^e^ en 32^e^ harmonische boventoon van eene zelfde grondlijn zijn.

De lijn H, door HUGGINS in het spectrum der witte sterren gevonden, verhoudt zich tot de bekende waterstoflijn nabij G, als de 35^e^ tot de 32^e^ harmonische bovenlijn.

Om zijne theorie verder te toetsen, heeft STONEY met REYNOLDS een onderzoek ingesteld omtrent het absorptiespectrum van damp van chromylchloruur; zij bepaalden de golflengten voor 32 spectraallijnen en vonden voor het verschil tusschen de trillingsgetallen van twee achtervolgende lijnen steeds een zelfde getal; een zeer opvallend resultaat.

SCHUSTER maakte in 1879 eene bijzondere studie van het ijzerspectrum; 7 lijnen kunnen beschouwd worden als bo-

venlijnen van dezelfde grondlijn; bovendien bestaan nog andere merkwaardige betrekkingen tusschen de lijnen van dit metaal. In 1881 hervatte hij dit onderwerp en vroeg naar de waarschijnlijkheid, dat de verhouding van twee grootheden, die willekeurig tusschen twee vaste grenzen verbreid zijn, zamenvalt met eene gegevene breuk. Aan het antwoord op die vraag toetste hij het ijzerspectrum en kwam tot een in hoofdzaak negatief resultaat; hij twijfelt er wel niet aan, dat er eene wet is, die de verdeeling der spectraallijnen beheerscht, doch meent, dat die wel slechts in bijzondere gevallen overgaat in de wet der harmonische verhoudingen.

Later, in 1885, heeft BALMER zonder theoretische beschouwing naar de empirische formule gezocht, die de waterstoflijnen zou omvatten en vond daarvoor eeue zeer eenvoudige betrekking, waaraan de waarnemingen van HUGGINS en CORNU vrij goed voldoen. De formule heeft echter geene theoretische beteekenis, verklaart dus het verschijnsel niet.

Niet tevreden met het zoeken naar homologieën in de verschillende spectra, heeft men ook getracht eene voldoende theorie van het verschijnsel der spectraallijnen te geven. Hiertoe dienden o. a. de theoriën van STONEY, E. WIEDEMANN en SCHUSTER. Zij loopen tamelijk uiteen, zijn niet altijd voldoende duidelijk en leiden vooralsnog tot geen bevredigend resultaat.

Van meer belang zijn de bijzondere hypothesen, die tot de verklaring der spectraallijnen den weg banen.

Men kan bij de studie der lineaire spectra twee wegen inslaan: vooreerst kon men trachten empirische betrekkingen te vinden tusschen de golflengten der spectraallijnen van hetzelfde spectrum of tusschen die van verschillende spectra. CORNU meent, dat slechts op deze wijze resultaten te verkrijgen zijn. Doch de methode opent een onafzienbaar veld van getallen-combinatiën, waarin men zonder gids ronddoolt, en de kans, dat men de ware combinatie maakt, wordt uiterst gering. De straks genoemde physici BALMER en GRÜNWALD zijn de eenige, die hierbij op succes kunnen wijzen, al hebben hunne eenvoudige formules geen theoretische waarde.

Daarom schijnt den schrijver de tweede weg beter, dat men uitgaat van eene of andere hypothese en nagaat of zij in overeenstemming is met hetgeen de waarneming omtrent de spectraallijnen leert. Deze weg vordert echter zeer veel arbeid.

De eenvoudigste hypothese is, dat er tusschen de lijnen van hetzelfde spectrum harmonische verhoudingen bestaan. Alleen vaor het ijzerspectrum moest SCHUSTER, die haar toepaste, 20000 quotiënten berekenen.

Het vormen eener voldoende hypothese is verder moeilijk genoeg; die omtrent de harmonische verhoudingen der spectraallijnen schijnt niet rationeel; omtrent de zamenstelling der atomen laat zich evenmin a priori iets vaststellen. Van belang is misschien, in verband met eene door ZÖLLNER gemaakte opmerking, de formule van WILHELM WEBER voor de potentiaal van twee electrische deeltjes; zij kan als uitgangspunt dienen en zou wel resultaten beloven, zoo niet het onderzoek van SCHUSTER bewezen had, dat de analogie der vibratorische beweging der atomen met de trillende beweging van een electrisch atomenpaar onwaarschijnlijk is en dat men in elk geval de moleculen uit een groot aantal electrische atomen zou moeten opbouwen.

Door te onderstellen, dat de atomen elastische bollen zijn of liever kernen met aetherhulsels omgeven, heeft men getracht, doch te vergeefs, de verschijnselen der spectraallijnen te verklaren. Veel verwachting gaf eindelijk de vortex theorie van THOMSON; verschillende gronden beletten evenwel den schrijver die verwachting te deelen.

Schrijver wijst nu een geheel nieuwen weg aan, langs welken men, zonder den oorsprong der spectraallijnen geheel te kennen, toch een verband tusschen de verschillende lijnen op het spoor kan komen.

Het valt hem vooral op, dat het aantal spectraallijnen zoo groot is, en de verschillende lijnen zoozeer in intensiteit kunnen uiteenloopen. Hij vraagt daarom, of in een lineair spectrum niet de analogen aanwezig zijn van de combinatie-tonen, allereerst de verschil- en somtonen volgens HELMHOLTZ; zulks is niet onwaarschijnlijk, wanneer van een

lichtuitzendend atoom of molecule de trillingen niet oneindig klein zijn.

Schrijver gaat nu, volgens het door RAYLEIGH ontwikkelde, de mogelijkheid voor het bestaan van dergelijke secundaire trillingen na en betoogt, dat hun optreden zeer waarschijnlijk is. Daar hunne amplitude evenredig is aan het product van de amplituden der primaire trillingen, laat zich bij groote lichtintensiteit verwachten. dat het oog gevoelig genoeg is om die combinatietrillingen waar te nemen.

Hierop volgt de uitvoerige uiteenzetting eener methode van onderzoek naar het bestaan van deze som- en verschillijnen. Wanneer een dergelijk verschil zich tusschen twee spectrale lijnen voordoet, in hoever is dit dan toevallig? Deze vraag wordt in het breede onderzocht, ook volgens eene methode, door den tweeden ondergeteekende van dit verslag aangegeven. Op uitmuntende wijze wordt dit onderzoek, dat van zuiver wiskundigen aard is, doorgevoerd en daarbij berekend, hoeveel coïncidentiën van verschillen bij *n* grootheden te verwachten zijn; want is het aantal waargenomen coïncidentiën van verschillen grooter dan het aantal, dat men gemiddeld kon verwachten, zoo wordt het vermoeden gevestigd, dat som- of verschillijnen bestaan en hier dus geen louter toeval in het spel is.

Na deze theoretische ontwikkelingen deelt de schrijver de uitkomsten van zijn onderzoek bij waterstof, kalium, natrium, koper, mangaan, zilver, rubidium, zuurstof en waterstof mede. Hij geeft deze in uitvoerige tabellen, waarbij hij uit de waarnemingen der verschillende natuurkundigen de som- en verschillijnen tracht op te sporen.

Hij vindt bij waterstof dat het aantal waargenomen coïncidentiën vrij wat grooter is dan het te verwachten aantal; de waarschijnlijkheid, dat deze coïncidentiën aan toeval moeten worden toegeschreven, is daarom vrij klein.

Het onderzoek bij kalium heeft ook eene uitkomst geleverd, gunstig voor de meening dat in het kaliumspectrum som- en verschillijnen voorkomen; ook voor natrium en de andere genoemde stoffen vindt hij hetzelfde resultaat.

De uitgebreide verhandeling van den Heer JULIUS levert,

behalve zijn oorspronkelijk onderzoek, eene zeer belangrijke bijdrage tot de geschiedenis en kritiek van de theorie der spectraallijnen.

Wij hebben de eer U voor te stellen, deze verhandeling met de daaraan toegevoegde tabellen in de werken der Akademie te doen opnemen.

Amsterdam, 31 Maart 1888.

C. H. C. GRINWIS.
H. A. LORENTZ.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 27 April 1888.



Tegenwoordig de Heeren: BUYS BALLOT, Voorzitter, HOFFMANN, ZEEMAN, BIERENS DE HAAN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, BAEHR, MAC GILLAVRY, FRANCHIMONT, DE VRIES, HOEK, DONDERS, RAUWENHOFF, HUBRECHT, STOKVIS, A. C. OUDEMANS JR., GRINWIS, DIBBITS, PLACE, ENGELMANN, J. A. C. OUDEMANS, PEKELHARING, FORSTER, VAN DORP, RIJKE, LORENTZ, VAN RIEMSDIJK, MARTIN, VAN DE SANDE BAKHUYZEN, MULDER, KORTEWEG, SCHOUTE en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. H. C. ROGGE, Bibliothecaris der Universiteits-Bibliotheek te Amsterdam, 21 April 1888; 2°. A. J. VAN PESCH, Bibliothecaris van het wiskundig Genootschap »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" te Amsterdam, 21 April 1888; 3°. A. J. ENSCHEDÉ, Bibliothecaris der Stads-Bibliotheek te Haarlem, 18 April 1888; 4°. J. TIDEMAN, Secretaris van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs te 's Gravenhage, 19 April 1888; 5°. BUYS BALLOT, Directeur van

het Koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut te Utrecht, 17 April 1888; 6°. W. F. C. VAN LAAK JR., Bibliothecaris der Gemeente-Bibliotheek te Arnhem, 1888; 7°. L. BROEKEMA, Directeur der Rijkslandbouwschool te Wageningen, 19 April 1888; 8°. H. KNOBLAUCH, Voorzitter der Kais. Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher te Halle a/S., 20 Maart 1888; 9°. den Secretaris der Koninklijke Academie van Wetenschappen te Bologna, 25 Mei 1888; 10°. H. G. ZEUTHEN, Secretaris der Académie royale danoise des Sciences et des Lettres te Kopenhagen, 12 December 1887; 11°. den Directeur ker Nicolai-Hauptsternwarte te Pulkowa, 1888; 12°. J. S. BILLINGS, Bibliothecaris van het Surgeon General's Office te Washington, 11 April 1888; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van boekgeschenken van de navolgenden:

1°. A. TIELEMANS, Bibliothecaris der Université Catholique te Leuven, Januari 1888; 2°. FÖRSTEMANN, Archivaris der kön. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften te Leipzig, 25 October, 26 November 1887; 5, 10 Februari 1888; 3°. den Secretaris van het historischer Verein für Unterfranken und Aschaffenburg te Würzburg, 1 October 1887; 4°. A. S. RILLIET, Secretaris der Société de Physique et d'Histoire naturelle te Genève, 22 Maart 1888; 5°. den Bibliothecaris der Società Italiana delle Scienze te Rome, 7 September 1887; 6°. den Secretaris der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Bologna, 13 Augustus 1887; 7°. H. WILD, Directeur van het physikalisches Central-Observatorium te Petersburg, December 1887; 8°. H. C. HEPITES, Directeur van het Institut météorologique de Roumanie te Bucharest, 1888: waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren: 1°. brieven van de Heeren VAN DE SANDE BAKHUYZEN en VAN DER WAALS, de kennisgeving behelzend, dat zij de op hen in de Maart-vergadering uitgebrachte keuzen tot Voorzitter en Onder-

voorzitter der Afdeeling aannemen; 2°. een schrijven van den Minister van Binnenlandsche Zaken (25 April 1888) waarin wordt meêgedeeld, dat Z. M. de Koning de benoeming van de Heeren H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN en J. D. VAN DER WAALS, respectievelijk tot voorzitter en ondervoorzitter der Afdeeling, heeft goedgekeurd; 3°. kennisgevingen van de Heeren SCHOLS, VAN DIESEN en SURINGAR, dat zij verhinderd zijn de Vergadering bij te wonen; 4°. een brief van het correspondeerend lid, den Heer VAN DER BURG, ter begeleiding van een paar brochures over geneeskundige onderwerpen.

De voorzitter richt eenige waardeerende woorden tot de Heeren VAN DE SANDE BAKHUYZEN en VAN DER WAALS, en wenscht hen zoowel als de Afdeeling met de bekrachtiging door Z. M. den Koning van de op hen uitgebrachte keuzen geluk.

— De Heeren PLACE en KORTEWEG brengen een gunstig rapport uit over de verhandeling van den Heer Dr. J. L. HOORWEG (Experimenteel onderzoek over de polsbeweging), waarna de Vergadering besluit haar in de werken der Akademie op te nemen.

Gunstig ook luidt het verslag, uitgebracht over het opstel van Dr. V. A. JULIUS (Over de trillende beweging van een vervormden vloeistofbol), weshalve ook hieraan eene plaats in de werken der Akademie zal worden ingeruimd.

— De Heer J. A. C. OUDEMANS spreekt over den dubbelebeelden-mikrometer van AIRY en deelt de uitkomst mede van het onderzoek naar de eigenschap, waaraan dit instrument voldoen moet, opdat de waarde eener schroefomwenteling onafhankelijk zij van de accomodatie van het oog. De spreker vond, dat hiertoe de afstand van de 1e tot de 2e lens gelijk moet zijn aan den brandpuntsafstand der 1e lens — eene voorwaarde, die reeds voor een ander doel in den mikrometer vervuld was.

— Door den Heer BIERENS DE HAAN worden, uit naam

van den hoogleeraar LE PAIGE te Luik, voor de boekerij der Akademie eenige overdrukken aangeboden van wiskundige opstellen.

— De Heer LORENTZ biedt ter opneming in de werken der Akademie aan: 1° eene verhandeling van den Heer Dr. V. A, JULIUS, leeraar aan de Hoogere Burgerschool te Delft; »Over de dubbellijnen in de spectra van natrium, magnesium en aluminium"; en 2°. eene verhandeling van den Heer Dr. P. H. DOJES: »Over de vermeerdering der maximale spanning van een damp en daarmede samenhangende verschijnselen".

De Voorzitter benoemt tot verslaggevers over de 1e verhandeling de Heeren GRINWIS en LORENTZ, en over de 2e de Heeren VAN DER WAALS en BOSSCHA.

— Daar er verder niets te behandelen is, sluit de Voorzitter de vergadering.

RAPPORT

OVER DE

VERHANDELING VAN DR. J. L. HOORWEG:

EXPERIMENTEEL ONDERZOEK NAAR DE POLSBEWEGING.

(Uitgebracht in de vergadering van 27 April 1888).

De verhandeling van den Heer HOORWEG: »Experimenteel onderzoek naar de polsbeweging", welke ons ter beoordeeling is gegeven, heeft in hoofdzaak ten doel, al de verschijnselen der polsbeweging in elastische buizen en in het slagaderstelsel te verklaren: uitsluitend uit de bekende wetten der terugkaatsing en interferentie van golven, en dat wel in tegenstelling met andere onderzoekers, die dikwijls meer op het mechanisme zelf de aandacht gevestigd houden, door hetwelk deze verschijnselen tot stand komen. Wij kunnen de vraag laten rusten òf en in welke mate deze het verwijt verdienen, hun door den Heer HOORWEG gedaan, van vaak, na ter verklaring van hoofdverschijnselen de wetten der golfbeweging te hebben toegepast, nog bijkomende verschijnselen aan de traagheid der stof of de uitrekking van den wand te willen toeschrijven, maar merken op dat, naar onze meening, ook al wordt deze fout vermeden, de methode van HOORWEG veel vóór heeft. Inderdaad toch is de mathematische physica er in geslaagd, de wetten der golfbeweging een zoo eenvoudigen vorm te geven, dat ons voorstellingsvermogen gemakkelijker werkt met die wetten dan met het mechanisme, waardoor zij ontstaan.

In Hoofdstuk I geeft de schrijver een kritisch overzicht

der verschillende sphygmographen en stelt hij de eischen vast, waaraan een goede sphygmograaph moet voldoen. Bij de bespreking van het luchttransport, dat bij het registreeren van den pols wel de beste uitkomsten geeft, gaat de schrijver het onderzoek van DONDERS met stilzwijgen voorbij, dat in deel I der tweede reeks van de »Onderzoekingen gedaan in het physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool", te vinden is. Omtrent de voortplantingssnelheid der luchtgolven in elastische buizen, wijken de resultaten van den schrijver van die van DONDERS af.

Aan het slot van dit hoofdstuk wordt nauwkeurig nagegaan, op welke wijze de uitslag van den sphygmograaf afhangt van de kracht, waarmede de veer op den buiswand drukt. De uitkomst wordt in een formule samengevat en experimenteel getoetst.

Het volgende hoofdstuk vangt aan met de mathematische theorie der golfbeweging. Met de wijze, waarop de BESSEL'sche functiën uit de formules (23), (24), (25) verwijderd zijn, kunnen wij ons niet vereenigen. Evenmin houden wij de toepassing der formule (26), door LAMB voor eene geheel andere golfbeweging opgesteld, op polsgolven met wrijving voor geoorloofd. Wij kunnen deze beide punten echter laten rusten, daar zij op het vervolg der verhandeling van geen invloed zijn. Voor zooverre dit gedeelte als inleiding dienen moet van 't geen volgt, kunnen wij er gunstig over oordeelen.

Terecht wijst de schrijver op het belangwekkende feit, dat de formule voor de voortplantingssnelheid van polsgolven, waarvan de ontdekking tot heden aan RESAL werd toegeschreven, reeds bijna zeventig jaar vroeger door THOMAS YOUNG is gevonden. Zonderling is het echter dat YOUNG in dezelfde verhandeling (*Phil. Trans.* 1809, p. 1), waarin hij later de juiste uitkomst geeft, de voortplantingssnelheid op p. 12 ten onrechte uit de »*actual* arterial pressure" berekend wil hebben en dan ook daar ter plaatse tot eene aanzienlijk geringere waarde komt dan die, welke uit de juiste formule volgt (p. 16) en door Dr. HOORWEG wordt aangehaald, en dat wel zonder tusschen beide tegenstrijdige

voorstellingen eene *besliste* keuze te doen, al helt hij blijkbaar tot de juiste over.

Tot zijn eigenlijk onderwerp komt de Heer HOORWEG in § 10. Hier en in § 11 tracht hij door graphische constructies eenige door anderen verkregen sphygmographische krommen als gevolg van meervoudige terugkaatsingen te verklaren. Zonder het welslagen van deze poging in twijfel te willen trekken, meenen wij toch op hare zwakke zijde te moeten wijzen. De schrijver geeft namelijk niet aan, hoe de afneming der intensiteit als gevolg der terugkaatsingen en der wrijving door hem in rekening is gebracht. Waar het proeven van anderen geldt, over wier toestellen men niet te beschikken heeft, is een zekere willekeur niet te vermijden, maar een eigen experimenteel onderzoek zou toch over dit punt allicht meer licht kunnen verspreiden.

In Hoofdstuk III geeft de schrijver verslag van zijne eigen proeven. Door middel van een caoutchouc-ballon, die met de hand wordt samengeknepen, wordt het vocht stootsgewijs voortbewogen door een caoutchouc-buis, waarop twee luchtkussens geplaatst zijn, die door luchttransport twee op een cylinder schrijvende hefboompjes in beweging brengen. De eigenaardigheid van den toestel bestaat voornamelijk daarin, dat het oogenblik der sluiting van de metalen kleppen, vóór en achter den ballon, in de geregistreerde kromme wordt aangegeven door een inductie-vonk, die door het papier slaat. Uit de analyse der kromme leidt de schrijver af, dat de verheffing in het neerdalende deel van de sluiting der klep achter het kunsthart, de nagebootste valvulae semilunares, afhangt. In Hoofdstuk IV wordt de zooeven besproken kromme vergeleken met die, welke men door middel van het luchttransport van de menschelijke carotis kan registreeren. Ook in deze wordt door middel van een inductie-vonk het oogenblik der sluiting van de valvulae semilunares aangeteekend, en wel door den stroom te sluiten telkens wanneer de tweede hartstoon gehoord wordt. De schrijver komt hierbij tot de uitkomst, dat het zoogenaamde dicrotisme een klepgolf is en ontwikkelt alle gronden, waarom die verheffing niet aan een teruggekaatste

golf mag worden toegeschreven. Ook experimenteel wordt de afwezigheid van teruggekaatste golven in het vaatstelsel aangetoond. Hiervoor werd de aorta van een konijn dicht bij het hart afgesneden en door een lange caoutchouc-buis verbonden met het kunsthart. Bij het rhytmisch inpompen van vocht was in de kromme, geregistreerd door middel van een aan het begin der buis geplaatst luchtkussen, nauwelijks een spoor van een teruggekaatste golf te zien.

Eindelijk wordt de vraag besproken, in hoeverre de geregistreerde krommen der polsgolf een aanwijzing kunnen geven van de drukking in de arteries, en aangetoond, dat die drukking niet onmiddellijk uit de krommen is op te maken. Aangezien bij den mensch directe manometrische bepalingen wegvallen, moet men zijn toevlucht tot indirecte bepalingen nemen. De schrijver bespreekt de methode, door anderen gevolgd en de door hem daarin aangebrachte wijzigingen, komt echter tot de slotsom, dat wel is waar bij caoutchouc-buizen, door de kracht te bepalen, die voor dicht drukken noodig is, met tamelijke nauwkeurigheid de spanning van het in de buis bevatte vocht kan worden gevonden, maar dat dezelfde methode ook bij de het best toegankelijke arteries van het menschelijk lichaam slechts zeer onvoldoende resultaten oplevert.

Ten slotte bespreekt de schrijver de mogelijkheid om uit het oppervlak, door de abscissen-as en de polskrommen begrensd, de hoeveelheid bloed te berekenen, die in de arterie is gedrongen, als men den straal van het vat en de vergrooting door den hefboomsarm kent en buitendien een factor in aanmerking neemt, die van de drukking van het luchtkussen op de arterie afhangt.

De bepalingen geschieden in de carotis en daaruit wordt de grootte van de bloedgolf in de aorta: het debiet van den linker ventrikel, berekend met ten gronde legging der door Henle opgegeven waarden voor den diameter der artt. carotis, subclavia, anonyma en aorta. Schrijver vindt daarvoor 68 cM^3, dus veel minder dan men in navolging van Volkmann doorgaans ziet opgegeven, doch niet veel minder als anderen daarvoor hebben gevonden.

Schrijver knoopt daaraan een berekening vast van den arbeid, dien het hart verricht en de warmte, die daardoor wordt ontwikkeld, evenwel zonder nieuwe gezichtspunten te geven.

Het experimenteel onderzoek, door den schrijver uitgevoerd, draagt de kenmerken van groote nauwgezetheid en zijn beschouwingen verdienen alleszins overweging; daarom adviseeren de ondergeteekenden tot opneming van zijne verhandeling in de werken der Akademie.

T. PLACE.
D. J. KORTEWEG.

RAPPORT

OVER DE

VERHANDELING VAN DR. V. A. JULIUS:

OVER DE TRILLENDE BEWEGING VAN EEN VERVORMDEN VLOEISTOFBOL.

(Uitgebracht in de vergadering van 27 April 1888).



De aangeboden verhandeling van den Heer Dr. V. A. JULIUS »*Over de trillende beweging van een vervormden vloeistofbol*" is eene merkwaardige bijdrage tot de toepassing van bolfunctiën bij reeksen-ontwikkeling.

RAYLEIGH had omstreeks 1879, aan het einde van zijne verhandeling over capillaire verschijnselen bij vloeistofstralen, de theorie van de trillende beweging van een vloeistofbol ontwikkeld, die eene oneindig kleine vervorming heeft ondergaan en aan de werking der moleculaire krachten is overgelaten. Terwijl hierbij de vervorming symmetrisch is ten opzichte van eene middellijn, voegt hij hieraan toe, doch zonder zulks te bewijzen, dat de oplossing van het meer algemeene geval eener willekeurige verstoring, tot geheel dezelfde uitkomst zou voeren.

De schrijver meent, dat deze bewering onwaarschijnlijk is en dus betoog behoeft, en hiertoe dient de ingezonden bijdrage.

De schrijver neemt aan, dat de onsamendrukbare vloeistof zonder vortex-beweging is en dus eene snelheidspotentiaal bezit, die aan de bekende partiëele differentiaalvergelijking der tweede orde van LAPLACE voldoet. Dientengevolge laat zij zich in eene reeks volgens de opklimmende machten van

r ontwikkelen, terwijl de coëfficiënten uit producten van bolfunctiën en functiën van den tijd bestaan. Het goed recht dier ontwikkeling wordt betoogd.

Na meer andere herleidingen, die hier onmogelijk kunnen worden wedergegeven, komt de schrijver tot het besluit, dat inderdaad, bij eene willekeurige vervorming, elk punt van het bolppervlak eene samengestelde trillende beweging verkrijgt, die, evenals bij eene symmetrische vervorming, kan ontbonden worden in eene reeks van enkelvoudige trillende bewegingen, waarvoor de trillingstijd bekend is.

De wiskundige ontwikkeling verdient allen lof wegens hare sierlijkheid en kortheid; van belang is daarbij een merkwaardig, naar wij meenen, onbekend theorema omtrent twee bolfunctiën van de n^e orde.

De Commissie adviseert, de bijdrage in de Verslagen en Mededeelingen der Akademie te doen opnemen.

Amsterdam, 27 April 1888.

C. H. C. GRINWIS.
D. J. KORTEWEG.

OVER DE TRILLENDE BEWEGING

VAN EEN

VERVORMDEN VLOEISTOFBOL,

DOOR

V. A. JULIUS.

1. Aan het einde van zijn verhandeling *) over de capillaire verschijnselen bij vloeistofstralen, geeft RAYLEIGH de theorie van de trillende beweging van een vloeistofbol, die een oneindig kleine vervorming heeft ondergaan en aan de werking der moleculaire krachten is overgelaten †). Hij onderstelt hierbij, dat de vervorming symmetrisch is ten opzichte van een middellijn; hij voegt er aan toe, dat de oplossing van het meer algemeene geval tot geheel dezelfde uitkomst zou voeren.

Deze bewering van RAYLEIGH kwam mij vreemd voor; in vele gevallen weten wij, dat in een trillend stelsel de aanwezigheid of afwezigheid van zekere partiaal-trillingen ten nauwste samenhangt met de oorspronkelijke vervorming. Dat werkelijk een symmetrische vervorming bij een vloeistofbol geheel dezelfde partiaal-trillingen in het leven roept, als een willekeurige vervorming, scheen mij toe, niettegenstaande het groote gezag, dat ieder aan een uitspraak van RAYLEIGH zal toekennen, bevestiging te behoeven.

---

*) RAYLEIGH, On the capillary phenomena of jets, *Proc. Roy. Soc.* 29, p. 71 (1879).

†) L. c. p. 95.

Daarom heb ik de oplossing van het algemeene geval beproefd.

2. Wij nemen aan, dat de vloeistof, waaruit het bolletje bestaat, onsamendrukbaar en zonder vortex-beweging is; er is dus een snelheidspotentiaal U, die voldoet aan de vergelijking

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Indien wij als coördinaten invoeren r, θ en φ, of wel r, μ en φ, terwijl $\mu = \cos\theta$, volgt hieruit:

$$U = p_0 + p_1 r X_1(\mu, \varphi) + p_2 r^2 X_2(\mu, \varphi) + \ldots$$
$$\ldots + p_n r^n X_n(\mu, \varphi) + \text{enz.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

waarin p_0, p_1, enz. grootheden zijn afhankelijk van den tijd en $X_n(\mu, \varphi)$ een bolfunctie voorstelt van de n^{de} orde, onafhankelijk van den tijd.

Dat men werkelijk de functies X zoodanig kan kiezen, dat zij niet afhangen van den tijd, blijkt uit de volgende beschouwing.

Men weet, dat U een funtie is van r, μ, φ en t. Voor een bepaalde waarde van elk der veranderlijken r, μ en φ, kan U als functie van t ontwikkeld gedacht worden in een reeks van den vorm:

$$U = b_0 + b_1 P_1(t) + b_2 P_2(t) + \ldots + b_n P_n(t) + \text{enz.} \ldots (3)$$

waarin $P_1(t), P_2(t)$, enz. periodieke functies zijn van t, terwijl de coëfficienten b functies zijn van r, μ en φ. De eenige onderstelling, die in (3) ligt opgesloten, is deze, dat de perioden voor alle punten van den vloeistofbol dezelfde zijn.

Voor een bepaalde waarde van r kan elk der coëfficienten b ontwikkeld worden in een reeks van den vorm

$$b = c_0 + c_1 Z_1(\mu, \varphi) + c_2 Z_2(\mu, \varphi) + \ldots + c_n Z_n(\mu, \varphi) + \ldots (4)$$

waarin $Z_n(\mu, \varphi)$ een bolfuntie is van de orde n, natuurlijk

onafhankelijk van t. Substitueert men deze waarden van b in (3), dan krijgt men:

$$U = e_0 + e_1 \Xi_1(\mu, \varphi) + \ldots + e_n \Xi_n(\mu, \varphi) + \text{enz.} \ldots (5)$$

waarin de bolfuncties Ξ onafhankelijk zijn van t, terwijl de grootheden e functies zijn van r en t.

Uit de voorwaarde, dat U voldoet aan (1), volgt nu dat e_n evenredig is met r^n; en hierdoor gaat (5) over in den vorm (2).

3. Uit deze beschouwing volgt ook, dat wij voor eenig punt van de oppervlakte van het vervormde bolletje, de waarde van r_0 kunnen brengen in den vorm:

$$r_0 = a_0 + a_1 Z_1(\mu, \varphi) + a_2 Z_2(\mu, \varphi) + \ldots + a_n Z_n(\mu, \varphi) + \text{enz.} \ldots (6)$$

waarin de grootheden a afhankelijk zijn van den tijd en de functies Z hiervan onafhankelijk.

Tusschen (2) en (6) bestaat een zeker verband, daar

$$\frac{d r_0}{d t} = \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

Nu is

$$\frac{d r_0}{d t} = \frac{d a_0}{d t} + \frac{d a_1}{d t} Z_1 + \ldots + \frac{d a_n}{d t} Z_n + \text{enz.} \ldots (8)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0 = p_1 X_1 + 2 p_2 r_0 X_2 + \ldots + n p_n r_0^{n-1} X_n + \text{enz.} \ldots (9)$$

De waarde van r_0 uit (6) moet gesubstitueerd worden in de uitdrukking voor $\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0$. De grootheden a_1, a_2, enz. worden intusschen ondersteld zeer klein te zijn in vergelijking met a_0; met andere woorden, wij nemen aan, dat het bolletje slechts een oneindig kleine vervorming ondergaat. Dan mogen wij in de uitdrukking voor $\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0$ in plaats van r_0 schrijven a_0 of wel R, den straal van het onvervormde bolletje.

Maar dan kan ook niet voor *alle* waarden van μ en φ voldaan worden aan de vergelijking (7), tenzij voor elke waarde van n

$$X_n(\mu, \varphi) = Z_n(\mu, \varphi)$$

en tevens

$$\frac{d\,a_n}{d\,t} = n\,p_n\,R^{n-1} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (10)$$

Men kan zich hiervan gemakkelijk overtuigen, als men de bolfuncties in den vorm brengt, waarin de veranderlijken μ en φ van elkander gescheiden zijn *). Men kan ook opmerken dat, indien Y_n de twee-assige bolfunctie van de n^{de} orde is, volgens (8) en (9), als wij in (9) r_0 vervangen door R,

$$\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} Y_n \left[\frac{d\,r_0}{d\,t} - \left(\frac{\partial\,U}{d\,r}\right)_0\right] d\,\mu\,d\,\varphi$$

$$= \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} Y_n \left[\frac{d\,a_n}{d\,t}\,Z_n - n\,p_n\,R^{n-1}\,X_n\right] d\,\mu\,d\,\varphi$$

Volgens (7) moet deze laatste integraal nul zijn, wat als noodzakelijk gevolg met zich brengt, dat de bolfuncties $\frac{d\,a_n}{d\,t}\,Z_n$ en $n\,p_n\,R^{n-1}\,X_n$ identisch zijn †).

Wij krijgen dus in plaats van de vergelijking (2):

$$U = p_0 + p_1\,r\,Z_1(\mu, \varphi) + \ldots + p_n\,r^n\,Z_n(\mu, \varphi) + \text{enz.} \,.\,. \quad (11)$$

waarin de grootheden p nog voldoen aan de betrekking (10).

Het is duidelijk, dat wij deze eenvoudige uitkomst niet verkregen zouden hebben, indien wij niet hadden aangenomen, dat het bolletje nooit veel van den bolvorm afwijkt.

---

*) Zie TODHUNTER, LAPLACE's functions, p. 155. HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen* 1ster Bnd. p. 312.

†) Zie TODHUNTER, p. 159.

4. Tot het vinden van de uitdrukking voor het arbeidsvermogen van plaats van het vervormde bolletje, zoeken wij de vergrooting, die het oppervlak van het bolletje door de afwijking van den bolvorm ondergaat. De verandering van het arbeidsvermogen van plaats bij vervorming, zal evenredig zijn met deze vergrooting van het oppervlak.

Het geheele oppervlak is

$$\Omega = \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} d\mu d\varphi \, r_0 \sqrt{r_0^2 + (1-\mu^2)\left(\frac{\partial r_0}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{1}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial r_0}{\partial \varphi}\right)^2}$$

of

$$\Omega = \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} d\mu \, d\varphi \left[r_0^2 + \frac{1}{2}(1-\mu^2)\left(\frac{\partial r_0}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{1}{2(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial r_0}{\partial \varphi}\right)^2 \right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

als wij de vierde en hoogere machten van $\frac{\partial r_0}{\partial \mu}$ of $\frac{\partial r_0}{\partial \varphi}$ verwaarloozen.

Daar in het algemeen, wanneer m en n verschillende geheele getallen zijn,

$$\int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} Z_m Z_n \, d\mu \, d\varphi = 0,$$

is het duidelijk, dat volgens (6)

$$\int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} r_0^2 \, d\mu \, d\varphi = 4\pi a_0^2 + a_1^2 \iint Z_1^2 \, d\mu \, d\varphi + \ldots$$

$$\ldots + a_n^2 \iint Z_n^2 \, d\mu \, d\varphi + \text{enz.} \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Verder is

$$\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} d\,\mu\, d\,\varphi \left[(1-\mu^2)\left(\frac{\partial\, r_0}{\partial\,\mu}\right)^2 + \frac{1}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial\, r_0}{\partial\,\varphi}\right)^2\right]$$

$$=\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} d\,\mu\, d\,\varphi\Big[(1-\mu^2)\left\{a_1\frac{\partial\, Z_1}{\partial\,\mu}+\ldots+a_n\frac{\partial\, Z_n}{\partial\,\mu}+\ldots\right\}^2$$

$$+\frac{1}{1-\mu^2}\left\{a_1\frac{\partial\, Z_1}{\partial\,\varphi}+\ldots+a_n\frac{\partial\, Z_n}{\partial\,\varphi}+\ldots\right\}^2\Big]\ldots \quad (14)$$

5. Stel dat X_p een bolfunctie is van de orde p, die dus voldoet aan de vergelijking

$$\frac{\partial}{\partial\,\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\, X_p}{\partial\mu}\right\}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 X_p}{\partial\,\varphi^2}+p\,(p+1)\,X_p=0\,..(15)$$

Lost men uit (15) X_p op en substitueert men deze waarde in $\iint X_p\, Z_n\, d\,\mu\, d\varphi$, dan vindt men:

$$\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} X_p\, Z_n\, d\,\mu\, d\,\varphi$$

$$=-\frac{1}{p(p+1)}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial X_p}{\partial\,\mu}\right\}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 X_p}{\partial\varphi^2}\right] Z_n d\mu d\varphi.$$

Integreert men partieel, en houdt men in het oog dat $(1-\mu^2)\, Z_n\, \frac{\partial\, X_p}{\partial\,\mu}$ voor $\mu=-1$ en voor $\mu=+1$ verdwijnt, evenals $Z_n\, \frac{\partial\, X_p}{\partial\,\varphi}$ tusschen de grenzen 0 en $2\,\pi$, zoo volgt:

$$\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} d\,\mu\, d\,\varphi\left[(1-\mu^2)\frac{\partial\, Z_n}{\partial\,\mu}\frac{\partial\, X_p}{\partial\,\mu}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial\, Z_n}{\partial\,\varphi}\frac{\partial\, X_p}{\partial\,\varphi}\right]$$

$$=p\,(p+1)\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} X_p\, Z_n\, d\,\mu\, d\,\varphi.$$

Wanneer p en n verschillen, heeft men dus:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} d\mu d\varphi\left[(1-\mu^2)\frac{\partial Z_n}{\partial \mu}\frac{\partial X_p}{\partial \mu}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial Z_n}{\partial \varphi}\frac{\partial X_p}{\partial \varphi}\right]=0 \quad ..(16)$$

en verder

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} d\mu\, d\varphi\left[(1-\mu^2)\frac{\partial Z_n}{\partial \mu}\frac{\partial X_n}{\partial \mu}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial Z_n}{\partial \varphi}\frac{\partial X_n}{\partial \varphi}\right]$$

$$= n(n+1)\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} X_n Z_n\, d\mu\, d\varphi \quad .... (17)$$

Hoewel de theorema's, opgesloten in de vergelijkingen (16) en (17) zeker wel bekend zijn, heb ik ze in de aangehaalde werken van TODHUNTER en HEINE niet aangetroffen. Daarom heb ik de afleiding medegedeeld, hoe eenvoudig zij ook is.

6. Wij passen (16) en (17) toe op (14). Dan wordt

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} d\mu\, d\varphi\left[(1-\mu^2)\left(\frac{\partial r_0}{\partial \mu}\right)^2+\frac{1}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial r_0}{\partial \varphi}\right)^2\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} n(n+1)\, a_n^2 \int\int Z_n^2\, d\mu\, d\varphi.$$

Dus volgens (12) en (13)

$$\Omega = 4\pi a_0^2 + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n^2+n+2}{2}\, a_n^2\int\int Z_n^2\, d\mu\, d\varphi \quad ..(18)$$

7. Wij moeten nu nog de voorwaarde invoeren, dat het vloeistofbolletje niet van volume verandert, omdat de vloeistof onsamendrukbaar is.

Men heeft, als het volume I genoemd wordt:

$$I = \frac{1}{3}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} r_0^3\, d\mu\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} d\mu\, d\varphi\, [a_0^3 + 3a_0^2\{a_1 Z_1 + \ldots + a_n Z_n +\}$$

$$+ 3a_0\{a_1 Z_1 + \ldots + a_n Z_n +\}^2 + \{a_1 Z_1 + \ldots + a_n Z_n +\}^3].$$

Daar

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} Z_n \, d\mu \, d\varphi = 0 \quad \text{en} \quad \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} Z_p \, Z_n \, d\mu \, d\varphi = 0,$$

vinden wij bij geoorloofde verwaarloozing:

$$I = \frac{1}{3} a_0^3 \left\{ 4\pi + 3\frac{a_1^2}{a_0^2} \int\int Z_1^2 d\mu d\varphi + \ldots + 3\frac{a_n^2}{a_0^2} \int\int Z_n^2 d\mu d\varphi + \ldots \right\}.$$

Als R de straal is van het onvervormde bolletje, volgt hieruit:

$$R^3 = a_0^3 \left\{ 1 + \frac{3}{4\pi a_0^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^2 \int\int Z_n^2 \, d\mu \, d\varphi \right\} \quad ..(19)$$

en dus

$$a_0^2 = R^2 - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^2 \int\int Z_n^2 \, d\mu \, d\varphi$$

zoodat (18) wordt:

$$\Omega = 4\pi R^2 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^2 + n - 2}{2} a_n^2 \int\int Z_n^2 \, d\mu \, d\varphi \quad ..(20)$$

8. Is C een constante; noemen wij het arbeidsvermogen van plaats van het vervormde bolletje V; is $\frac{1}{2} H$ de moleculaire constante van de vloeistof; zoo heeft men:

$$V = C + \frac{1}{2} H \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(n-1)(n+2)}{2} a_n^2 \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} Z_n^2 \, d\mu \, d\varphi \quad ..(21)$$

Het arbeidsvermogen van beweging is, wanneer wij de dichtheid der vloeistof ϱ stellen:

$$T = \frac{1}{2} \varrho \int\int\int \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \right\} dx \, dy \, dz$$

Daar $\Delta^2 U = 0$, kunnen wij volgens het theorema van Green hiervoor schrijven:

$$T = \frac{1}{2} \varrho \int U_0 \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_0 d\,\Omega$$

als N de normaal aanduidt, in eenig punt op de oppervlakte van het bolletje opgericht.

Maar

$$\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_0 = \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0 - \frac{1-\mu^2}{r_0^2}\frac{\partial r_0}{\partial \mu}\left(\frac{\partial U}{\partial \mu}\right)_0 - \frac{1}{r_0^2(1-\mu^2)}\frac{\partial r_0}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)_0}{\sqrt{1 + \frac{1-\mu^2}{r_0^2}\left(\frac{\partial r_0}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{1}{r_0^2(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial r_0}{\partial \varphi}\right)^2}}$$

terwijl

$$d\,\Omega = r_0^2 \sqrt{1 + \frac{1-\mu^2}{r_0^2}\left(\frac{\partial r_0}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{1}{r_0^2(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial r_0}{\partial \varphi}\right)^2} \cdot d\mu d\varphi$$

zoodat

$$T = \frac{1}{2} \varrho \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} d\,\mu\, d\,\varphi\, U_0 \left[r_0^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0 - (1-\mu^2)\frac{\partial r_0}{\partial \mu}\left(\frac{\partial U}{\partial \mu}\right)_0 - \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial r_0}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)_0 \right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (22)$$

Voeren wij nu de waarden in van U uit (11) en die van r_0 uit (6), dan is het gemakkelijk in te zien dat bij de nauwkeurigheid, waarmede wij ons hier tevreden stellen, de vergelijking (22) wordt:

$$T = \frac{1}{2} \varrho \sum_{n=1}^{n=\infty} n\, R^{2n+1}\, p_n^2 \iint Z_n^2\, d\,\mu\, d\,\varphi.$$

Volgens (10) gaat dit over in

$$T = \frac{1}{2} \varrho\, R^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{d\,a_n}{d\,t}\right)^2 \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} Z_n^2\, d\,\mu\, d\,\varphi \,..\, (23)$$

9. De bewegingsvergelijkingen van LAGRANGE voor dit geval

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} + \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0$$

als ψ een der algemeene coördinaten voorstelt en $\dot{\psi}$ voor $\frac{d\psi}{dt}$ staat, geven nu:

$$\varrho \frac{R^3}{n} \frac{d^2 a_n}{dt^2} + \frac{1}{2} H (n-1)(n+2) a_n = 0. \quad . \quad . \quad (24)$$

De grootheden a_n zijn dus onafhankelijk van elkander, terwijl

$$a_n = A_n \cos \left\{ t \sqrt{n(n-1)(n+2) \frac{H}{2 \varrho R^3}} + B \right\} . . (25)$$

Elk punt van de oppervlakte van het bolletje krijgt dus een samengestelde trillende beweging, die ontbonden kan worden in een reeks van enkelvoudige trillende bewegingen, terwijl de trillingstijd is:

$$T_n = \frac{2\pi}{\sqrt{n(n-1)(n+2)}} \sqrt{\frac{2 \varrho R^3}{H}} \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

10. Hiermede is aangetoond, dat werkelijk de bewering van Rayleigh juist is. Natuurlijk zal de relatieve intensiteit van de partiaal-trillingen afhankelijk wezen van de oorspronkelijke vervorming; maar dit neemt niet weg dat bij een willekeurige vervorming geen andere partiaal-trillingen voorkomen als die, welke ook bij een vervorming, symmetrisch ten opzichte van een middellijn, mogelijk zijn.

Delft, Maart 1888.

ONDERZOEK NAAR DE VOORWAARDE,

WAAROP

IN DEN DUBBELE-BEELDEN-MIKROMETER VAN AIRY

DE WAARDE EENER

SCHROEFOMWENTELING ONAFHANKELIJK IS VAN DE ACCOMMODATIE VAN HET OOG,

DOOR

J. A. C. OUDEMANS.

De dubbele-beelden-mikrometer, waarvan de bijgevoegde figuur 1 eene doorsnede op de ware grootte aanbiedt, is door de HH. TROUGHTON en SIMMS te Londen, naar de door AIRY aangegeven beginselen, maar naar de door VALZ voorgestelde en door AIRY overgenomen verhoudingen, in 1855 voor de Leidsche sterrewacht vervaardigd, en heeft wijlen ons medelid KAISER gediend om zijne nauwkeurige bepalingen van de afmetingen der groote planeten te volbrengen, (zie Verhandelingen der Afdeeling Natuurkunde, Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Deel VI, en Annalen der Sternwarte zu Leiden, Deel III.)

Zooals de figuur aantoont, bestaat hij uit 4 lenzen. AIRY nummerde deze in de richting van het objectief naar het oog, KAISER in de richting van het oog naar het objectief; om verwarring te voorkomen zullen wij haar aldus benoemen:

Van het objec-ief afgerekend.		Welke soort van lens.
de 1e lens :	de voorste lens,	+ gelijkbol,
» 2e » :	» gespleten lens,	— gelijkbol, *)
» 3e » :	» veldlens,	+ platbol,
» 4e » :	» de ooglens.	+ gelijkbol.

Van deze lenzen zijn de brandpuntsafstanden en onderlinge afstanden, theoretisch, als volgt:

Lens.	Brandpunts-afstand.	Afstand van 2 opvolgende lenzen.
Voorste lens	p (willekeurig)	$a = p$
Gespleten lens	$q = -1$	$b = 1$
Veldlens.	$r = +1$	$c = 3$
Ooglens	$s = +1$	

Het is niet moeilijk na te gaan, hoe VALZ aan deze waarden gekomen is. De voorwaarden, waaraan het lenzenstelsel voldoet, zijn, volgens AIRY's ontwikkeling, (*Memoirs of the R. A. S.* Deel XV): 1⁰. het achromatisme, dat bedongen wordt door de formule:

$$4abc - 3bcp - 3(a+b)cq - 3a(b+c)r - 3abs + 2cpq + 2(b+c)pr + 2(a+b+c)qr + 2bps + 2(a+b)qs + 2ars - pqr - pqs - prs - qrs = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

2⁰. de eigenschap, dat door de zijdelingsche beweging van eene helft of beide helften der gespletene lens geene kleuring ontstaat, en die uitgedrukt wordt door de formule

$$3bc - 2(b+c)r - 2bs + rs = 0 \quad \ldots\ldots (2).$$

3⁰. dat het door de voorste lens gevormde beeld van het objectief des kijkers, zich bevindt op de plaats der gespletene lens, zoodat beide helften dezer laatste, in alle gevallen, dezelfde hoeveelheid licht ontvangen en de beide beelden

*) Het was het voorstel van VALZ, deze lens negatief te nemen. Wij zullen spoedig zien, waarom.

dus even helder zijn. Aan deze eigenschap wordt in voldoende mate voldaan door de vergelijking

$$a = p. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Door substitutie in de vergelijking (1) verkrijgt men:

$$0 = p\,\{bc - cq - (b + c)\,r - bs + qr + qs + rs\}$$
$$+ q\,\{-3\,bc + 2\,(b + c)\,r + 2\,bs - rs\}.$$

Daar echter de laatste term dezer uitdrukking, krachtens (2), $= 0$ is, zoo is ook de eerste term $= 0$, of, door p deelende:

$$bc - cq - (b + c)\,r - bs + qr + qs + rs = 0 \,..\, (4)$$

De vergelijkingen (2) en (4) stellen dus de voorwaarde voor, waaraan b, c, q, r en s moeten voldoen. Elimineeren wij tusschen deze vergelijkingen nog c, dan verkrijgen wij:

$$(r + s)\,b^2 - (qr + qs + 2\,rs)\,b + (2\,qr + qs + rs)\,r = 0$$

waarin men drie grootheden willekeurig kan aannemen om er de vierde uit te bepalen. Het eenvoudigst zou zijn q, r en $s = +1$ te stellen, maar dan wordt b onbestaanbaar. Stelt men r en $s = 1$, en laat men q nog onbepaald, dan verkrijgt men

$$b = \frac{q + 1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(q - 2)^2 - 5.}$$

Wil men q positief aannemen, dan moet $q > 2 + \sqrt{5}$, d. i. $>$ 4,236 zijn; Airy nam aanvankelijk $q = 5$; b wordt dan $3 \pm 1 = 4$ of 2, waarvan hij de laatste koos. Wil men echter, zooals Valz voorstelde, q negatief nemen, dan geeft $q = -1$ reeds een bestaanbare uitkomst, nl. $b = \pm 1$; daar nu b noodzakelijk positief moet zijn, is alleen het bovenste teeken geldig; derhalve $b = 1$ en uit (2): $c = 3$, een en ander overeenkomstig de boven medegedeelde, later door Airy aangenome verhoudingen.

In het exemplaar den Leidsche Sterrewacht, mij goed-

gunstig door den Heer BAKHUYZEN ter leen afgestaan, schijnen de vervaardigers voor de eenheid den engelschen duim, (25,4 mm.) genomen te hebben; althans eene bepaling der brandpuntsafstanden en uitmeting der onderlinge afstanden der lenzen heeft mij in millimeters gegeven:

$q = -26{,}0$,	dikte $= 0{,}65$	$k = 0{,}22$
$r = +27{,}1$,	4,86	1,61
$s = +23{,}85$,	1,95	0,62
$b = 25{,}0$,		
$c = 71.0$.		

k is = den afstand der knooppunten, als men den brekingsindex van het glas = 1,5 stelt. De brandpuntsafstanden zijn hier gemeten van knooppunt tot brandpunt, en de onderlinge afstanden der lenzen tusschen de naar elkander toegekeerde knooppunten.

Er zijn vier objectieflenzen, die even zoo vele verschillende vergrootingen geven. Zij zijn in buisjes gevat, die met bajonetsluiting bevestigd worden in het buisje $A\,B\,C\,D$, dat onder aan den mikrometer geschroefd is. De figuur vertoont den mikrometer, als de kleinste vergrooting gebruikt wordt; met stippels is aangegeven waar de 2e, 3e en 4e voorste lenzen komen, als de buisjes, waarin zij gevat zijn, in de plaats van de in de figuur aangewezene komen. Voor deze 4 lenzen vond ik, evenzoo in millimeters

N°.	Dikte.	*k*.	*p*.	*a*.
1	4,63	1,44	26,41	27,2
2	4,45	1,37	19,94	21,4
3	4,01	1,23	12,70	12,7
4	4,53	1,24	8,40	8,0

waaruit blijkt dat de gelijkheid van p en a door de vervaardigers vrij wel in acht genomen is,

De waarde van den equivalenten brandpuntsafstand van een uit 4 glazen bestaand oculair is:

$$F = \frac{p\,q\,r\,s}{(p-a)q(r+s-c)+r(s-c)(p+q-a)-b(p+q-a)(r+s-c)}.$$

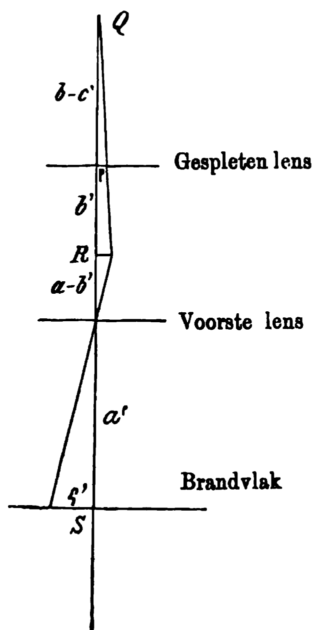
Substitueert men hierin de waarden $p = a$, $q = -1$, $b = r = s = 1$, en $c = 3$, dan verkrijgt men

$$F = -a;$$

het geheele oculair is dus equivalent aan eene negatieve lens met een brandpuntsafstand $= a$, en vertoont dus, evenals een Galileische kijker, de voorwerpen rechtop.

Bij het nauwkeurig beschouwen van dezen mikrometer kwam de vraag bij mij op of de waarde eener omwenteling der mikrometerschroef wel onafhankelijk is van de accommodatiewijdte van het oog. Is dit *niet* het geval, en moet de afstand van het in het brandpunt des kijkers gevormde beeld tot de voorste lens van den mikrometer onveranderd blijven, dan is het gebruik van het instrument aan groote moeielijkheden onderworpen.

Om dit te onderzoeken, ga men den loop der lichtstralen in eene tegengestelde richting na, als waarin zij invallen, dus van het oog uit. Stel dat het oog hypermetropisch is en dat het geaccommodeerd is voor stralen die convergeeren op een afstand D van de ooglens, aan de zijde van den waarnemer; als wij dan deze stralen in omgekeerde richting, dus van het oog naar het objectief vervolgen, zullen zij zich na den doorgang door elke der 4 lenzen vereenigen in 4 punten P, Q, R, S; stel de afstanden dezer vereenigingspunten tot de laatst doorgeloopene lens D', c', b' en a', dan zullen deze grootheden alle afhangen van D. Om nu de door ons gestelde vraag te beantwoorden zijn, in figuur 2, Q, R en S de drie laatste der bedoelde 4 punten, dan bevindt zich in S het door het objectief gevormde beeld, dat door den mikrometer gemeten wordt. Stel dat de ééne



helft der gespletene lens zooveel op zijde geschroefd is, als éénе omwenteling ϱ der mikrometerschroef bedraagt, en dat daarmede overeenstemt eene verplaatsing van het beeld $= \varrho'$, dan is

$$\varrho' = \frac{a'}{a - b'} \cdot \left(1 + \frac{b'}{b - c'}\right) \varrho.$$

Stel $b - c' = E$, dan is

$$b' = \frac{E q}{E - q} \qquad a - b' = a - \frac{E q}{E - q}$$

$$a' = \frac{(a - b') p}{a - b' - p}$$

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{a'}{a - b'}\left(1 + \frac{b'}{E}\right)$$

$$= \frac{p}{a - b' - p} \cdot \frac{E}{E - q} = \frac{p}{(a - p)\left(1 - \frac{q}{E}\right) - q} \cdot$$

Zal dus $\frac{\varrho'}{\varrho}$ onafhankelijk van E en dus van D zijn, dan moet $a = p$ zijn, en aan deze voorwaarde is, zooals boven is medegedeeld, reeds, om een ander doel te bereiken, voldaan.

Worden de door Airy aangegeven verhoudingen strikt in acht genomen, dan is, voor een oog, dat voor evenwijdige stralen acommodeert,

$$D = \infty,$$
$$D' = s = 1,$$
$$c - D' = 2,$$
$$c' = 2,$$
$$E = b - c' = -1,$$

en, daar $q = -1$ is:

$$1 - \frac{q}{E} = 0,$$

zoodat ook de tweede factor van den eersten term van den noemer = 0 wordt. In die onderstelling heeft men dus

$$\varrho' = -\frac{p}{q} r.$$

In de uitvoering zullen echter de werkelijke waarden van b, c, q, r en s altijd eenigszins van de theoretische waarden verschillen, en de beide factoren van den eersten term van den noemer zullen dus feitelijk niet geheel = 0 zijn, maar het product van beide factoren zal ten opzichte van q altijd zeer klein zijn.

Zooals men uit figuur 1 ziet, zijn ooglens en collectieflens in eene en dezelfde uitschuifbare oogbuis bevestigd; is dus de mikrometer, op zeer weinig na, op den behoorlijken afstand van het objectief aangebracht, doch vindt men dan de beelden niet volkomen zuiver, dan kan men de voor het meten noodige scherpte der beelden ook nog verkrijgen, door die oogbuis in of uit te schuiven; het is namelijk duidelijk dat dit op de aanraking der beide beelden, die door de helften der gespletene lens gevormd worden, van geen invloed is.

Utrecht, Mei 1888.

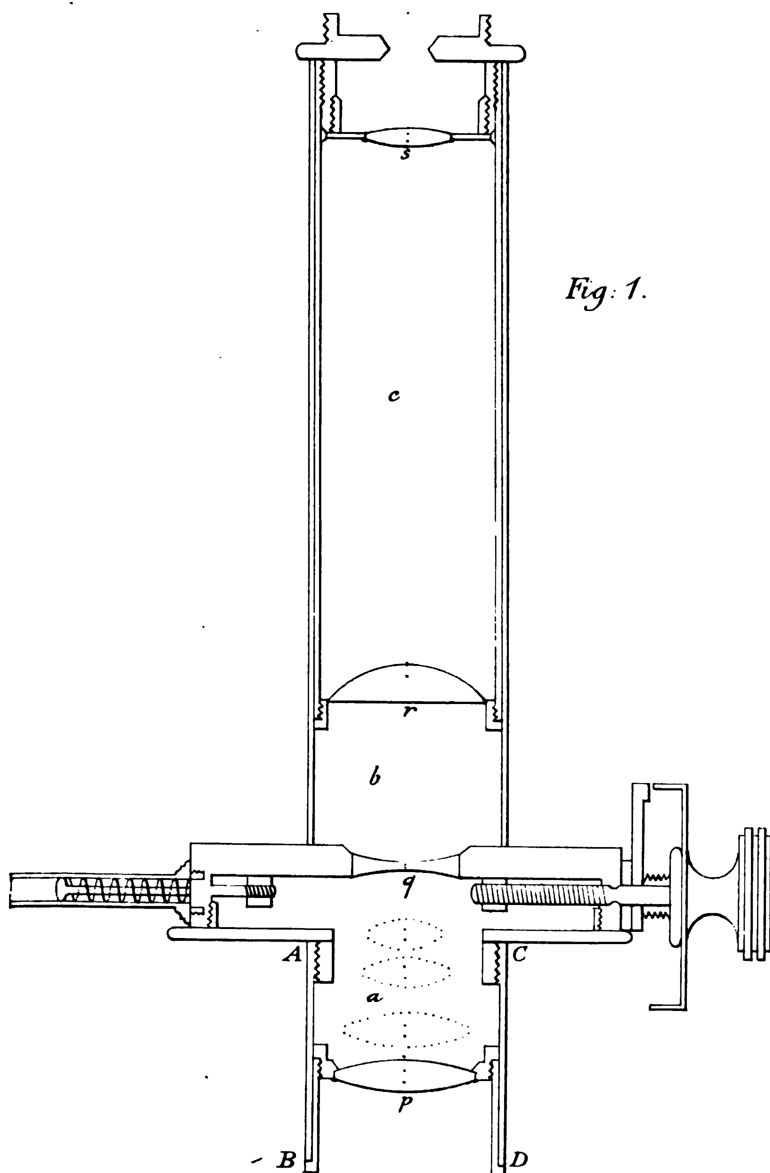


Fig: 1.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 26 Mei 1888.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, SCHOUTE, KAPTEIJN, HOOGEWERFF, BAEHR, STOKVIS, FORSTER, VAN DER WAALS, SCHOLS, RIJKE, A. C. OUDEMANS JR., GRINWIS, BUYS BALLOT, MICHAËLIS, VAN DIESEN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, MULDER, RAUWENHOFF, PEKELHARING, GUNNING, LORENTZ, FRANCHIMONT, MAC GILLAVRY, KORTEWEG, KAMERLINGH ONNES, FÜRBRINGER, PLACE, HOEK, MARTIN, HOFFMANN BEIJERINCK, BEHRENS, ENGELMANN en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— De Voorzitter wenscht de eerste maal, dat het praesidium door hem zal worden waargenomen, niet voorbij te laten gaan, zonder zijn dank voor de op hem uitgebrachte keuze uit te spreken, en zich in de welwillende samenwerking zijner medeleden aan te bevelen. — Hij vertrouwt dat het hem gelukken zal, de bijeenkomsten met onpartijdigheid te leiden, in overeenstemming met de overlevering, dat geschillen van wetenschappelijken aard in vergaderingen als die der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, enkel door argumenten, aan de wetenschap ontleend, beslecht kun-

nen worden. — Hij vertrouwt in den geest der Vergadering te handelen, wanneer hij een woord van dank richt tot den vorigen Voorzitter, den Heer BUYS BALLOT, wiens 70-jarige leeftijd hem verplichtte tot de rustende leden over te gaan, voor de diensten door hem aan de Akademie bewezen. De genegenheid van de leden dezer Instelling voor zijn persoon, was hem niet lang geleden gebleken, bij de herdenking van zijn 40-jarig hoogleeraarschap. — De Akademie was daarbij — harer overlevering getrouw, waartegen Spreker geen bezwaren konde opperen — niet op officiëele wijze vertegenwoordigd geweest, maar er kan geen twijfel bestaan of alle ambtgenooten van den Jubilaris, en dus ook zij, die de plechtigheid niet persoonlijk konden bijwonen, waren in gedachte in de feestzaal tegenwoordig geweest. Hij hoopt van harte dat het den Heer BUYS BALLOT nog vele jaren gegeven moge wezen, de bijeenkomsten der Afdeeling bij te wonen.

— Worden gelezen Brieven van dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. de Gedeputeerde Staten van Friesland te Leeuwarden, 17 Mei 1888; 2°. A. KLUYVER, Bibliothecaris van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, Maart 1888; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van boekgeschenken van de navolgenden:

1°. J. BOSSCHA, Secretaris van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem, 27 April 1888; 2°. STRICKER, Bibliothecaris der Senckenbergische naturforschende Gesellschaft te Frankfurt a.M., 8 April 1888; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren: 1°. de mededeeling van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken, (14 Mei 1888) dat het Z. M. den Koning behaagd heeft, de benoeming van de Heeren Dr. J. C. KAPTEIJN en Dr. S.

HOOGEWERFF tot leden, en die des Heeren Dr. AUG. KEKULÉ, Hoogleeraar in de Scheikunde te Bonn, tot buitenlandsch lid der Akademie goed te keuren; 2°. brieven van de Heeren KAPTEIJN en HOOGEWERFF, waarin zij der Afdeeling hun dank betuigen voor de eervolle onderscheiding, hun bewezen.

De Heeren PEKELHARING en MARTIN worden uitgenoodigd, de nieuw benoemde leden ter Vergadering binnen te leiden.

Nadat dit geschied is, worden zij door den Voorzitter verwelkomd en als leden geïnstalleerd.

— De Secretaris deelt mede, dat de Heer Dr. JAN DE VRIES, leeraar aan de H. B. S. te Kampen, hem een opstel toezond, getiteld: »Over de harmonische configuratie (24_3, 18_4)", met verzoek dit ter plaatsing in de werken der Akademie aan te bieden. — De Voorzitter noodigt de Heeren SCHOUTE en BIERENS DE HAAN uit, daarover in de Juni-Vergadering rapport uit te brengen.

Verder, dat de Heer Dr. J. D. VAN DER PLAATS de door hem voor de werken der Akademie aangeboden verhandeling: »Over den Secundeslinger; 1e gedeelte" heeft terug verzocht.

— De Heer GRINWIS leest, ook uit naam van den Heer LORENTZ, het rapport over het opstel van den Heer Dr. V. A. JULIUS: »Over de dubbellijnen in de spectra van natrium, magnesium en aluminium". De conclusie strekt om aan des Schrijvers verlangen, zijn arbeid in de werken der Akademie opgenomen te zien, gevolg te geven. Aldus wordt besloten.

— De Heer FRANCHIMONT herinnert eerst aan zijne mededeelingen van het vorige jaar omtrent de werking van salpeterzuur, bij de gewone temperatuur, op derivaten van het ureum. Het is toen gebleken dat alle ureumderivaten, waarin de ureumrest met de overige elementen een open keten vormt, ontleed worden op de wijze der amiden, ofschoon niet altijd even gemakkelijk, maar dat dit niet gebeurt bij dezulke, waarin de ureumrest met de overige atoomgroepen een gesloten ring vormt. In het laatste geval had òf geene, òf

eene geheel andere werking plaats, welke meestal bestond in de vorming van een nitroderivaat.

Het verder onderzoek, dat met de hulp van den Heer KLOBBIE werd verricht, heeft geleerd dat de *interne ureïden*, ook door hun gedrag met salpeterzuur, in ten minste drie soorten te onderscheiden zijn:

1°. zij, waarin de rest van het ureum alleen met eene koolwaterstofrest verbonden is, zooals het *aethyleencarbamide*, het *glycoluril* enz., die juister *ureïnen* genoemd moeten worden;

2°. zij, waarin ééne groep NH van de ureumrest aan eene koolwaterstofrest, de andere aan de groep CO gebonden is, zooals bij de interne ureïden der éénbasische zuren: *hydantoïne*, *lactylureum*, *acetonylureum* enz.;

3°. zij, waarin de beide groepen NH der ureumrest alleen aan CO gebonden zijn, zooals bij de interne ureïden der tweebasische zuren: *parabaanzuur* enz.

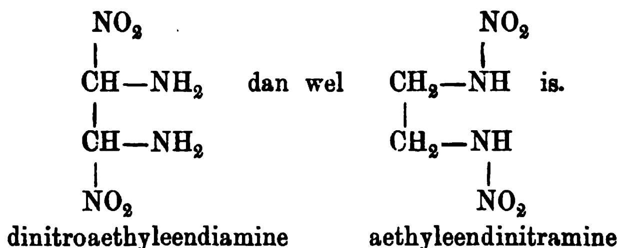
De beide eerste soorten leveren gemakkelijk nitroderivaten, de eerste een dinitro-, de tweede een mononitroderivaat. De derde soort levert alleen dan een nitroderivaat, als tusschen de beide CO-groepen van het tweebasische zuur een met waterstof verbonden C-atoom zich bevindt. Zulk een nitroderivaat heeft andere eigenschappen dan die, welke uit de beide andere soorten van interne ureïden ontstaan en wordt voorloopig niet verder besproken.

Van de 1ste soort van interne ureïden werd vooreerst het *aethyleencarbamide* onderzocht; dit geeft uiterst gemakkelijk een kleurloos dinitroderivaat, dat in water niet oplosbaar is, maar uit kokenden absoluten alcohol, waarin het een weinig oplost, kan omgekristalliseerd worden. Het geeft met 4 molec. $NaOH$ een kleurloos oplosbaar natriumderivaat, waaruit door zilvernitraat de correspondeerende Ag.-verbinding als wit poeder wordt neêrgeslagen, dat in drogen toestand bij zachte verwarming heftig ontploft.

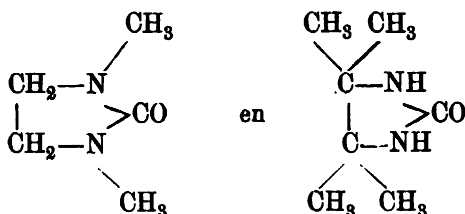
Het *dinitroaethyleencarbamide* wordt door koken met water ontleed; onder opneming van één molec. H_2O geeft het één molec. CO_2 af en er ontstaat een fraai kristalliseerend kleurloos lichaam, dat in koud water weinig oplost, en eene sterk zure reactie heeft. Het wordt door kali niet ontleed, maar

geeft een kaliumderivaat met 2 Ka, dat uit alcohol omgekristalliseerd kan worden.

De sterk zure reactie van dit lichaam deed de vraag opwerpen of de nitrogroepen hierin, en dus ook in het dinitroaethyleencarbamide, aan koolstof of aan stikstof gebonden zijn; met andere woorden of het product



De sterk zure reactie maakt de eerste opvatting minder waarschijnlijk en pleit niet tegen de tweede. Tweeërlei wegen kunnen ingeslagen worden om de vraag op te lossen. De eerste is de reductie; deze zou alleen dan tot het doel leiden, als er gemakkelijk een hydrazine ontstond, hetgeen de tweede opvatting zou bewijzen. Het is echter de vraag of het te verwachten hydrazine, dat niet bekend is, bestaanbaar is onder de aan te wenden omstandigheden en niet ontleed wordt in aethyleendiamine en NH_3: de producten die ook uit het eerste lichaam te verwachten zijn en volgens voorloopige proeven ook werkelijk bij de reductie schijnen te ontstaan. De tweede weg is het onderzoek van het gedrag der methylderivaten van het aethyleencarbamide



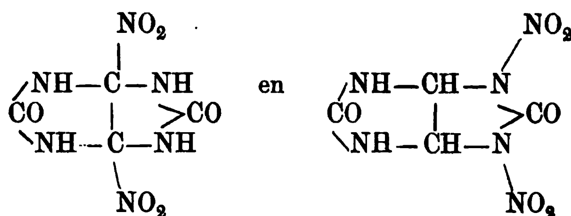
welke beiden onbekend zijn, tegenover salpeterzuur.

Het is tot nog toe niet gelukt deze lichamen te bereiden, ofschoon reeds eene aanwijzing voor de vorming van het eerste verkregen is.

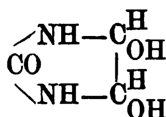
De buitengewone kostbaarheid van het aethyleencarbamide, waarvan aanzienlijke hoeveelheden noodig zouden zijn, deed besluiten eerst met andere lichamen eenige opheldering aan te brengen.

Hiertoe kon zich wellicht het *glycoluril* leenen; dit levert eveneens een dinitroderivaat, dat ongekleurd en onoplosbaar is in de gewone oplosmiddelen. Door koking met water wordt het ontleed, doch behalve één molec. CO_2, ontwikkelen er zich nog twee molec. N_2O en er ontstaat een fraai kristalliseerend lichaam, dat isomeer is met het hydantoïnezuur, en zich, behalve in vorm enz., daarvan onderscheidt in het gedrag met salpeterzuur, waarmede het geen gas ontwikkelt, terwijl hydantoïnezuur dadelijk CO_2 en N_2O levert.

Twee formules kunnen dus weer voor het *dinitroglycoluril* in aanmerking komen



terwijl voor het ontledingsproduct door water deze

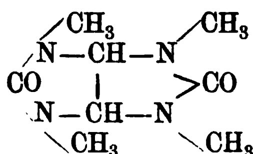


de meest waarschijnlijke kan geacht worden.

Om tusschen de beide formules voor het dinitroglycoluril te kunnen beslissen, werden de methylderivaten van het glycoluril bereid en aan de werking van het salpeterzuur onderworpen.

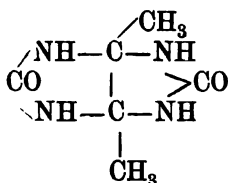
Glycoldimethyluril (uit glyoxaal en monomethylureum) gaf een dinitroderivaat, en wel een wit, in water en alcohol geheel onoplosbaar poeder, dat door koken met water in 't geheel niet veranderd werd.

Glycoltetramethyluril (uit glyoxaal en symetrisch dimethylureum) dus



wordt door salpeterzuur aangetast onder oxydatie; en naar gelang der omstandigheden schijnen er verschillende nitroderivaten uit te ontstaan met geringer C-gehalte.

Dimethylglycoluril (uit diacetyl en ureum)

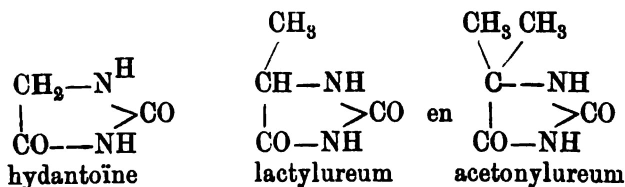


schijnt een nitroderivaat te kunnen geven, zonder dat oxydatieverschijnselen zich daarbij openbaren.

Deze feiten schijnen er voorloopig op te wijzen, dat in de nitroverbindingen dezer ureïden de nitrogroepen zich aan de stikstof bevinden.

Een analoog resultaat werd verkregen bij de tweede soort van ureïden.

Hier werden de drie volgende onderzocht

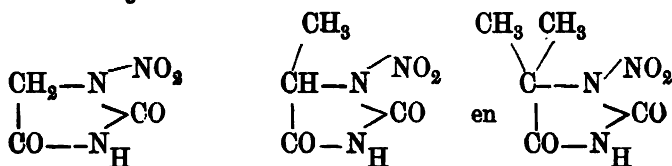


die alle drie een *mono*nitroderivaat geven.

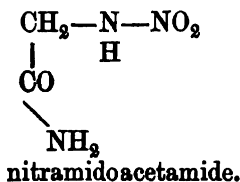
Deze nitroderivaten zijn kleurlooze, goed kristalliseerende lichamen, die door koken met water ontleed worden, ofschoon niet even gemakkelijk. Het *nitrohydantoïne* wordt het moeielijkst door kokend water aangegrepen en geeft daarbij CO_2 af, waarbij op 't laatst eenig N_2O komt; en er blijft een lichaam terug dat, na omkristalliseering uit alcohol, de samenstelling heeft van nitrohydantoïne — $CO + H_2$. Iets gemakkelijker wordt het *nitrolactylureum* ontleed en geeft in den beginne veel meer CO_2 dan N_2O. Ten slotte echter

komt er meer N_2O; zoodat uit één molecuul bijna 1 CO_2 en 1 N_2O ontwikkeld worden. Het residu dat zeer zuur reageert geeft eene reactie op melkzuur met kobaltacetaat. Veel gemakkelijker dan de beide voorgaande wordt het *nitroacetonylureum* door kokend water ontleed en geeft van 't begin af CO_2 en N_2O in bijna gelijke volumina; terwijl er oxyisoboterzuur schijnt gevormd te worden.

Het bestaan van het nitroacetonylureum en de vorming van oxyisoboterzuur er uit kunnen als bewijs dienen dat de groep NO_2 aan de N gebonden is, zoodat dit en vermoedelijk ook de beide andere nitrolichamen *nitro-ureïden* of *nitrureïden* zijn.



Het uit nitrohydantoïne met H_2O verkregen product wordt dan

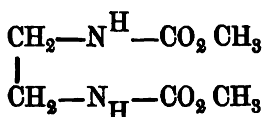


nitramidoacetamide.

Uit de verkregen resultaten, in verband met het feit dat parabaanzuur en cholestrophaan door salpeterzuur niet veranderd worden, kan afgeleid worden dat de groep NH tusschen 2 CO groepen geplaatst in een ring van atomen door salpeterzuur niet aangegrepen wordt, maar dat zij, gebonden aan 1 CO en aan ééne koolwaterstofrest, haar H-atoom tegen de groep NO_2 kan inruilen, zoodat ook hier weder de groote invloed der zoogenaamde negatieve groepen op de eigenschappen der verbindingen blijkt. Ook uit de ontleding der verschillende nitro-ureïden met H_2O, zijn omtrent dien invloed belangrijke gevolgtrekkingen te maken.

Bij de bereiding van aethyleencarbamide (uit aethyleendiamine en aethylcarbonaat) werd eens, in plaats van aethyl-

carbonaat, methylcarbonaat genomen, en toen, reeds in de koude, een ander fraai kristalliseerend lichaam verkregen, dat aan deze formule



beantwoordde. Het gaf met salpeterzuur een dinitroderivaat, dat door koken met water niet ontleed werd. Dit gaf aanleiding, den methylamidomierenzuren methylaether te bereiden, die eveneens een nitroderivaat schijnt te geven.

Eenige jaren geleden was de werking van salpeterzuur op symetrisch dimethylureumnitraat onderzocht, en toen was gevonden dat deze zeer langzaam plaats had. Zij werd nu op andere wijze herhaald. Toen nl. de gasontwikkeling begon, werd de oplossing in water gegoten, waarbij zich eene vloeistof afscheidde; deze werd door koken met water ontleed onder ontwikkeling van CO_2. Vermoedelijk is zij dus een *nitrodimethylureum* geweest. Het product, dat door de ontleding met H_2O ontstond en met aether afgezonderd werd, was vloeibaar en vermoedelijk het *monomethylnitramine* $CH_3-N^H-NO_2$. Toen beproefd werd het te distilleeren, ontplofte het met een buitengewoon heftigen knal. Dit onderzoek zal echter worden voortgezet.

— De Heer SCHOLS spreekt over de berekening van de afschuivende krachten en de buigingsmomenten, die bij spoorwegbruggen worden opgewekt door eene belasting bestaande uit locomotieven. De onregelmatige verdeeling van de drukkingen, op de verschillende assen van een locomotief uitgeoefend, maakt die berekening vrij omslachtig. Spreker heeft zich nu ten doel gesteld om na te gaan in hoeverre uit die onregelmatig verdeelde belasting toch eenvoudige formules zijn af te leiden voor de berekening van de genoemde krachten en momenten. Daar men bij de berekening van beiden te maken heeft met de som van de momenten ten opzichte van het steunpunt van de krachten die tusschen dat steunpunt en het beschouwde punt op den ligger werken,

worden die momenten in de eerste plaats beschouwd. Het blijkt nu dat die som van momenten in twee deelen gesplitst kan worden: in een hoofddeel dat door eene eenvoudige formule wordt voorgesteld en in een periodiek gedeelte. Boven het steunpunt bevindt zich namelijk een locomotief die slechts gedeeltelijk op de brug rust; stelt men de lengte van dat gedeelte door c en het moment van de as-drukkingen op dat gedeelte van de brug ten opzichte van het steunpunt door m voor en noemt men Q het gewicht van een locomotief, b haar lengte en b' de afstand van het zwaarte punt tot het midden van de locomotief, dan wordt het periodieke gedeelte van de som der momenten voorgesteld door:

$$m_p = m - \frac{Q}{2\,b}(c^2 + 2\,b'\,c).$$

Dit periodieke gedeelte bevat hoofdzakelijk de onregelmatigheden die voortspruiten uit de onregelmatige verdeeling van de locomotief-belasting, het is betrekkelijk gering en voor het grootste gedeelte negatief. Voor de locomotief, die bij de berekening van de bruggen voor de Staatsspoorwegen als type is voorgeschreven, wisselt de waarde daarvan af tusschen — 24,591 en + 2,058 ton meter.

Beschouwt men nu het geval dat de maximum waarde van de afschuivende kracht V ontstaat wanneer de brug slechts aan eene zijde van het beschouwde punt belast is, in welk geval de voorste locomotief met hare vooras bij dat punt staat, dan vindt voor de berekening daarvan de volgende formule:

$$V\,L = \frac{Q}{2\,b}(X + a)(X + a + 2\,b') + m_p$$

waarin X de lengte van het belaste gedeelte en L de totale lengte van den ligger voorstellen en waarin a de afstand aangeeft van vooras tot voorkant buffer. Daar nu het periodieke gedeelte m_p van het moment klein en meestal negatief is, kan dit ten opzichte van den hoofdterm worden weggelaten en vindt men dus voor de berekening van de afschuivende kracht V de volgende eenvoudige formule:

$$VL = \frac{Q}{2\,b}(X + a)\,(X + a + 2\,b')$$

waaruit blijkt, dat behalve het gewicht van de locomotief per strekkende eenheid, vooral ook de ligging van het zwaarte punt en de afstand van de vooras tot den voorkant buffer van invloed zijn op de waarde van V.

De hier beschouwde wijze van belasting geeft niet altijd de allergrootste waarde van V; er kunnen zich andere wijzen van belasting voordoen, die eene eenigszins grootere waarde van V opleveren; het verschil is echter steeds gering en kan dus wanneer de lengte L van den ligger niet al te klein is, verwaarloosd worden, te meer daar dit verschil alleen van eenige beteekenis is voor die punten van den ligger waar V zelve eene groote waarde bereikt. Bij de vroeger genoemde locomotief blijft dat verschil beneden de 5 ton.

Maakt men de formule op voor het buigingsmoment in een punt van een ligger op eene afstand X_l van het linker en X_r van het rechter uiteinde, dan kan die onder den volgenden vorm gebracht worden:

$$M = A + B + C$$

$$A = \tfrac{1}{2}\,X_r\,X_l\,\frac{Q}{b}\cdot\frac{L + 4\,b'}{L}$$

$$B = \frac{Q}{2\,b}\,c^2 - m + \frac{Q\,b'\,c}{b}\cdot\frac{X_r - X_l}{L}$$

$$C = \frac{X_l}{L}\,m_r + \frac{X_r}{L}\,m_l,$$

waarin m_r en m_l voorstellen de periodieke gedeelten van de momenten voor de locomotieven, die zich respectievelijk boven het rechter en het linker uiteinde bevinden, en waarin c en m dezelfde beteekenis hebben als boven bij m_p, maar nu betrekking hebben op de locomotief boven het beschouwde punt van den ligger en wel op het deel rechts van dat punt gelegen; de locomotief zelve is ondersteld met het vooreinde naar rechts gekeerd te zijn.

Het eerste gedeelte A is de hoofdterm, en komt overeen met het moment opgewekt door eene gelijkmatig verdeelde belasting, gelijk aan het gewicht van de locomotief per strekkende eenheid vermeerderd in reden van L tot $L + 4\,b'$.

De twee overige deelen hangen naauw samen met het periodieke gedeelte van het moment van de locomotief. De waarde van C zal steeds blijven binnen de grenzen van dat periodieke gedeelte en dus slechts eene kleine positieve waarde kunnen verkrijgen. Het gedeelte B verkrijgt haar grootste waarde voor $X_r = L$, $X_l = 0$ en wordt dan juist gelijk aan het periodieke gedeelte maar met het omgekeerde teeken, zoodat de grootste positieve waarde van B niet grooter kan worden dan de grootste negatieve waarde van het periodieke gedeelte. De waarde van beide termen te zamen kan dus nooit grooter worden dan het verschil van de twee uiterste waarden van het periodieke gedeelte; voor den vroeger genoemden locomotief dus nooit grooter dan $24,591 + 2,058 = 26,649$ ton meter.

Deze grootste waarde zal echter nooit bereikt worden, omdat wanneer B hare grootste waarde bereikt, C juist dezelfde negatieve waarde verkrijgt. Bij eene eenigszins groote brug kan dus het weglaten van de twee termen geen bezwaar opleveren. Ook niet dicht bij de uiteinden alwaar, zooals uit den hoofdterm A blijkt, het moment zelve klein wordt, omdat in dat geval B wel eene groote positieve waarde kan bereiken, maar C dan tevens eene groote negatieve waarde bezit. Het weglaten van beide termen voert tot de eenvoudige uitdrukking:

$$M = \tfrac{1}{2}\, X_r\, X_l\, \frac{Q}{b}\, \frac{L + 4\,b'}{L}.$$

Bestaat de belasting gedeeltelijk uit locomotieven gedeeltelijk uit zwaar beladen goederen-wagens, dan worden de formules natuurlijk iets samengestelder; zij leiden echter eveneens tot eenvoudige eindformules. Stelt men het aantal locomotieven gelijk n en het gewicht der wagens per strekkende eenheid gelijk q dan vindt men voor de berekening van V en M:

$$VL = \tfrac{1}{2} q (X + a - n b)^2 + n Q (X + a - \tfrac{1}{2} n b + b')$$

$$M = \tfrac{1}{2} X_r X_l \left[q + \frac{2n(Q - qb)}{L} - \frac{n^2 b (Q - qb) - 4nQb'}{L^2} \right].$$

De hierbij verwaarloosde termen bereiken ongeveer hetzelfde bedrag als boven voor eene belasting enkel uit locomotieven bestaande is aangegeven. Het weglaten daarvan heeft hier te minder bezwaar, omdat men hier steeds met groote bruggen en dus met groote waarden van V en M te maken heeft.

— De Heer PEKELHARING spreekt over woekering van het endothelium in slagaderen.

In de laatste jaren heeft THOMA door een uitgebreid onderzoek aangetoond, dat woekering van het endothelium, 'twelk den wand der slagaderen van binnen bekleedt, bij den mensch niet slechts onder pathologische, maar ook onder normale omstandigheden voorkomt. Zij komt op den voorgrond en vertoont zich duidelijk als ziekelijk verschijnsel bij de chronische endarteriitis, maar zij is evenzeer aan te toonen als een normale verandering, die reeds zeer spoedig na de geboorte begint, in dat gedeelte van de slagaderlijke bloedbaan, 'twelk tusschen den ductus arter. Botalli en de arteriae umbilicales gelegen is. Zoowel onder normale als onder pathologische omstandigheden ontstaat zij dáár, waar de slagader te wijd dreigt te worden of reeds geworden is. Zoo vond THOMA deze woekering ook in de slagaderen van extremiteiten, waarvan een gedeelte geamputeerd was, en wel in de hoofdslagader over haar geheele lengte en in die takken, welker gebied door de amputatie verkleind was, maar niet in de takken, die een ongedeerd stroomgebied behouden hadden. De vermeerdering van het endothelium, die tot woekering van fibrillair bindweefsel leidt, draagt daardoor het karakter van een compenseerende verandering. De vraag, welke de onmiddellijke oorzaak is van deze proliferatie van cellen, wordt door THOMA in dien zin beantwoord, als zou verlangzaming van den bloedstroom daarbij de hoofdrol spelen. Maar hij toont niet aan, dat verlangzaming van den

stroom mag worden aangenomen in al die gevallen, waarin de woekering van endothelium gezien wordt. Wel echter is de drukking, die op het endothelium wordt uitgeoefend, verminderd, ten minste bij het afnèmen van de grootte en volkomenheid van de elasticiteit van den slagaderwand, en evenzeer bij de vormverandering van den oorsprong van een slagadertak, waarop door kronkeling van den hoofdstam een trekking wordt uitgeoefend.

Inderdaad is nu gebleken, dat vermindering van de drukking op het endothelium van arteriën tot proliferatie van cellen aanleiding geeft. Wanneer bij konijnen of honden twee gelijknamige slagaderen, beide carotiden of beide arteriae crurales, te gelijker tijd dubbel worden afgesnoerd, en wel zóó dat de eene arterie eerst peripherisch en daarna centraal, en de andere eerst centraal en daarna peripherisch dichtgebonden wordt; dan staat tusschen de twee ligaturen in beide slagaderen het bloed stil, maar in het eerste geval blijven de endotheliumcellen onder een drukking, nagenoeg gelijk aan die, welke zij bij den ongestoorden bloedstroom ondervonden, in het andere daarentegen is de vaatwand geplooid en de drukking op het endothelium veel geringer.

Wanneer nu het dier na één of meer weken gedood wordt, dan kan in de afgesnoerde slagaderen zeer duidelijk woekering van bindweefsel worden aangetoond in de gecollabeerde vaten, terwijl zij in de vaten, die in gespannen toestand gebleven zijn, geheel, of zoo goed als geheel ontbreekt. Dat het nieuw gevormde bindweefsel inderdaad van endothelium afkomstig is, 'twelk in een staat van woekering verkeerde, blijkt hieruit, dat in de eerste week na de afsnoering in het gecollabeerde vat mitosen in de endotheliumcellen aangetroffen worden. De woekering staat met de door het afsnoeren van het vat opgewekte ontsteking in geen verband. Dicht bij de ligaturen vertoont zij zich zoowel in de met, als in de zonder spanning afgesnoerde slagaderen, terwijl zij midden tusschen de een tot twee ctm. van elkaar gelegen ingesnoerde plaatsen in het gerekte vat ontbreekt.

Het schijnt niet wel mogelijk, hier een andere oorzaak voor de vermeerdering der cellen aan te nemen, als vermin-

dering van de drukking. De rekking van den vaatwand, waar de afsnoering eerst peripherisch en daarna centraal plaats had, is door het aanstroomende bloed zelf teweeggebracht, en kan niet van dien aard zijn, dat de voeding daardoor eenige storing van beteekenis ondergaat. Men zou wellicht op deze wijze kunnen redeneeren: De endotheliumcellen worden tot woekering geprikkeld zoodra het bloed stil staat. Maar in het gerekte vat kunnen zij aan die prikkeling geen gehoor geven, omdat de spanning van den wand een krachtigen stroom van het voedingsvocht belet. Zulk een meening echter zal men niet vasthouden, wanneer men denkt aan de hypertrophie der slagaderwanden bij de ontwikkeling van collaterale circulatie, waarmede noodzakelijk vermeerdering van het aantal endotheliumcellen gepaard moet gaan. Men zou dus moeten aannemen, dat in de normale slagader de endotheliumcellen steeds de neiging bezitten tot woekering, maar dat zij daarin door de drukking, waaraan zij blootgesteld zijn, worden tegengehouden.

Bij aderen heeft spreker tot nog toe slechts woekering van endothelium kunnen waarnemen, die met het door de afsnoering opgewekte ontstekingsproces in verband stond. Intusschen zijn de veranderingen van het endothelium in aderen na afsnoering niet voldoende door spreker onderzocht om daarover een goed oordeel te vellen. Slechts wordt er op gewezen, dat er voor het oogenblik geen grond is om voor andere endotheliumcellen als voor die der slagaderen aan te nemen, dat zij door mechanische drukking worden tegengegaan in de neiging tot proliferatie. Ook wijst spreker er op, dat de endotheliumcellen van slagaderen niet enkel door het wegvallen van een weerstand tot woekering geraken, maar ook, naar zijn meening, door irritatie. Immers, in slagaderen, in welker omtrek ontsteking heerscht, kunnen alle stadia van endarteriitis, van kerndeelingsfiguren af tot vorming van fibrillair bindweefsel toe, worden waargenomen. Daar is toch het verminderen van een weerstand, die zich tegen den groei verzet, niet op goede gronden aan te nemen.

— De Heer VAN DER WAALS bespreekt den samenhang

tusschen de wijze, waarop de dichtheid verandert in de overgangslaag van vloeistof op damp en de wijze der werking der molekulaire krachten. Dit verband wordt gevonden door toepassing van de stelling, dat de stof zich bij gegeven temperatuur en in gegeven volume aldus schikt, dat de totale vrije energie een minimum is. (Door vrije energie wordt aangeduid de functie, welke GIBBS door ψ heeft voorgesteld).

Noemt men de dichtheid ϱ, en stelt men de LAPLACE'sche coëfficiënten uit de theorie der capillariteit $\int f(x)\,dx$ en $\int x f(x)\,dx$ door c_0 en c_1 voor. — voert men evenzoo in $\int x^2 f(x)\,dx$ enz. door de teekens c_2 enz., dan vindt men:

$$2\,\Sigma\,\frac{c_{2n}}{2n!}\cdot\frac{d^{2n}\varrho}{dh^{2n}} = f(\varrho) - \text{constante.}$$

De functie $f(\varrho)$ is de thermodynamische potentiaal. beantwoordende aan een gelijkmatige dichtheid ϱ.

Alleen dus als al de LAPLACE'sche coëfficiënten $c_2 \ldots c_{2n}$ gelijk nul zijn, zal de dichtheid discontinue veranderen. Ingeval alleen c_2 nog waarde heeft, of in aanmerking behoeft genomen te worden. is de discussie der differentiaalvergelijking gemakkelijk, en vindt men een zeer eenvoudig beloop van de dichtheidsverandering.

De capillaire constante is dan

$$c_2 \int \left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2 d\,h.$$

wat bij discontinue verandering der dichtheid overgaat in

$$c_1\,\frac{\varrho_1{}^2 - \varrho_2{}^2}{2}.$$

— De Heer FÜRBRINGER biedt, uit naam van den Heer Dr. J. T. OUDEMANS, voor de werken der Akademie eene verhandeling aan, getiteld: »Beiträge zur Kenntniss des

Chiromys madagascariensis". Op verzoek des Voorzitters, zullen de Heeren FÜRBRINGER en HOFFMANN daarover verslag uitbrengen in de volgende vergadering.

— Voor de boekerij der Akademie wordt door den Voorzitter aangeboden een exemplaar van: »Uitkomsten der Rijkswaterpassing, ontworpen en aangevangen door L. COHEN STUART, en voortgezet en voltooid door H. J. VAN DE SANDE BAKHUYZEN en G. VAN DIESEN 1875—1885."

— Daar er verder niets te verhandelen is, wordt de vergadering gesloten.

RAPPORT

OVER DE VERHANDELING VAN DEN HEER

Dr. V. A. JULIUS

OVER DE DUBBELLIJNEN IN DE SPECTRA VAN NATRIUM, MAGNESIUM EN ALUMINIUM.

(Voorgedragen in de vergadering van 26 Mei 1888).

De thans ingediende bijdrage van den Heer Dr. V. A. Julius »*Over de dubbellijnen in de spectra van natrium, magnesium en aluminium*" kan als een naschrift beschouwd worden tot zijne uitvoerige verhandeling »*Over de lineaire spectra der elementen*", waaromtrent de ondergeteekenden in de Maart-vergadering l.l. verslag uitbrachten. Doch zij is meer dan een naschrift; zij bevat eene belangrijke uitbreiding van de theorie des schrijvers omtrent som- en verschiltonen en bevestigt zijn theoretisch onderzoek.

Wanneer tot de primaire trillingen van een atoom een paar behoort, waarvan het verschil gering is en wier trillingen te langzaam zijn om te worden waargenomen, zoo kunnen zij, gevoegd bij de aanwezige trillingen, nieuwe tonen geven; voor iedere toon ontstaan dan twee nieuwe trillingen, die waarneembaar zijn en hetzelfde kleine verschil bezitten. Er treden dus in het spectrum dubbellijnen op van constant verschil. Waren er *drie* zulke primaire trillingen aanwezig, zoo zouden deze, analoog aan de somto-

nen, meerdere identische groepen van drievoudige lijnen in het spectrum doen ontstaan.

Het is daarom van belang, de dubbele en meervoudige lijnen uit dit oogpunt te onderzoeken, wat, daar men de golflengte niet nauwkeurig kent, eene eigenaardige methode met zich brengt, die voldoende wordt uiteengezet.

De schrijver past deze methode toe op de spectra van *vier* elementen: *natrium*, *magnesium*, *aluminium* en *thallium*.

Bij *natrium* zijn de spectraallijnen, op eene enkele uitzondering na, alle dubbellijnen. — Van de erkende 13 dubbellijnen maken er 10 deel uit van dezelfde reeks, daar hunne leden een standvastig trillingsverschil bezitten. Zij kunnen dus als summatielijnen beschouwd worden.

Het *magnesium*-spectrum bevat eene bekende groep van drie lijnen; later bemerkte men, dat deze zich in het violet verscheidene malen herhaalt. De 10 drievoudige lijnen, die in het spectrum voorkomen, schijnen alle tot eene zelfde reeks te behooren; zij zijn dus de summatietonen van drie weinig verschillende primaire trillingen, die zich op verschillende plaatsen van het spectrum herhalen.

Het spectrum van *aluminium* vertoont volgens Cornu 7 dubbellijnen; voor de golflengten van beide leden eener dubbellijn geeft hij empirische formules, doch meer gaf hij niet. Nader blijkt, dat er 11 dubbellijnen zijn en daarbij is geen enkel geval, dat de afwijking hunner trillingen aan het niet constant zijn van het trillingsverschil doet twijfelen. Zij alle behooren dus tot somtonen.

Cornu vond eindelijk in het ultra-violette spectrum van *thallium* eene reeks dubbellijnen en gaf hunne empirische formulen; hierbij is echter geen constant verschil merkbaar. Doet de bijgevoegde afbeelding zulks vermoeden, de rekening bevestigt die meening niet.

Bij de drie eerste elementen wordt de onderstelling, dat men combinatietrillingen waarneemt, door het optreden der meervoudige lijnen bevestigd, welke onderstelling daardoor zeer waarschijnlijk wordt.

De verhandeling van den Heer Julius munt uit door groote duidelijkheid. De Commissie stelt voor haar in de

werken der Akademie op te nemen, liefst als vervolg op de genoemde grootere bijdrage: »*Over de lineaire spectra der elementen*" van denzelfden schrijver.

Amsterdam, 26 Mei 1888.

C. H. C. GRINWIS.
H. A. LORENTZ.

OVER DE

KWANTITATIEVE BEPALING VAN RAFFINOSE.

DOOR

Dr. J. W. GUNNING.

Het is bekend, dat de fiscus in de landen, waar van de suiker accijns wordt geheven, het polarisatiewerktuig aanwendt om het bedrag daarvan te bepalen; evenzeer, dat de uitkomsten van het onderzoek met dit werktuig (de polarisatiepercenten) daartoe in den regel niet ongecorrigeerd worden aangewend (gelijk gesteld met de saccharosepercenten). Meestal worden correctiën voor de invertsuiker en voor de zouten aangebracht. Voor de beetwortelsuiker heeft alleen de laatste beteekenis, de eerste niet, daar dat artikel in den regel vrij van invertsuiker is.

In den laatsten tijd wordt door sommigen nog eene andere correctie geeischt, namelijk voor de raffinose *). Dit bestanddeel verhoogt de rechtsdraaing der suikers of andere

---

*) Tegenwoordig is vrij algemeen aangenomen, dat raffinose een normaal bestanddeel van den beetwortel is, niet een product der fabrieksbewerkingen. De omstandigheid, dat zij, hoewel op zich zelve zeer goed kristalliseerbaar en minder oplosbaar in water dan saccharose, zich uit eene saccharoschoudende vloeistof moeilijk afscheidt, was oorzaak, dat zij tot dusver in de moederloog der fabrieken, in de melassen, onopgemerkt terugbleef. Uit sterk daarmede belaste melassen zet zij zich soms bij aanzienlijke koude af, en zoo is de raffinose het eerst ontdekt (LOISEAU 1876 *Compt. rend.* 82. p. 1058). — De verwerking van melassen door praecipitatie daaruit van de saccharose heeft later de algemeene aandacht op haar gevestigd en tegenwoordig kan bij het onderzoek van elk product der suikerfabriekatie de vraag naar hare aanwezigheid oprijzen.

producten, waarin het voorkomt en het is noodig, dien invloed nauwkeurig te kennen om hem desvereischt in rekening te kunnen brengen. Daarop is de aandacht der scheikundigen, die zich met saccharimetrie bezighouden, sedert geruimen tijd gevestigd, maar tot eene algemeen als juist erkende oplossing van het vraagstuk is men nog niet gekomen. Dit blijkt duidelijk uit de besprekingen, die daarover zijn gehouden in de algemeene vergadering van het »Verein für die Rübenzucker-Industrie in Deutschland" in Mei 1888 te Cassel en die geleid hebben tot het verzoek aan het Bestuur om aan eene Commissie de studie van dit punt op te dragen.

Inmiddels is voor den Duitschen Bond eene nieuwe regeling van den suikeraccijns tot stand gekomen, die in Augustus 1888 wordt ingevoerd en in de daarbij gevoegde instructiën heeft de Administratie den weg voorgeschreven, hoe bij het onderstelde voorkomen van raffinose in suikerproducten moet worden gehandeld, om de hoeveelheid daarvan te bepalen.

In de onder mijne hoofdleiding staande Rijks-suikerlaboratoria in ons land is dit vraagstuk insgelijks behandeld en, naar ik meen, tot eene voorloopig bevredigende oplossing gebracht, dank zij vooral den ijver en de bekwaamheid van den Heer Jhr. W. ALBERDA VAN EKENSTEIN, die sedert de oprichting als scheikundige aan het Laboratorium te Amsterdam werkzaam is. Inzonderheid na het verschijnen der zoo even genoemde Duitsche instructie acht ik den tijd gekomen, om deze onderzoekingen te publiceeren en daar het een Rijksbelang geldt, dat met hulpmiddelen, door het Rijk verschaft, behartigd wordt, schijnt het niet ongepast, daarvoor eene plaats te vragen in de werken van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

Het komt mij doelmatig voor, tot het geven van een geregeld overzicht de bedoelde Duitsche instructie als uitgangspunt te nemen. Zij maakt gebruik van het bekende feit, dat saccharose en raffinose o. a. hierin verschillen, dat beider rechtsdraaing in oplossing door zuren vermindert — wat de eerstgenoemde betreft, zelfs in linksdraaing overgaat — en dat deze verandering voor de beide koolhydraten verschil-

lend, maar voor elk hunner bepaald en in voldoende mate constant is Bij de daardoor ontstaande glycosen hebben wij ons niet op te houden. Alleen zij herinnerd, dat het bedrag van het draaiend vermogen na de inversie bij saccharose en bij raffinose blijkt in niet onbelangrijke mate afhankelijk te zijn van de wijze waarop deze plaats heeft gehad, zoodat het noodig is, daarvoor steeds een bepaald voorschrift in acht te nemen; eveneens, dat de draaing na inversie met de temperatuur in vrij sterke mate varieert, wat, gelijk bekend is, bij de rechtsdraaing der oorspronkelijke koolhydraten, niet merkbaar het geval is, zoodat het noodig is, òf steeds bij eene zelfde temperatuur te polariseeren, òf van eene correctietafel gebruik te maken. Met inachtneming van deze en nog andere voorzorgen, geeft de Duitsche instructie — of Dr. SCHEIBLER, dien wij meenen als den auteur der methode te mogen aanmerken — de volgende formulen:

$$S \text{ (procentisch saccharosegehalte)} = \frac{0.5188\,P - I}{0.845}$$

$$R \text{ (procentisch raffinosegehalte *))} = \frac{P - S}{1.85}$$

waarin P de rechtsdraaing in wateroplossing (normaalgewicht 26,048 gram) en I de polarisatie dierzelfde wateroplossing na inversie, met omgekeerd teeken, beduidt.

Dat de methode zeer goede uitkomsten kan opleveren, wordt in de instructie zelve door eenige voorbeelden gestaafd:

kunstmatige mengsels van		gaven bij onderzoek:	
Saccharose	Raffinose	Saccharose	Raffinose
97.0 pCt	3.0 pCt	97.02 pCt.	2.98 pCt.
91.0 »	9.0 »	90.99 »	8.95 »
85.0 »	15.0 »	85.06 »	14.97 »

Hoe gunstig deze cijfers ook spreken, SCHEIBLER vertrouwt toch de methode niet geheel en verlangt ze slechts toegepast te zien in de gevallen, waarin de hoeveelheid raffinose meer dan $^1/_3$ pCt. zou bedragen, d. i. wanneer de

*) Hier is de raffinose watervrij bedoeld.

grootheid $P—S$ (het verschil tusschen de rechtstreeksche polarisatie en het met behulp van deze en van de polarisatie na de inversie berekende gehalte aan saccharose) grooter dan 0.6 wordt bevonden *). Hij verzekert trouwens, dat er geene methode ter bepaling van kleinere hoeveelheden raffinose bekend is, en voegt er zelfs als gevolgtrekking bij — wat natuurlijk een lapsus calami is — dat de suikerproducten des handels, indien zij raffinosehoudend zijn, daarvan altijd meer dan $^1/_3$ pCt. bevatten. Het is van het meeste belang, het volkomen onbewezen zijn van deze bewering

*) In de gevallen waarin $P—S$ 0,6 of minder bedraagt, moet de expert verklaren: „dat geene raffinose in het onderzochte monster aangetoond kan worden". De instructie zegt zelfs, dat er, zoolang $P—S$ niet het bedrag 1 bereikt, nog onzekerheid blijft, d. i. de uitkomst behoeft dan niet te wijzen op de raffinose, maar kan ook een gevolg zijn van het gebrekkige der methode. Eigenaardig is de wijze, welke in die gevallen voorgeschreven wordt om uit de onzekerheid te geraken. Er wordt dan „aangenomen" dat de „organische niet-suiker", dat is: hetgeen aan 100 ontbreekt, als de percentische gehalten aan asch en water met de polarisatiepercenten worden samengeteld, aan het bedrag der asch zelf gelijk is, alzoo dat, wanneer a de asch en b de vochtigheid in percenten voorstellen

$$P + 2a + b = 100$$

zal moeten wezen. Wanneer nu bij de volledige analyse, welke in die gevallen noodig is, blijkt, dat die grootheid $>$ 100 is, dan bestaat er reden om „te vermoeden", dat P te groot gevonden en dat er dus raffinose aanwezig is; is zij $>$ 100,3 dan bestaat daarvoor „zekerheid", en de hoeveelheid raffinose zou dan zelfs kunnen worden bepaald, waarvoor ook eene formule gegeven wordt. Maar dit is niet de bedoeling dezer „rekenmethode". Zij dient er alleen toe, den scheikundige de vrijheid te geven om, wanneer $P—S =$ of $>$ 0.6 is gevonden, de waarde van $\frac{P—S}{1.85}$ voor R als juist aan te nemen en zij „moet" tot dat doel aangewend worden in die gevallen waar de waarde van $P—S$ tusschen 0.6 en 1 gevonden wordt.

Om mij zooveel noodig te verdedigen, wanneer ik in deze instructie de hoogte geteekend meen te zien, tot waar men het elders heeft gebracht in de kwantitatieve bepaling der raffinose, zij hier herinnerd, dat het met betrekking tot dit punt uit die instructie aangehaalde niet bestemd is voor ambtenaren der Administratie, maar voor de beëedigde handelsscheikundigen, aan wie de Administratie verplicht de analyse *volgens deze voorschriften* op te dragen. Deze handelscheikundigen zijn, gelijk bekend is, in den regel, personen, die hunne opleiding aan de Universiteit hebben genoten.

uit te spreken. Ware zij juist, dan zouden de belastingschuldigen steeds met grond kunnen beweren, dat zij door de Administratie, wanneer deze geene correctie voor de raffinose aanwendt, meer dan 0.5 pCt. te hoog worden aangeslagen.

In de Rijks-suikerlaboratoria wordt, strikt genomen, dezelfde methode van onderzoek, die oorspronkelijk van CREYDT *) is en gevoegelijk de »inversiemethode" heeten kan, gevolgd, maar met belangrijke wijzigingen. Daarnevens wordt in sommige gevallen, doch slechts ter controle, de dusgenaamde slijmzuurmethode gebezigd, die van denzelfden CREYDT afkomstig is en dit tot grondslag heeft: dat raffinose tot de koolhydraten behoort, welke bij behandeling met salpeterzuur het vrij moeilijk oplosbare slijmzuur opleveren, wat met de saccharose niet het geval is, en van dat oxydatieproduct onder bepaalde omstandigheden een vrij constant bedrag oplevert. Voor mengsels van enkel saccharose en raffinose is deze methode ook ons bij herhaling gebleken, zeer geschikt te zijn. Maar tot algemeen gebruik bij het onderzoek der suikerproducten kan zij, in haren tegenwoordigen vorm, om verschillende, thans niet nader te bespreken redenen, niet aanbevolen worden.

Om tot de inversiemethode terug te keeren, het is, na de inzage van het hierboven gegeven tafeltje, dat met een groot aantal er even gunstig voor getuigende gegevens, uit onze Laboratoria afkomstig, vermeerderd zou kunnen worden, volkomen duidelijk, dat zij eene algemeen bruikbare en juiste methode voor de analyse der suikerproducten zijn kan, mits men er in slaagt, door eene voorafgaande behandeling er al de raffinose, met zoo weinig saccharose, uit te trekken, dat de samenstelling van dit mengsel binnen de grenzen valt, tusschen welke de methode bewijsbaar juiste uitkomsten geeft. Slechts zij men er op bedacht, dat de organische niet-suiker nevens raffinose, nog andere bestanddeelen bevat, die het gepolariseerde licht op krachtige en eigenaardige wijze aandoen en de raffinose niet zelden in hoeveel-

---

*) CREYDT, *Vereinszeitschrift.* Bd. XXXVII, 153.

heid overtreffen. Bij het concentreeren van deze laatste moet er dus tegen gewaakt worden dat die niet-suikerbestanddeelen met de raffinose medegaan.

Ziedaar de hoofdlijnen waarlangs het onderzoek in onze Suikerlaboratoria zich heeft bewogen.

Wat het concentreeren van de raffinose aangaat, Scheibler zelf heeft daartoe den weg gewezen, door de aandacht te vestigen op het groote verschil in oplossend vermogen voor saccharose en raffinose, dat aan methylalcohol eigen is. Ziehier bepalingen van den Heer Alberda, die dit punt in het licht stellen.

100 cM^3 methylalcohol van de aangewezen sterkte (in volumenprocenten) lossen bij 15^0 van saccharose en van raffinose (deze laatste in gekristalliseerden, waterhoudenden staat) de volgende hoeveelheden op:

Sterkte	Saccharose	Raffinose
100 pCt.	0.3 gram.	10.2 gram *).
95 »		7.5 »
90 »	0.6 »	2.4 »
85 »		1.8 »
80 »	3.8 »	1.8 »
60 »		2.8 »
20 »		5.0 »

Het eigenaardig dalen en weder rijzen van het oplossend

*) Wegens de kostbaarheid van methylalcohol kan ook houtgeest (een aceton-, allylverbindingen en dusgenaamde houtoliën bevattende methylalcohol) voor dit doel in aanmerking komen. Daarom laat ik een tweede tafeltje van den Heer Alberda volgen, daarop betrekking hebbende:

Sterkte	Saccharose	Raffinose
watervrij	0.42 gram	3.10 gram
met 5 pCt. water (in vol.)		1.80 "
" 10 " "	2.25 "	0.83 "
" 15 " "		0.75 "
" 20 " "	5.20 "	0.90 "
" 40 " "		1.90 "
" 80 " "		4.00 "

vermogen dezer vloeistoffen bij afnemende sterkte, houde ons niet op *). Wij constateeren slechts het belangrijke verschil en leiden daaruit af, dat zeer sterke methylalcohol, met gedroogde raffinosehoudende suiker geschud, daaruit een mengsel van saccharose en raffinose kan opnemen, waarin deze laatste de overhand heeft. SCHEIBLER zelf heeft hiervan reeds op de volgende wijze partij getrokken: hij verzadigde methylalcohol met saccharose, schudde met eene bepaalde hoeveelheid dezer oplossing, na er het draaiend vermogen van bepaald te hebben, eene bepaalde hoeveelheid der gedroogde suiker en stelde zich nu voor, dat deze laatste hierbij aan het vocht al de daarin bevatte raffinose en niets dan raffinose af zou staan, zoodat de vermeerderde rechtsdraaiing der vloeistof daarvan de maat zijn zoude.

Deze methode heeft SCHEIBLER in 1886 †) aanbevolen, maar haar weder verlaten, na dat hij ingezien had, dat zij om eene, naar 't schijnt, hem onbekend gebleven reden veel te hooge raffinosegehalten deed vinden.

Later heeft de Heer LOTMAN, handelsscheikundige te Amsterdam, in eene circulaire aan den handel bekend gemaakt, dat hij een middel wist om die methode van haar gebreken te ontdoen. Hij had nl. gevonden, dat methylalcohol, met gedroogde suiker geschud en daaruit raffinose opgenomen hebbende, door toevoeging van zooveel mogelijk geconcentreerden loodazijn het geheele opgeloste gehalte aan raffinose weder liet praecipiteeren Het lag voor de hand, dat hiervan partij kon worden getrokken; polarisatie vóór en na de behandeling met loodazijn zou het bedrag der raffinose kunnen doen kennen.

SCHEIBLER heeft echter verklaard, dat ook deze handelwijze aan groote onnauwkeurigheden onderhevig is en liet zich nog

*) Waarschijnlijk onttrekt watervrije methylalcohol aan de gekristalliseerde raffinose het water dat zij bevat en is de watervrije raffinose oplosbaarder in methylalcohol dan de waterhoudende. Hiervoor pleit de volgende proef: eene oplossing van watervrij gemaakte raffinose in watervrijen methylalcohol geeft na toevoeging van $^1/_6$ van haar volumen water onmiddellijk eene overvloedige kristallisatie van waterhoudende raffinose.

†) *Neue Zeitschr. f. Rubz. Ind.*, XVII. blz. 233.

onlangs over de aanwending van methylalcohol tot het beoogde doel uit als over een wel veel belovend middel, maar voor welks toepassing nog vele experimenteele onderzoekingen vereischt zouden worden *).

Het is de bizondere verdienste van den Heer ALBERDA, te hebben aangetoond, dat en waarom de methoden van SCHEIBLER en van LOTMAN niet tot het beoogde doel kunnen leiden en daarmede baande hij tevens den weg tot de juiste wijze van aanwending van den methylalcohol.

De zaak is deze. Methylalcohol lost uit suikers niet slechts raffinose op, maar ook het grootste deel — en bij aanwezigheid van eenig water zelfs het geheele bedrag — der stroopbestanddeelen. Onbekend was dit feit niet. De Amerikaansche scheikundige CASAMAJOR heeft er reeds voor jaren gebruik van willen maken tot bepaling van de saccharose in ruwsuikers †) en er zijn ook patenten opgenomen voor het zuiveren van deze in het groot. — ALBERDA vond, dat afgewerkte beetwortelmelasse, met zand gemengd en sterk gedroogd, zich in watervrijen methylalcohol tot de helft van zijn gewicht oplost; dat melasse, met zijn eigen gewicht aan water verdund, in elke verhouding met methylalcohol kan worden vermengd, zonder dat er iets anders praecipiteert dan dextran, pektinlichamen en soortgelijke stoffen, benevens kaliumsulfaat, wanneer het in genoegzame hoeveelheid aanwezig is. — Suikerproducten van eenigzins hooge gehalten en goed gekristalliseerd, kunnen door ééne enkele afwassching met methylalcohol geheel van hun stroopgehalte bevrijd worden en laten een suiker terug, die boven 99 polariseert, terwijl het aschgehalte daalt van b.v. 1 tot 0.1 pCt. Lagere producten laten zich echter niet op die wijze onmiddellijk van hun stroopgehalte ontdoen; dit gelukt eerst na ze drie of viermaal stoffijn gewreven en met verschen methylalcohol behandeld te hebben §).

---

*) *Deutsche Zucker-Industrie.* XIII, N°. 24 (Mei 1888).

†) CASAMAJOR. *Journ. of the Amer. Soc.*, Vol. I.

§) De aanwijzing is belangrijk, daar zij de van verschillende zijden

Ook de chemische verbindingen van citroenzure, wijnsteenzure, appelzure, barnsteenzure, glutaminzure, asparaginezure, azijnzure en mierezure alkalizouten met saccharose, wier bereiding door mij beschreven is in *Tijdschrift van Nijverheid*, Dl. XVI, St. 3 (1875) gedragen zich tegenover methylalcohol en tegenover houtgeest juist zooals de natuurlijke stroopen. Hetzelfde geldt van invertsuiker, van tarwestroop en dergelijke producten (met uitzondering natuurlijk van hare dextrineachtige bestanddeelen), en dus ook van de exotische melassen, zoodat ook rietsuikers zich tegenover deze vloeistoffen evenzoo gedragen als die van beetwortel.

Het is derhalve duidelijk, dat het onderzoek met het polarisatiewerktuig van een met saccharose verzadigden hoogpercentigen methylalcohol, vóór en nadat men dien met gedroogde suiker heeft geschud, gelijk SCHEIBLER's voorstel luidde, dáárom niet tot bepaling der raffinose leiden kan, omdat, behalve raffinose, ook nog saccharose in den vorm van stroop en bovendien nog allerlei bestanddeelen, die invloed kunnen hebben op gepolariseerd licht, in de waschvloeistof worden opgelost. Voor zoover men aan de alzoo verkregen uitkomsten beteekenis heeft gehecht, vloeit er uit voort,

---

geopperde onderstelling schijnt te bevestigen, dat slechts de goedgevormde en geïsoleerde suikerkristallen, al zijn zij ook klein, door uitwassching vrij van moederloog te verkrijgen zijn, maar dat dit met de conglomeraten, waaruit de naproducten bestaan, niet meer het geval is. Het is eene reden, waarom men op uitwaschstelsels, zooals zij tot dusver voor saccharimetrische doeleinden zijn aanbevolen, alleen bij de hoogere producten vertrouwen kan stellen.

Mochten zoodanige stelsels weder eens in aanmerking komen, — wat zeer wel het geval wezen kan — dan zal het geraden zijn, voor waschvloeistof in plaats van aethylalcohol, methylalcohol te nemen.

De toevoeging van eenig azijnzuur maakt ook bij de lagere producten de oplossing van de stroopbestanddeelen sneller en volkomener. Overigens meent de Heer ALBERDA bemerkt te hebben, dat zoowel aethyl- als methylalcohol, azijnzuurhoudend en met saccharose verzadigd, na stroopbestanddeelen opgenomen te hebben, bij aanraking met saccharose van deze opnieuw eene, zij het dan ook geringe, hoeveelheid, oplossen kan, iets wat, indien het nader wordt bevestigd, zou bewijzen, dat de stroopvormende zouten, als kaliumacetaat enz., in alcoholische oplossing meer saccharose kunnen binden, dan in waterige.

dat het raffinosegehalte ook der betere suikerproducten in den regel veel te hoog is geschat.

In hoogpercentigen methylalcohol, die met ruwsuiker is geschud en nevens raffinose en saccharose in vrijen toestand, ook saccharose in verbindingen met organischzure alcalizouten en waarschijnlijk nog andere organische stoffen bevat, brengt zooveel mogelijk geconcentreerde loodazijn een praecipitaat te weeg, dat van zeer complexen aard is. Het bevat stellig, indien genoeg loodzout is toegevoegd, *al* de raffinose; de afscheiding van deze uit soortgelijke vloeistoffen laat niets te wenschen over en in zoover was de gedachte, die ten grondslag ligt aan LOTMAN's wijziging van SCHEIBLER's waschmethode niet onjuist. Maar onjuist is de meening, dat het loodzout aan de vloeistof geene andere het gepolariseerde licht aandoende stoffen ontneemt, dan raffinose. Niet slechts wordt ook bijna al de organische niet-suiker (bepaaldelijk de organische zuren) mede neergeslagen, maar ook eene aanzienlijke hoeveelheid saccharose zelf. De mede neergeslagen hoeveelheid saccharose kan, gelijk bij onderzoek gebleken is, in genoegzaam watervrije oplossingen, tienmaal die der raffinose bedragen. — Zeer aanzienlijk is echter de invloed, die de verdunning met water, vóór de praecipitatie met loodazijn, op de samenstelling van het neerslag heeft. De hoeveelheid gepraecipiteerde saccharose vermindert dan met het watergehalte der vloeistof. In methylalcohol van 95 pCt. is de verhouding tusschen saccharose en raffinose in het neerslag ongeveer 5 : 1, in methylalcohol van 90 pCt. ongeveer 3 : 1. Bij verdere verdunning wordt ook het raffinosegehalte van het praecipitaat geringer, in methylalcohol van 80 pCt. heeft geene volledige praecipitatie van raffinose meer plaats en in methylalcohol van 70 pCt. wordt geen spoor meer, noch van saccharose, noch van raffinose, door loodazijn nedergeslagen. Talrijke onderzoekingen zijn in het werk gesteld om, zoo mogelijk, een grens te vinden, waar raffinose zonder saccharose werd neergeslagen, maar zonder gevolg. Doch al ware de uitkomst anders geweest, de methode van LOTMAN had daarmede niet gered kunnen worden. Want, in welke verdunning ook het praecipitaat ontsta, het blijft de draaiende organische

zuren bevatten en in geen geval kan derhalve het rotatievermogen der oplossing door loodazijn alleen met het aandeel, dat de raffinose daarin heeft, worden verminderd.

De gemaakte ervaringen toonden echter duidelijk den weg langs welken het beoogde doel kon worden bereikt. De behandeling der gedroogde suikers met zooveel mogelijk watervrijen methylalcohol of dito houtgeest leidt tot het verkrijgen van eene vloeistof, wier rotatievermogen van complexen oorsprong is. Dit wordt daarom ook niet bepaald, dan nadat: 1⁰ de vloeistof met zooveel water is verdund, tot dat het alcoholische oplosmiddel eene sterkte heeft van 60 à 70 pCt. en 2⁰ in dien toestand door loodazijn van de daarmede praecipiteerbare stoffen is bevrijd. De nu overblijvende vloeistof dankt haar rotatievermogen zoo goed als uitsluitend aan saccharose en aan raffinose, en de betrekkelijke hoeveelheden van dezen laten zich thans nauwkeurig door de inversiemethode bepalen. Daar de handelwijze toelaat, groote hoeveelheden suiker aan de proef te onderwerpen is het niet moeilijk, ook bij de hoogere producten, nauwkeurig na te gaan of en hoeveel raffinose zij bevatten. Opzettelijk daartoe ingerichte proeven hebben geleerd, dat men met zekerheid in die suikers 0.05 pCt. raffinose, indien zij aanwezig is, kan aantoonen *).

---

*) Noodzakelijk voor den scheikundige, die deze opgave zou willen controleeren door de analyse van synthetische mengsels van zuivere saccharose en raffinose, is de opmerking, dat zoodanig mengsel aan methylalcohol de raffinose vooral dan gemakkelijk afstaat wanneer het oplosmiddel eenig kaliumacetaat of ander stroopvormend zout bevat. Raffinose vormt nog gemakkelijker dan saccharose met kaliumacetaat enz. stroopen (op de wijze zooals door mij is aangegeven, zie blz. 185) en deze faculteit schijnt een bevorderende factor te zijn bij het scheiden van raffinose en saccharose door methylalcohol.

De suikers van den handel bevatten in den regel genoeg stroopvormende zouten om de oplossing der raffinose zonder toevoeging van kaliumacetaat te verzekeren. Alkalische suikers moeten echter vooraf met azijnzuur (of nog beter met aluin) worden geneutraliseerd. Deze ervaringen ondersteunen de opvatting, dat het bij de vaste zonder melasseverwerking verkregen suikerproducten de stroop is, die de raffinose bevat, niet de suikerkristallen zelve. De eindbeslissing hieromtrent wordt echter nog

Er is reeds medegedeeld, dat van de lagere suikers (de naproducten) het raffinosegehalte niet door eene eenvoudige wassching met methylalcohol of houtgeest, ook niet na toevoeging van azijnzuur of kaliumacetaat, geheel en in korten tijd in oplossing kan worden gebracht *).

Dit gelukt echter met zekerheid wanneer zoodanige suiker in een weinig water wordt opgelost, en deze oplossing met eene overvloedige hoeveelheid van de bedoelde vloeistoffen wordt vermengd. Na eenigen tijd — indien men haar met eenige suikerkristallen in een gesloten vat schudt, zelfs in ongeveer één uur — kristalliseert dan ten minste $^4/_5$ van de voorhanden saccharose uit en laat al de raffinose in de oplossing, die vervolgens tot bepaling daarvan op dezelfde wijze wordt behandeld als de vloeistof, verkregen bij de hoogere suikers. Proeven met synthetische mengsels van saccharose, raffinose en kaliumacetaat (voor de stroopvorming), waarbij 50 gram van het mengsel aan de proef werden onderworpen, bewezen, dat de nauwkeurigheid hier gerust op 0.1 pCt. mag worden gesteld.

Bij melassen is concentratie van het raffinosegehalte op deze wijze niet mogelijk, daar zij zelve, gelijk reeds vroeger is opgemerkt, na toevoeging van eenig water in elke verhouding in methylalcohol of houtgeest oplosbaar zijn (op dextran, galactan en soortgelijke stoffen, alsmede eventueel op kaliumsulfaat na). Er blijft dan niet anders over, dan op die oplossingen in methylalcohol de zuivering met loodazijn en daarna de inversiemethode toe te passen.

De nauwkeurigheid, waarmede de bepaling van raffinose in de natuurlijke melassen kan geschieden, mag op 0.2 pCt. worden geschat.

---

eenigzins belemmerd door de moeilijkheid, die de kwalitatieve erkenning van zeer kleine hoeveelheden raffinose in ruwsuikers aankleeft.

*) Als voorbeeld (uit zeer vele onzer proeven) wordt hier aangehaald een STEFFEN' suiker 4e product, die bij de behandeling, in den tekst aangegeven, bleek 3.23 pCt. raffinose te bevatten, en bij de eerste behandeling met de waschvloeistof daarvan 2.1, bij de tweede 0.7, bij de derde 0.3 en bij de vierde 0.1 pCt. opleverde.

In het voorgaande is de wordingsgeschiedenis dezer raffinosebepaling in de hoofdtrekken beschreven, terwijl in eene bijlage de nadere voorschriften voor de uitvoering worden medegedeeld.

Het is hier de plaats niet, om de resultaten, waartoe het onderzoek naar het raffinosegehalte der handelsuikers heeft geleid, mede te deelen. Het is echter niet overbodig te verklaren, dat er geene reden bestaat, om bij het saccharimetrisch onderzoek nog eene correctie voor een mogelijk gehalte aan raffinose aan te brengen dan alleen bij de slechts zelden voorkomende spitse suikers, bij welke de afwezigheid van raffinose zich reeds op het oog door dien gewijzigde kristalvorm openbaart.

Ik laat nu nog eenige kritische opmerkingen betreffende het onderwerp volgen, in de eerste plaats ten aanzien van de door loodazijn praecipiteerbare bestanddeelen der organische niet-suiker.

Herinnerd worde, dat deze stoffen bij het gewone saccharimetrisch onderzoek uit de wateroplossing door loodazijn worden neergeslagen en dat de hoeveelheid daarvan, die tengevolge van de onvolkomen praecipitatie in die vloeistof kan verblijven, te klein is om het resultaat der polarisatie te storen. Dit is gebleken door het onderzoek van die praecipitaten zelve; na ontleding met zwavelwaterstof enz, leveren zij eene vloeïstof op, wier invloed op het gepolariseerde licht slechts merkbaar gemaakt kan worden door haar vele malen geconcentreerder te nemen, dan correspondeert met de sterkte der oplossing, waarin de ruwe suiker aan het gewone onderzoek in het polarisatiewerktuig onderworpen wordt.

Het raffinoseonderzoek verschilt echter van het gewone in drie, hier in aanmerking komende punten: 1°. de vloeistof is (bij de rechtstreeksche polarisatie) niet water, maar methylalcohol; 2°. het is een concentratiesysteem, ook voor de organische niet-suiker; en 3°. bij het gewone saccharimetrische onderzoek heeft geene inversie plaats.

Over elk dezer drie punten een woord.

Wat het eerste betreft, zij opgemerkt, dat het natuurlijk noopt tot grootere voorzorgen tegen verdamping, die zich

echter van zelf aanwijzen en geene moeilijkheid van belang kunnen baren. Maar iets anders is de invloed, dien het oplosmiddel heeft op de draaing. Oplossingen van saccharose en van raffinose in houtgeest, draaien iets sterker dan die in water. Het verschil is door den Heer ALBERDA bepaald en gevonden:

$[\alpha]_D$ voor saccharose	in houtgeest	68.0,	in water	66.6
» » » raffinose	» »	105.5,	» »	104.4

de houtgeest was van 65 en 70 pCt. zooals die in toepassing komt, en de verschillen zijn constant bevonden voor oplossingen van 2 tot en met 16 pCt.

Ten aanzien van het tweede punt zij opgemerkt, dat de hoeveelheid organische niet-suiker, aanwezig in de oplossingen bij het raffinose-onderzoek van vaste suikers, ongeveer viermaal zooveel zal bedragen, als bij de gewone polarisatie; bij het onderzoek van stroopen bestaat er geen verschil. Daartegenover staat, dat de praecipitatie dezer stoffen met loodazijn in methylalcoholoplossing veel vollediger plaats heeft dan in waterige *) en dat de oplosbaarheid van het neêrslag in een overmaat van loodazijn bij de eerstgenoemde veel geringer is dan bij de laatste. Hieruit mag worden afgeleid, dat, ofschoon men in beide gevallen de volkomen zekerheid mist, dat alle draaiende niet-suikerbestanddeelen door loodazijn worden afgescheiden, hieraan met betrekking tot de polarisatie vóór inversie bij het raffinose onderzoek nog minder bedenkingen kunnen worden ontleend dan ten aanzien van het gewone onderzoek in wateroplossingen. — Anders is het evenwel gelegen met de polarisatie na inversie. Dit brengt ons tot het

Derde punt. De polarisatie na inversie brengt, als zij voor het saccharimetrisch onderzoek noodig is, een factor van onzekerheid mede. Niet alleen door de reeds gememoreerde afhankelijkheid der draaing van de wijze van inversie en door

*) Eene wateroplossing van lage producten (16.26 gr. op 100 cM^3), met loodazijn zooveel mogelijk uitgepraecipiteerd, geeft, na filtratie, met methylalcohol een nieuw praecipitaat van loodzouten.

hare veranderlijkheid met de temperatuur, maar ook omdat, indien er na de praecipitatie met loodazijn nog organische niet-suiker mocht overgebleven zijn, deze, zoo zij niet reeds op zich zelve draaiend is, in den regel door de inwerking van het zuur in stoffen overgaat, die een merkbaar draaiend vermogen hebben *).

Hier zij tevens herinnerd aan de mogelijkheid, dat dextran, galactan †) pektinlichamen en soortgelijke, benevens saccharine en saccharinezure verbindingen, die alle draaiend vermogen bezitten, in beetwortelsuiker voorkomen §). Deze laatste zouden vooral te vreezen zijn. Saccharine heeft een sterk rechtsdraaiend vermogen, bijna 1.5 maal dat van saccharose, en wordt, ook in alcoholische oplossingen, niet door loodzouten nedergeslagen Doch men bedenke: 1°. dat saccharine in invertsuikervrije beetwortelsuikers hoogst waarschijnlijk niet voorkomt en dat, mocht dit het geval wezen, zij moeilijk anders dan in den vorm van saccharinezure zouten aanwezig zijn kan. Deze nu worden, naar DEGENER's eigen onderzoekingen, door loodazijn wel nedergeslagen, ofschoon, volgens ALBERDA's ondervinding, niet volkomen, terwijl het neerslag in alcoholische oplossingen in overmaat van het praecipiteermiddel tamelijk oplosbaar is.

Dextran, galactan en soortgelijken zijn bij het raffinose-onderzoek, tengevolge der behandeling met methylalcohol of met houtgeest, geheel buitengesloten.

Nog zouden bedenkingen ontleend kunnen worden aan de beweringen van LEPLAY en MAUMENÉ omtrent inactieve saccharose, die door zuren actief zou worden. Maar die beweringen hebben tot dusver bij andere scheikundigen, die er zich mede hebben beziggehouden, niets dan tegenspraak ontmoet.

Dit alles overziende kan moeilijk worden ontkend, dat

---

*) Onze ondervinding is deze: de praecipitaten met loodazijn geven na behandeling met H^2S in zwak azijnzure oplossing òf geene òf eene hoogst geringe linksdraaing, die echter door de inversie in eene veel sterker rechtsdraaing overgaat.

†) Zie DEGENER, *Vereins. Zeitschrift.* N°. 35, pag. 121.

§) LIPPMAN B. B. XX. 1001.

eene kwalitatief en kwantitatief zékere methode om de raffinose als zoodanig af te scheiden *) de voorkeur zou verdienen boven deze en elke andere, die het vinden en bepalen van dat bestanddeel uitsluitend afhankelijk maakt van het kwantitatieve verschil, dat eene, enkel saccharose houdende, oplossing vóór en na inversie aanbiedt met de oplossing der te onderzoeken suiker vóór en na inversie. Voor de zekerheid, die verlangd wordt, komt er hier alles op aan, in hoever men er in slaagt, het objekt van het onderzoek door zuiveringsmiddelen te doen naderen tot een mengsel van enkel saccharose en raffinose. Daarvoor nu kunnen geen volkomen afdoende kenteekenen worden aangegeven.

Dit is en blijft een bezwaar maar het weegt bij onze methode stellig veel minder dan bij eenige andere. Het gebruik van methylalcohol of van houtgeest heeft ten gevolge dat veel zuiverder vloeistoffen aan de inversie worden onderworpen dan bij de overige methoden, bepaaldelijk bij die van de duitsche instructie, waar de inversie plaats grijpt met de zelfs niet door loodazijn gezuiverde oplossing †).

Voorts wensch ik nog een oogenblik stil te staan bij de formule voor de berekening, die door ons wordt aangewend. Noemt men:

---

*) De hoop bestaat nog, dat de praecipitatie der raffinose door loodazijn in methylalcohol- oplossing daaraan dienstbaar gemaakt zal kunnen worden, gelijk zij misschien ook zal kunnen dienen om de raffinose rechtstreeks in den beetwortel (en in rietsuiker) aan te wijzen en kwantitatief te bepalen.

†) Er mag nog op worden gewezen, dat de met loodazijn uitgepraecipiteerde houtgeest-oplossing na de inversie in den regel zonder verdere voorbereiding in het polarisatieapparaat kan worden onderzocht. De geïnverteerde wateroplossing is, zelfs als behandeling met loodazijn is voorafgegaan (in de duitsche instructie wordt dit niet eens voorgeschreven), gewoonlijk zoo donker gekleurd, dat dit onderzoek zonder gedeeltelijke ontkleuring met kool onuitvoerbaar is, waardoor een nieuwe reden van onzekerheid wordt ingevoerd. Kool toch (uitgewasschen beenkool) absorbeert, gelijk opzettelijke proeven ons hebben geleerd, eene merkbare hoeveelheid suiker, zoodra zij in grooter hoeveelheid dan van één gram wordt aangewend.

x het aantal grammen saccharose op 100 cM^3 der vloeistof;

y het aantal grammen raffinose in dezelfde hoeveelheid vloeistof;

P de polarisatie vóór inversie;

p de polarisatie na inversie

en t de temperatuur van het vocht bij de bepaling van p, dan hebben wij:

$$102\,x + 158.4\,y = 16.26\,P$$

en

$$-(44 - {}^1/_2\,t) + (75 + {}^1/_4\,t)\,y = 16.26\,p$$

Hierbij zij herinnerd dat het apparaat van LAURENT gebruikelijk is waarin 16.26 saccharose, in water tot 100 cM^3 opgelost, 100 polarisatie geven; 16.26 raffinose (waterhoudende) geven op dezelfde wijze 157. Omtrent de verandering van 100 en van 157 in 102 en 158.4, zie blz. 190. Bij 20^0 C. geven 16.26 saccharose na onze wijze van inversie — 34; 16.26 raffinose + 80. Deze beide cijfers varieeren, naar eigen onderzoekingen, gelijkmatig met de temperatuur tot het bedrag, in de vergelijking aangegeven, zoodat p bij 0^0 voor saccharose is 44, voor raffinose 75.

In den vorm der Duitsche vergelijkingen gebracht en onderstellend, dat de P in wateroplossing wordt bepaald, worden de onze:

$$S = \frac{0.51\ P - p}{0.85} \quad \text{en} \quad R = \frac{P - S}{1.57}.$$

De Duitsche formulen zijn echter berekend op watervrije raffinose, omgerekend tot waterhoudende, worden zij:

$$S = \frac{0.5189\,P - p}{0.8459} \quad \text{en} \quad R = \frac{P - S}{1.57}.$$

ven. Bij de berekening van het percentisch raffinosegehalte dient men rekening te houden met het volumen dat de uitgekristalliseerde suiker inneemt, hetgeen geschieden kan, door de uitkomsten met 0,88 à 0,92 te vermenigvuldigen.

De gevonden hoeveelheid raffinose wordt tot het vinden van het percentisch bedrag vermenigvuldigd met 5.

Stroopen. Men weegt 12 gram van deze af in een kolfje van 150 cM^3, voegt 12 cM^3 water toe met zooveel kali-aluin als noodig is om de alkaliteit van de stroop te neutraliseeren, lost de stroop hierin op en vult daarna de kolf aan met methylalcohol tot de deelstreep. De goed dooreengeschudde vloeistof wordt gefiltreerd en met 100 cM^3 van dit filtraat gehandeld als bij de ruwsuiker is beschreven.

De gevonden hoeveelheid raffinose wordt tot het vinden van het percentisch gehalte vermenigvuldigd met 100 en gedeeld door 8.

Bij bovenbeschreven bepalingen is gebruik gemaakt van kali-aluin voor het neutraliseeren, omdat de daardoor ontstane zwavelzure zouten bij hunne praecipitatie met methylalcohol veel kleurstof meêslepen.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 30 Juni 1888.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DER WAALS, Ondervoorzitter, ENGELMANN, MARTIN, HOFFMANN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, BIERENS DE HAAN, PLACE, HUBRECHT, FÜRBRINGER, RAUWENHOFF, BUYS BALLOT, ZEEMAN, VAN BEMMELEN, MULDER, BEYERINCK, RIJKE, J. A. C. OUDEMANS, MAC GILLAVRY, VAN DIESEN, PEKELHARING, VAN RIEMSDIJK, MICHAËLIS, FORSTER, STOKVIS en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. G. C. W. BOHNENSIEG, Conservator van de Bibliotheek van Teyler's Stichting te Haarlem, 28 April 1888; 2°. G. J. W. BREMER, Secretaris van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, 29 Mei 1888; 3°. P. G. TAIT, Secretaris der royal Society te Edinburg, 7 Juni 1888; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. GUYE, Redacteur van het Nederlandsch Tijdschrift voor

Geneeskunde te Amsterdam, 29 Mei 1888; 2°. den Directeur der Service de la Statistique générale de Belgique te Brussel, 19 Mei 1888; 3°. A. AUWERS, Voorzitter der Commission für die Beobachtung des Venus-Durchgangs te Berlijn, Mei 1888; 4°. HETTNER, Secretaris der Gesellschaft für nützliche Forschungen te Trier, 7 Mei 1888; 5°. den Directeur van het Musée public te Moscou, 11 Juni 1888; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren: 1°. een brief van den Hoogleeraar KEKULÉ te Bonn (11 Juni 1888), waarin dank betuigd wordt voor zijne benoeming tot buitenlandsch lid der Akademie; 2°. de kennisgeving van Mevr. de Wed. Mr. C. VOSMAER, geb. CLANT, van het overlijden van haren echtgenoot, lid der Akademie. Zij zal met een adres van rouwbeklag worden beantwoord; 3°. de mededeeling van den Heer DONDERS, dat hij den 27sten Mei ll. den 70-jarigen leeftijd bereikte; 4°. kennisgevingen van de Heeren VAN DE SANDE BAKHUYZEN, HOOGEWERFF, HOEK en SCHOLS, dat zij verhinderd werden de vergadering bij te wonen; 5°. een brief van den Heer H. P. J. MOONEN te VENLO (23 Juni 1888) ter begeleiding van een opstel, getiteld: »Iets over geluidgolven". De schrijver wenschte het door de Akademie beoordeeld te zien. — De Voorzitter draagt deze taak op aan de Heeren GRINWIS en LORENTZ; 6°. een brief van den Heer Dr. G SCHOUTEN, leeraar aan de H. B. S. te Amsterdam, ter begeleiding van eene verhandeling, getiteld: »Algemeene eigenschappen van de zuiver rollende beweging van een omwentelingslichaam op een horizontaal vlak, toegepast op de beweging van een omwentelingslichaam om een vast punt van zijne as", die hij gaarne in de werken der Akademie wenschte opgenomen te zien. — Als rapporteurs over dezen arbeid worden benoemd de Heeren KORTEWEG en SCHOLS.

— Het rapport van de Heeren BIERENS DE HAAN en VAN DEN BERG over de verhandeling van den Heer Dr. JAN DE VRIES (Over de harmonische configuratie 24_3, 18_4), en dat van de Heeren FÜRBRINGER en HOFFMANN over de verhandeling

van den Heer Dr. J. T. OUDEMANS (Beiträge zur Kenntniss des Chiromys madagascariensis) luidt gunstig. De conclusie om beide verhandelingen op te nemen in de werken der Akademie wordt zonder discusie aangenomen.

— De Heeren VAN DER WAALS en BOSSCHA, rapporteurs over het opstel van den Heer Dr. P. H. DOJES (Over de vermindering der maximale spanning van een damp en daarmede samenhangende verschijnselen) stellen voor, dit opstel wel voor de Verslagen en Mededeelingen te bestemmen, maar den Heer DOJES vooraf kennis te doen nemen van hun verslag, opdat hij met de Commissie in overleg zou kunnen treden over aan te brengen verbeteringen. — Deze conclusie wordt aangenomen.

— De Heer VAN DER WAALS, zich grondende op de beschouwingen van GIBBS, toont aan dat de voorwaarden, waaraan voldaan moet worden als een gegeven stof zich bij gegeven temperatuur T_k in een gegeven ruimte in evenwicht schikt, gevonden kunnen worden door de voorwaarden te zoeken, onder welke de functie

$$\int \varrho \, (\varepsilon - T_k \, \eta) \, d\, k$$

een minimumwaarde verkrijgt.

In deze functie stelt ϱ voor de dichtheid, $d\,k$ het volume-element, ε en η de energie en entropie per gewichtseenheid. De laatste twee grootheden worden beschouwd als functiën van T, ϱ en andere parameters x, die den toestand ondubbelzinnig bepalen (bijv. betrekkelijk aantal gesplitste molekulen) — terwijl, als er uitwendige krachten werken, ε bovendien een functie van de coördinaten der ruimte is.

Zal $\int \varrho \, (\varepsilon - T_k \, \eta) \, d\, k$ een minimumwaarde hebben, dan moet, volgens de regels der variatierekening, $\delta \int \varrho \, (\varepsilon - T_k \, \eta) \, d\, k$ gelijk nul zijn. Er is, behalve het onveranderd blijven der ruimte, geen andere nevenvoorwaarde dan dat $\delta \int \varrho \, d\, k$ mede gelijk nul zij.

Daaruit besluiten wij, dat de partiëele differentaalquotiënten van $\varrho\,(\varepsilon - T_k\,\eta)$ ten opzichte van T en de verschillende parameters x gelijk nul moeten zijn, en dat ten opzichte van ϱ gelijk constante.

Of voor elk punt der ruimte geldt:

$$\frac{\delta\,\varrho\,(\varepsilon - T_k\,\eta)}{\delta\,\tau_{\rho\,x_1\,x_2\,\text{enz.}}} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\delta\,\varrho\,(\varepsilon - T_k\,\eta)}{\delta\,x_{1\,\tau\,\rho\,x_2\,\text{enz.}}} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{\delta\,\varrho\,(\varepsilon - T_k\,\eta)}{\delta\,\varrho_{\tau\,x_1\,x_2\,\text{enz.}}} = C \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Uit (1) vindt men $T = T_k$, of er is geen evenwicht mogelijk zonder gelijkheid van temperatuur.

(2) leert ons bijv. voor de gedissocieërden toestand, hoe de graad van dissociatie met de densiteit samenhangt.

(3) leert ons welke densiteiten naast elkander bestaan kunnen.

Gezamenlijk leeren deze vergelijkingen ons kennen, welke phasen kunnen coëxisteeren — een aantal, dat in het bijzonder als er uitwendige krachten zijn, oneindig groot is.

Daar voor elk punt der ruimte de volgende differentiaalvergelijking geldt:

$$d\,\varepsilon = T\,d\,\eta - p\,d\,V + \varphi_1\,d\,x_1 + \varphi_2\,d\,x_2 \text{ enz.}$$

en uit (1) gebleken is, dat overal T gelijk T_k moet zijn, leeren ons de vergelijkingen (2) dat

$$\frac{d\,(\varepsilon - T_k\,\eta)}{d\,V} = -\,p$$

met inachtneming daarvan, wordt (3):

$$\varepsilon - T_k\,\eta + \varrho\,\frac{\delta\,(\varepsilon - T_k\,\eta)}{\delta\,\varrho_{\tau\,x_1 x_2}} = \varepsilon - T_k\,\eta - V\,\frac{\delta\,(\varepsilon - T_k\,\eta)}{d\,V}$$

of

$$\varepsilon - T_k\,\eta + p\,V = C \ldots\ldots\ldots (4)$$

Bestaat ε nu uit twee deelen, nl. ε' de thermodynamische energie en P de potentiaal der uitwendige krachten, dan vindt men:

$$\varepsilon' - T_k \eta + pV = C - P$$

of: bij afwezigheid van uitwendige krachten moet de dichtheid in de ruimte zoodanig zijn, dat de thermodynamische potentiaal standvastig zij.

Dat dan ook p (de druk) in de ruimte standvastig moet zijn, blijkt o. a. als men (4) aldus transformeert:

$$\varrho (\varepsilon - T_k \eta) = C \varrho - p.$$

In verband met de vergelijkingen (1), (2) en (3) blijkt, dat p als een constante moet behandeld worden.

Zijn er uitwendige krachten, en heeft P dus een waarde van de coördinaten der punten in de ruimte afhangende, dan vinden wij p niet standvastig, maar

$$V dp = - dP$$

of

$$dp = - \varrho \, dP$$

een vergelijking, in de hydrostatica bekend.

Het geval, dat in ε behalve ϱ ook afgeleiden van ϱ ten opzichte van de coördinaten voorkomen, een geval dat strikt genomen telkens zal voorkomen als de densiteit in de ruimte niet overal gelijk is, is in de vorige vergadering besproken.

De voorwaarde $\delta \int \varrho (\varepsilon - T_k \eta) \, dk$ gelijk nul, leert echter, behalve de minimumwaarde, ook de maximumwaarde kennen.

Zijn er dus meerdere oplossingen, dan moet die genomen worden, welke de integraal de kleinste waarde geeft.

Zoo zal bijv. (3) leeren, dat bij een niet dissociëerende stof de densiteit zoo verdeeld is, dat

$$p V - \int p \, d V = \text{constant.}$$

Dit kan, als er geen uitwendige krachten werken òf het

het geval zijn als de stof zich homogeen schikt, òf zich in de 2 bekende densiteiten splitst. Voor het laatste geval is de integraal zoo klein mogelijk.

— De Heer Beijerinck deelt de uitkomst mede van kruisingsproeven met Kultuurgerst (*Hordeum vulgare*, *H. hexastichon*, *H. distichon*, *H. Zeocriton* en *H. trifurcatum*), sedert 1884 door hem in het groot genomen, en heldert zijne voordracht op door gedroogde voorwerpen en andere op spiritus. Hij beschrijft de voorzorgen, bij die kruisingsproeven te nemen, en leidt uit zijne proeven deze gevolgtrekkingen af:

1°. al de hierboven genoemde soorten van Gerst laten zich gemakkelijk door elkander bevruchten;

2°. de daardoor verkregen bastaarden zijn zeer volkomen zelf-fertiel; die tusschen *H. vulgare* (vr.) en *H. distichum* (m.) en die tusschen *H. vulgare* (vr.) en *H. Zeocriton* (m.) zelfs kleistogaam;

3°. de bastaarden der 1ste generatie zijn over 't algemeen middelvormen tusschen de beide ouders. Eene uitzondering op dien regel vormden die van *H. nudum* (vr.) en *H. trifurcatum* (m.), welke voor een groot deel bleken te behooren tot den niet verwachten gewonen *intermedium*-vorm (den tusschenvorm tusschen *H. vulgare* en *H. distichum*). Enkele exemplaren behoorden tot den wèl verwachten *cornutum*-vorm;

4°. de zaailingen, uit bastaarden door zelfbevruchting ontstaan, zijn zeer veranderlijk. De spreker verkreeg, behalve enkele reeds bekende, eenige geheel nieuwe verscheidenheden. Zeer merkwaardig was, dat de 3de generatie eener kruising van *H. vulgare* (vr.) en *H. Zeocriton* (m.) hem *H. hexastichon* opleverde;

5°. in den loopenden zomer werd uit de in 1884 uitgevoerde kruising tusschen *H. distichum* (vr.) en *H trifurcatum* (m.) een bijna volkomen ongenaalde vorm geteeld.

De Heer Fürbringer deelt den korten inhoud mede van onderzoekingen van den Heer Dr. J. F. van Bemmelen, over den oorsprong van de voorste ledematen en de tongspieren bij Reptilen.

Het onderzoek geschiedde aan embryonen van *Lacerta muralis* en *Tropidonotus natrix.*

In het jongste stadium, dat voor het onderzoek ter beschikking stond, was de vierde kieuwzak juist aangelegd, terwijl de vijfde nog niet aanwezig was. *Op dezen trap van ontwikkeling wordt de aanleg van het mesodermaal bestanddeel der voorste ledematen niet alleen bij de Hagedis, maar ook bij de Slang aangetroffen, en wel bij beide in volkomen overeenkomstigen vorm.*

Het eerste rompsomiet ziet men op korten afstand achter het gehoorblaasje; het is zwakker ontwikkeld dan de volgende. Langs den oralen rand van dit somiet buigt zich de Vagus naar buiten om en loopt naar de 3de en 4de kieuwspleet, waar hij met het ectodermaal epitheel van den achterwand der spleten versmelt. De Vagus met den Accessorius ontspringt uit het verlengde merg over eene vrij groote uitgestrektheid, evenwijdig aan de lengteas van den romp, zoodat zijn oorsprongslijn naar achteren reikt tot aan de grens tusschen het 5de en 6de somiet. Over dezen afstand zijn de spinaal-gangliën niet ontwikkeld; alleen het 5de is zichtbaar, maar zeer rudimentair. Bij het vierde somiet is een dorsale zenuwwortel duidelijk, maar geen gangliëncellen.

Deze voorste vijf somieten vormen elk naar de buikzijde eene strengvormige uitgroeiing. De vijf strengen convergeeren en smelten samen tot een cellige strook, die achter den laatsten kieuwzak om naar de buikzij loopt en zich vervolgens naar voren begeeft, zoodat zij de onderkaak bereikt. Deze strook bevat het materiaal, waaruit zich de tongspieren ontwikkelen zullen. Zij loopt op de grens tusschen den onderrand der branchiaalstreek en den bovenrand van de pericardiaalholte, in de »schouder-tong-lijst" van Froriep. Zij wordt begeleid door den Hypoglossus. Deze zenuw ontstaat uit de samengroeiing van ventrale ruggemergs-wortels, behoorende bij eenige der voorste somieten. Hun aantal kon nog niet met volkomen zekerheid bepaald worden, maar waarschijnlijk gaan de ventrale wortels van het 2de tot 4de segment in den Hypoglossus op en geeft die van het vijfde er een tak aan af, terwijl de vijfde spinaalzenuw overigens

tot eerste cervicaalzenuw wordt. Hiervoor pleit, dat in oudere stadiën de voorste halszenuw geen spinaalganglion heeft. Bij het eerste somiet komt geen zenuw voor. Dit stemt overeen met de waarnemingen van Dr. VAN WIJHE.

Het 6de tot en met het 13de somiet, dus in 't geheel 8 somieten, vormen eveneens aan hunne ventrale zijde steelvormige uitgroeisels, maar deze vereenigen zich niet met die der voorste vijf somieten. Zij wijken eenigszins aboraal af en lossen zich op in één gemeenschappelijke celmassa, die zich van het omliggende bindweefsel alleen door dichtere opeenhooping der kernen onderscheidt.

Deze celmassa ligt aan weerszijden van het lichaam dicht onder de huid en veroorzaakt een flauwe verheffing der lichaamsoppervlakte, waardoor de aanleg van het voorste lidmaat uitwendig te herkennen is.

In een iets ouder stadium van ontwikkeling, wanneer de vijfde kieuwzak en de zesde aortaboog juist aangelegd zijn, is deze verdikking van den lichaamswand bij de Hagedis grooter geworden en naar achter en rugwaarts vrij uitgegroeid; bij de Slang daarentegen reeds weder spoorloos verdwenen.

Uit dezen dichten celklomp ontwikkelen zich bij de Hagedis de spieren en waarschijnlijk ook het geraamte van het voorste lidmaat. De eerste konden dus een voortbrengsel van de spierknoppen van acht lichaamssegmenten zijn; met het oog op de innervatie is het echter waarschijnlijk, dat niet alle knoppen zich tot spieren ontwikkelen. De »schoudertong-lijst" ligt wel in het verlengde van deze lidmaats-verdikking — de zoogenoemde »extremiteits-lijst van WOLFF" — maar het materiaal voor de tongspieren groeit niet in haar naar binnen, van het vooreinde van den lidmaatsaanleg uit, zooals FRORIEP beweert. Het is integendeel, zooals boven bleek, eene voortzetting van de spierknoppen der voorste vijf myotomen, welke knoppen gelegen zijn in de »Kopfnickerwulst" van FRORIEP.

Van de voorste vier dezer vijf somieten zelve gaan waarschijnlijk de sclerotomen op in den aanleg van 't achterhoofd, terwijl het sclerotoom van het vijfde atlas wordt.

De myotomen der twee of drie voorste gaan waarschijnlijk te gronde, op hun spierknop voor den tong na. Uit die der achterste ontwikkelen zich wellicht halsspieren. Dit werd nog niet uitvoerig nagegaan.

— Voor de Boekerij worden aangeboden: door den Heer PLACE, uit naam van Dr. VAN REES, diens »Beiträge zur Kenntniss der innern Metamorphose von Musca vomitoria" en door den Heer VAN BEMMELEN een door hem in »Die landwirtschaftlichen Versuchs-Stationen, XXXV" openbaar gemaakte verhandeling, getiteld: »Die Absorptionsverbindungen und das Absorptionsvermögen der Ackererde."

— De Heer GUNNING zond voor de Verslagen en Mededeelingen aan den Secretaris toe twee opstellen, getiteld: 1°. »Over afscheiding en bepaling van Raffinose"; 2°. »Over het gebruik van kaliumhydrosulfaat bij het onderzoeken van organische stoffen."

— Daar er verder niets te behandelen is, wordt de vergadering gesloten.

RAPPORT

OVER EENE

VERHANDELING VAN DEN HEER DR. J. DE VRIES

„OVER DE HARMONISCHE CONFIGURATIE $(24_3, 18_4)$".

(Uitgebracht in de Vergadering van 30 Juni 1888).



Volgens opdracht der Afdeeling hebben wij de eer over genoemde verhandeling rapport uit te brengen.

Dit opstel sluit zich dan ook aan een vorig van den zelfden schrijver »Over vlakke configuraties", waarover wij pas onlangs een gunstig bericht mochten geven.

In dit laatste toch kwam de configuratie $(24_3, 18_4)$ ter sprake, gevormd door twee geassocieerde conf. $(12_4, 16_3)$ van de soort A met hare gemeenschappelijke diagonalen. Aangezien elk harer lijnen vier harmonische punten bevat, noemt schrijver haar de *harmonische configuratie*. Zij bevat 32 driepuntige configuratie-diagonalen D (de lijnen de beide conf. $(12_4\ 16_3)$), en 72 tweepuntige diagonalen T, ontstaan door de verbinding van elk punt der eene conf. $(12_4, 16_3)$ met een punt der andere.

Schrijver bewijst daarop, dat in elk punt der harmonische configuratie de 6 tweepuntige diagonalen T van de 3 conf. lijnen harmonisch worden gescheiden door de 6 paren, welke uit de 4 driepuntige diagonalen D kunnen gevormd worden; — dat de diagonalen T op de diagonalen D 96 punten h bepalen, die met de drietallen punten, op die lijnen D gelegen, harmonische groepen vormen; — dat elke diago-

naal T 4 zulke punten h bevat; — dat elk dier punten h met 3 diagonalen T incident is; — dat dus deze punten h met de tweepuntige diagonalen T eene configuratie $(96_3, 72_4)$ vormen; — dat de punten der harmonische configuratie tot 32 conf. $(12_4, 16_3)$ gebracht kunnen worden, welke ieder 9 lijnen en 7 driepuntige diagonalen D met haar gemeen hebben; — en daarop, door middel der geassocieerde configuratie dier conf. $(12_4, 16_3)$, dat elk drietal collineaire punten eener conf. $(12_4, 16_3)$ eene configuratie van dezelfde soort vormt met de 9 punten, door welke zij op de in hen zamenkomende conf. lijnen tot harmonische groepen worden aangevuld; — en ten slotte, dat uit de punten der harmonische configuratie en der daarbij behoorende conf. $(96_3, 72_4)$ 32 configuratiën $(12_4, 16_3)$ A kunnen gevormd worden, welke ieder met deze beide 3 en 9 punten gemeen hebben.

Van de lijnen H, die in de conf. $(12_4, 16_3)$ tot de restfiguur der lijnen dier configuratie behooren (haar aantal is 96), gaan er telkens 6 door hare punten h. De 48 punten h, die tot eene configuratie $(12_4, 16_3)$ A behooren, de 96 lijnen H, en de 16 lijnen der configuratie vormen eene nieuwe conf. $(48_7, 112_3)$: van de 216 diagonalen dezer nieuwe configuratie gaan er 18 door elk punt der conf. $(12_4, 16_3)$: zijn er 72, die tevens diagonalen zijn van de andere configuratie $(48_7, 112_3)$, die aan de geassocieerde configuratie $(12_4, 16_3)$ toekomen; en deze 72 diagonalen vormen met de beide groepen van punten h de vroegere configuratie $(96_3, 72_4)$. Laat men echter de 16 lijnen der conf. $(12_4, 16_3)$ weg, dan ontstaat er een nieuwe configuratie $(48_6, 96_3)$.

Elk paar driepuntige diagonalen D der harmonische configuratie, welke geassocieerde lijnen zijn der conf. $(15_4, 20_3)$, bevat een zestal onderling gescheiden punten; wordt dit uit de harmonische configuratie verwijderd, dan ontstaat eene merkwaardige configuratie $(18_3, 18_3)$, waarvan er 16 uit de harmonische configuratie kunnen gevormd worden, en waarvan ieder uit twee drietallen van driehoeken bestaat; zoodat elke hoekpunt van een driehoek in één groep op eene zijde van een driehoek van de andere groep ligt.

Brengt men nu zes der driepuntige diagonalen D bij deze

conf. (18_3, 18_3), dan ontstaat eene configuratie (18_4. 24_3), die niet meer regelmatig is en niet reciprook met de harmonische configuratie overeenkomt, en waarvan elk punt behoort tot 7 configuratie driehoeken. Brengt men nog de zes andere driepuntige diagonalen D daarbij, dan ontstaat er eene conf. (18_5, 30_3), waarin elk punt tot 15 conf. driehoeken behoort. De punten der harmonische configuratie geven nu aanleiding tot 64 conf. zoowel van de eerste, als van de tweede soort.

Zondert men daarentegen van onze configuratie (18_3, 18_3) een zestal onderling gescheiden punten af, dan blijft er eene configuratie (12_3, 18_2); en voegt men weder hierbij de negen nevenhoekpunten der harmonische configuratie, en drie gescheiden lijnen der door hen bepaalde conf. (9_2, 6_3), zoo ontstaat er eene nieuwe evenzeer merkwaardige configuratie (21_3, 21_3). Wanneer men echter weder zeven driepuntige diagonalen D daarbij voegt, ontstaat er eene conf. (21_4, 28_3).

Wanneer men in de harmonische configuratie de punten van een der beide conf. (12_4, 16_3) vervangt door de negen nevenhoekpunten met drie gescheiden lijnen der door hen bepaalde conf. (9_2, 6_3), dan ontstaat er ook eene configuratie (21_3, 21_3), die echter met de vorige niet gelijksoortig is. Voegt men hierbij 7 driepuntige diagonalen, dan ontstaat weder eene conf. (21_4. 28_3), die met de vorige 26 lijnen gemeen heeft. Het aantal conf. driehoeken, waarin de conf. punten voorkomen, is voor de laatste conf. 9 of 4, voor de eerstgenoemde 5 of 0.

Uit de punten der harmonische configuratie en hare nevenhoekpunten kunnen nu 240 conf. (21_3, 21_3) worden gevormd, die van elke der beide geassocieerde conf. (12_4, 16_3) zes punten en alle nevenhoekpunten bevatten, en 4 conf. (21_3, 21_3), die met de vorige ongelijksoortig zijn, en, behalve alle nevenhoekpunten, alle punten van eene der beide conf. (12_4, 16_3) bevatten. Voegt men nu hierbij telkens 7 nieuwe diagonalen, dan kan men 272 conf. (21_4, 28_3) vormen, waarvan de laatste 32 in samenstelling verschillen van de eerste 240.

In de vroeger gevonden conf. (48_7, 112_3) komen lijnen voor, die met 15 lijnen uit de conf. (48_6, 96_3) eene groep van 16 gescheiden lijnen vormen, welke samen alle punten der conf. (48_7, 112_3) bevatten. Laat men nu deze lijnen uit de conf. (48_7, 112_3) weg, dan ontstaat er eene nieuwe conf. (48_6, 96_3). De eerstgenoemde conf. (48_6, 96_3) heeft 144 tweepuntige diagonalen *T*, die in twaalftallen incident zijn met de punten der oorspronkelijke conf. (12_4, 16_3). Neemt men deze 144 lijnen in de configuratie op, dan ontstaat er eene conf. (60_{12}, 240_3), voor welke de lijnen der conf. (12_4, 16_3) zespuntige diagonalen zijn.

Schrijver besluit zijn verhandeling met eene stelling, die zijne methode van afzonderen en toevoegen van elementen verklaart.

Wegens de merkwaardigheid der uitkomsten, de eenvoudigheid en helderheid der toegepaste methoden komt, naar ons oordeel, aan dit opstel een plaats toe naast de voorgaande verhandeling. Wij meenen dan ook de Afdeeling gerustelijk te kunnen aanraden, het een eervolle plaats te gunnen in hare Verslagen en Mededeelingen.

Leiden en *Rotterdam*,
Juli 1888.

D. BIERENS DE HAAN,
F. J. VAN DEN BERG.

OVER DE HARMONISCHE CONFIGURATIE $(24_3, 18_4)$.

DOOR

J. DE VRIES.



1. In mijn opstel »Over vlakke configuraties" (Versl. en Meded. d. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 3de Reeks Deel V), heb ik aangetoond, dat de punten van twee geassocieërde cf. $(12_4, 16_3)$ A met hare gemeenschappelijke diagonalen eene cf. vormen, welke ik de »harmonische" $(24_3, 18_4)$ zal noemen, omdat elke harer lijnen vier harmonische punten bevat. Zij bezit cf. diagonalen van tweeërlei soort, n.l. 32 »driepuntige" (de lijnen der beide $(12_4, 16_3)$) en 72 »tweepuntige", welke elk een punt der eene $(24_4, 16_3)$ met een punt der andere verbinden.

In de volledige vierzijde $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ *) is α_2 (het snijpunt der diagonalen $b_1 b_2$, $c_1 c_2$) harmonisch gescheiden van de diagonaal $a_1 a_2$; deze beschouwing levert voor het punt a_1 de volgende harmonische vierstralen.

$a_1\ \alpha_2$	$a_1\ a_2$	$a_1\ b_1\ c_1$	$a_1\ b_2\ c_2$
$a_1\ \alpha_3$	$a_1\ a_3$	$a_1\ b_1\ c_1$	$a_1\ b_3\ c_3$
$a_1\ \alpha_4$	$a_1\ a_4$	$a_1\ b_1\ c_1$	$a_1\ b_4\ c_4$
$a_1\ \delta_2$	$a_1\ a_2$	$a_1\ b_3\ c_3$	$a_1\ b_4\ c_4$
$a_1\ \delta_3$	$a_1\ a_3$	$a_1\ b_2\ c_2$	$a_1\ b_4\ c_4$
$a_1\ \delta_4$	$a_1\ a_4$	$a_1\ b_2\ c_2$	$a_1\ b_3\ c_3$

. . . . . (I)

*) De letters hebben hier dezelfde beteekenis als in het genoemde opstel. (Tabellen B, E, F).

»In elk punt der harmonische (24_3, 18_4) worden de 6 »tweepuntige diagonalen T van de 3 cf. lijnen harmonisch »gescheiden door de 6 paren, welke uit de 4 driepuntige »diagonalen D kunnen gevormd worden."

2. De snijpunten ($b_1 c_2$) en ($b_2 c_1$) van $a_2 b_1 c_2$ en $a_2 b_2 c_1$ met $a_1 \alpha_2$ zijn aan a_2 harmonisch toegevoegd ten opzichte van de paren b_1, c_2 en b_2, c_1. De diagonalen T bepalen dus op de diagonalen D 96 punten h, welke de drietallen van punten, op de lijnen D gelegen, tot harmonische groepen aanvullen. Daar elke T ook met een volledige vierzijde der geassocieërde (12_4, 16_3) in verband kan gebracht worden, bevat zij vier der punten h. Het punt a_1 is b. v. als snijpunt der diagonalen $\beta_3 \gamma_3$, $\beta_4 \gamma_4$ in de vierzijde ($\alpha_2 \delta_2$, $\beta_3 \gamma_3$, $\beta_4 \gamma_4$) harmonisch gescheiden van de diagonaal $\alpha_2 \delta_2$, zoodat $a_1 \alpha_2$ op de zijden $\beta_3 \beta_4$, $\gamma_3 \gamma_4$ de punten ($\beta_3 \beta_4$), ($\gamma_3 \gamma_4$) bepaalt, welke ten opzichte van de paren β_3, β_4 en γ_3, γ_4 aan het punt δ_2 harmonisch zijn toegevoegd.

Elke diagonaal D behoort tot drie volledige vierzijden der overeenkomstige (12_4, 16_3): elk der punten h is dus met drie diagonalen T incident. De lijn $a_2 b_1 c_2$ wordt b. v. in het punt ($b_1 c_2$) gesneden door de lijnen $a_1 \alpha_2$, $a_3 \gamma_4$, $a_4 \gamma_3$.

»De punten h, welke op de driepuntige diagonalen der »harmonische (24_3, 18_4) hare punten tot harmonische groe»pen aanvullen, vormen met de tweepuntige diagonalen dezer »cf. eene (96_3, 72_4). Op elke lijn der laatste cf. zijn de »vier cf. punten tot twee paren eener kwadratische involutie »vereenigd, waarvoor twee punten der (24_3, 18_4) de coïn»cidentiepunten zijn."

3. Het tweede tiental lijnen van tabel D *) vormt met de lijnen van tabel C †) de volgende (12_4, 16_3) A:

$\delta_2\ \delta_3\ \delta_4$	$a_2\ \delta_3\ a_4$	$b_2\ \delta_3\ b_4$	$c_2\ \delta_3\ c_4$	
$\delta_2\ a_3\ a_4$	$a_2\ a_3\ \delta_4$	$b_2\ a_3\ c_4$	$c_2\ a_3\ b_4$	. . . (II)
$\delta_2\ b_3\ b_4$	$a_2\ b_3\ c_4$	$b_2\ b_3\ \delta_4$	$c_2\ b_3\ a_4$	
$\delta_2\ c_3\ c_4$	$a_2\ c_3\ b_4$	$b_2\ c_3\ a_4$	$c_2\ c_3\ \delta_4$	

*) l. c. § 4.

†) l. c. § 3.

Zij bevat 9 punten der oorspronkelijke en 3 punten der geassociëerde (12_4, 16_3) A, terwijl van hare lijnen 6 tot de oorspronkelijke, ééne tot de geassociëerde en de overige 9 als diagonalen tot beide cf. behooren.

»De punten der harmonische (24_3, 18_4) kunnen tot 32 »cf. (24_4, 16_3) A gebracht worden, welke ieder 9 lijnen en »7 driepuntige diagonalen met haar gemeen hebben."

Met het oog op de §§ 4 en 5 van het aangehaalde opstel bevat de volgende tabel de drietallen van diagonalen der (12_4, 16_3) van tabel (II), welke in één punt samenkomen; 9 dezer punten behooren als doorsneden van eene *T* met eene *D* tot de punten *h*.

Diag.	Diag.	Diag.	Snijpunt.
$b_2\ c_2$	$b_3\ c_3$	$b_4\ c_4$	a_1
$c_2\ a_2$	$c_3\ a_3$	$c_4\ a_4$	b_1
$a_2\ b_2$	$a_3\ b_3$	$a_4\ b_4$	c_1
$b_2\ c_2$	$a_3\ \delta_3$	$a_4\ \delta_4$	$(b_2\ c_2)$
$c_2\ a_2$	$b_3\ \delta_3$	$b_4\ \delta_4$	$(c_2\ a_2)$
$a_2\ b_2$	$c_3\ \delta_3$	$c_4\ \delta_4$	$(a_2\ b_2)$
$a_2\ \delta_2$	$b_3\ c_3$	$a_4\ \delta_4$	$(b_3\ c_3)$
$b_2\ \delta_2$	$c_3\ a_3$	$b_4\ \delta_4$	$(c_3\ a_3)$
$c_2\ \delta_2$	$a_3\ b_3$	$c_4\ \delta_4$	$(a_3\ b_3)$
$a_2\ \delta_2$	$a_3\ \delta_3$	$b_4\ c_4$	$(b_4\ c_4)$
$b_2\ \delta_2$	$b_3\ \delta_3$	$c_4\ a_4$	$(c_4\ a_4)$
$c_2\ \delta_2$	$c_3\ \delta_3$	$a_4\ b_4$	$(a_4\ b_4)$

. . . (III)

Hieruit volgt, met behulp van tabel E, voor de geassociëerde der (12_4, 16_3) van tabel (II) dit overzicht:

a_1	b_1	c_1	$(b_2\ c_2)$	b_1	$(a_2\ b_2)$	
a_1	$(a_2\ c_2)$	$(a_2\ b_2)$	$(b_2\ c_2)$	$(a_2\ c_2)$	c_1	
a_1	$(a_3\ c_3)$	$(a_3\ b_3)$	$(b_2\ c_2)$	$(a_3\ c_3)$	$(a_4\ b_4)$	
a_1	$(a_4\ c_4)$	$(a_4\ b_4)$	$(b_2\ c_2)$	$(a_4\ c_4)$	$(a_3\ b_3)$	(IV)
$(b_3\ c_3)$	b_1	$(a_3\ b_3)$	$(b_4\ c_4)$	b_1	$(a_4\ b_4)$	
$(b_3\ c_3)$	$(a_2\ c_2)$	$(a_4\ b_4)$	$(b_4\ c_4)$	$(a_2\ c_2)$	$(a_3\ b_3)$	
$(b_3\ c_3)$	$(a_3\ c_3)$	c_1	$(b_4\ c_4)$	$(a_3\ c_3)$	$(a_2\ b_2)$	
$(b_3\ c_3)$	$(a_4\ c_4)$	$(a_2\ b_2)$	$(b_4\ c_4)$	$(a_4\ c_4)$	c_1	

Deze tabel vertoont eene merkwaardige overeenkomst met de tabel B *), welke de lijnen der uit de punten $(a_i\ b_i\ c_i)$ gevormde $(12_4, 16_3)$ A bevat; zij ontstaat uit de laatste, wanneer men a_i, b_i, c_i $(i = 2, 3, 4)$ achtereenvolgens door $(b_i\ c_i)$, $(c_i\ a_i)$, $(a_i\ b_i)$ vervangt.

»Elke drie collineaire punten eener $(12_4, 16_3)$ A vormen »met de 9 punten, door welke zij op de in hen samenko»mende cf. lijnen tot harmonische groepen worden aange»vuld, eene cf. van dezelfde soort."

Wordt deze beschouwing toegepast op alle lijnen van twee geassociëerde $(12_4, 16_3)$ A, dan heeft men:

»Uit de punten der harmonische $(24_3, 18_4)$ en der bij»behoorende $(96_3, 72_4)$ kunnen 32 cf. $(12_4, 16)$ A ge»vormd worden, welke ieder met deze beide cf. 3 resp. 9 »punten gemeen hebben."

4. Elke lijn H, welke in de $(12_4, 16_3)$ van tabel (IV) tot de restfiguur van $a_1\ b_1\ c_1$ behoort, verbindt drie punten van drie onderling gescheiden lijnen der $(12_4, 16_3)$ van tabel B †).

Daar nu elke lijn der laatste cf. in twee kwadrupels van onderling gescheiden lijnen voorkomt, dus van zes paren gescheiden is, zullen de 96 lijnen H, tot welke de cf. $(a_i\ b_i\ c_i)$ aanleiding geeft, zes aan zes door hare 48 punten h gaan.

---

*) l. c. § 3.
†) l. c. § 3.

Elke der 9 lijnen, welke in de cf. van tabel IV met $a_1\, b_1\, c_1$ verbonden zijn, is in eene volledige vierzijde harmonisch toegevoegd aan eene zijde ten opzichte van eene andere zijde en eene diagonaal; $a_1\,(a_2\, c_2)\,(a_2\, b_2)$ wordt b.v. door $a_1\, b_1\, c_1$ harmonisch gescheiden van $a_2\, b_2\, c_2$ en $a_1\, a_2$. Daar a_1 tot 6 volledige vierzijden der oorspronkelijke cf. behoort, komen in dat punt, behalve de in § 2 besproken 6 lijnen T, nog 12 door paren van punten h getrokken lijnen samen.

»De 48 tot eene $(12_4,\ 16_3)$ A behoorende punten h vor-»men met de 96 lijnen H en de 16 cf. lijnen eene $(48_7,\ 112_3)$; »van de 216 diagonalen dezer nieuwe cf. gaan er 18 door »elk punt der $(12_4,\ 16_3)$; onder deze diagonalen bevinden »zich 72, die tevens diagonalen der aan de geassocieerde »$(12_4,\ 16_3)$ A toekomende $(48_7,\ 112_3)$ zijn en met de beide »groepen van punten h de boven besproken $(96_3,\ 72_4)$ vor-»men".

»Door weglating van de 16 lijnen der $(12_4,\ 16_3)$ ontstaat »uit de $(48_7,\ 112_3)$ eene $(48_6,\ 96_3)$".

5. Elk paar driepuntige diagonalen der harmonische $(24_3,\ 18_4)$, welke geassocieerde lijnen eener $(15_4,\ 20_3)$ zijn, bevat een zestal onderling gescheiden punten; wordt zulk een zestal uit de harmonische cf. verwijderd, dan ontstaat eene merkwaardige cf. 18_3. Door weglating van de punten $a_1\, b_1\, c_1\, \delta_2\, \delta_3\, \delta_4$ uit de tabel F, *) verkrijgt men b. v. de cf.

$a_2\ \beta_2\ \gamma_2$	$b_2\ \alpha_2\ \gamma_2$	$c_2\ \alpha_2\ \beta_2$	
$a_3\ \beta_3\ \gamma_3$	$b_3\ \alpha_3\ \gamma_3$	$c_3\ \alpha_3\ \beta_3$	
$a_4\ \beta_4\ \gamma_4$	$b_4\ \alpha_4\ \gamma_4$	$c_4\ \alpha_4\ \beta_4$	. . . . (V)
$a_2\ a_3\ \alpha_4$	$b_2\ b_3\ \beta_4$	$c_2\ c_3\ \gamma_4$	
$a_3\ a_4\ \alpha_2$	$b_3\ b_4\ \beta_2$	$c_3\ c_4\ \gamma_2$	
$a_4\ a_2\ \alpha_3$	$b_4\ b_2\ \beta_3$	$c_4\ c_2\ \gamma_3$	

Deze cf. bestaat uit twee drietallen van onderling gescheiden driehoeken,

*) l. c. § 5.

$$\begin{array}{ccc|ccc} a_2 & a_3 & a_4 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ b_2 & b_3 & b_4 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(VI)}$$

welke zoodanige plaatsing ten opzichte van elkander hebben, dat elke zijde en het overstaande hoekpunt van iederen driehoek van eene groep met een hoekpunt en de overstaande zijde van een driehoek der andere groep incident zijn.

Elk punt der 18_3 komt evenals elke lijn slechts in een cf. driehoek voor. Van de 32 driepuntige diagonalen der harmonische cf. bevat deze 18_3 er nog de volgende twaalf,

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc||ccc|ccc} a_2 & b_4 & c_3 & \alpha_2 & \beta_4 & \gamma_3 & a_2 & b_3 & c_4 & \alpha_2 & \beta_3 & \gamma_4 \\ a_3 & b_2 & c_4 & \alpha_3 & \beta_2 & \gamma_4 & a_3 & b_4 & c_2 & a_3 & \beta_4 & \gamma_2 \\ a_4 & b_3 & c_2 & \alpha_4 & \beta_3 & \gamma_2 & a_4 & b_2 & c_3 & \alpha_4 & \beta_2 & \gamma_3 \end{array}\right| . \text{(VII)}$$

welke blijkbaar in vier verschillende zestallen van onderling gescheiden lijnen kunnen gerangschikt worden.

»Uit de punten en lijnen der harmonische $(24_3, 18_4)$ »kunnen 16 cf. 18_3 gevormd worden, van welke ieder uit »twee drietallen van driehoeken bestaat, zoodat elk hoek»punt van een driehoek der eene groep op eene zijde van »een driehoek der andere groep ligt".

6. Door toevoeging van de eerste zes lijnen van tabel VII ontstaat uit de cf. 18_3 eene $(18_4, 24_3)$, welke niet meer regelmatig is, daar zij wel ten opzichte van elk harer punten, maar niet ten opzichte van elke harer lijnen, op gelijksoortige wijze is samengesteld, dus niet reciprook overeenkomt met de harmonische $(24_3, 18_4)$. Elk punt behoort tot 7 cf. driehoeken; voor a_2 zijn het de driehoeken $a_2\, a_3\, a_4$, $a_2\, b_4\, \alpha_4$, $a_2\, b_4\, \beta_2$, $a_2\, c_3\, \alpha_3$, $a_2\, c_3\, \gamma_2$, $a_2\, \alpha_3\, \beta_2$, $a_2\, \alpha_4\, \gamma_2$.

Wordt ook het tweede zestal lijnen van tabel VII in de figuur opgenomen, dan ontstaat eene $(18_5, 30_3)$, waarin elk punt tot 15 cf. driehoeken behoort; voor het punt a_2 komen bij de bovengenoemde 7 nog deze: $a_2\, b_3\, b_4$, $a_2\, c_3\, c_4$, $a_2\, b_3\, \alpha_3$, $a_2\, b_3\, \beta_2$, $a_2\, c_4\, \alpha_4$, $a_2\, c_4\, \gamma_2$, $a_2\, \alpha_3\, \gamma_2$, $a_2\, \alpha_4\, \beta_2$.

»De punten der harmonische (24_3, 18_4) geven aanleiding »tot 64 cf. (18_4, 24_3) en even zoovele cf. (18_5, 30_3)".

7. Zondert men van de cf. 18_3 een zestal onderling gescheiden punten af, dan blijft eene (12_3, 18_2) over, waaruit door toevoeging van de nevenhoekpunten p_i q_i r_i der harmonische (24_3, 18_4) en van drie gescheiden lijnen der door hen bepaalde (9_2, 6_3) eene cf. 21_3 ontstaat. Zoo levert de vervanging van de punten a_2 b_3 c_4 α_2 β_3 γ_4 door p_i q_i r_i het volgende overzicht (l. c. § 8).

p_2	β_2	γ_2	q_2	b_2	γ_2	r_2	c_2	β_2	
p_3	a_3	γ_3	q_3	α_3	γ_3	r_3	c_3	α_3	
p_4	a_4	β_4	q_4	b_4	α_4	r_4	α_4	β_4	
p_4	a_3	α_4	q_4	b_2	β_4	r_4	c_2	c_3	. . . (VIII)
p_3	a_4	α_3	q_3	b_2	b_4	r_3	c_2	γ_3	
p_2	a_3	a_4	q_2	b_4	β_2	r_2	c_3	γ_2	
p_2	q_3	r_4	p_3	q_4	r_2	p_4	q_2	r_3	

In deze cf. behoort geen der punten p, q, r tot een cf. driehoek, terwijl de overige punten ieder in twee driehoeken voorkomen.

De cf. gaat over in eene (21_4, 28_3), wanneer men de volgende 7 driepuntige diagonalen als cf. lijnen beschouwt:

a_3	b_4	c_2				
a_4	b_2	c_3	p_2	q_4	r_3	
α_3	β_4	γ_2	p_3	q_2	r_4	. . . . (IX)
α_4	β_2	γ_3	p_4	q_3	r_2	

Uit de harmonische (24_3, 18_4) kan eene 21_3 afgeleid worden, welke van de 21_3 van tabel VIII in samenstelling verschilt, door de punten van een der geassocieërde (12_4, 16_3) A weg te laten en de nevenhoekpunten p, q, r met drie gescheiden lijnen der door hen bepaalde (9_2, 6_3) in de figuur op te nemen. Hierdoor ontstaat b.v. de tabel:

$a_1\ a_2\ p_2$	$b_1\ b_2\ q_2$	$c_1\ c_2\ r_2$	
$a_1\ a_3\ p_3$	$b_1\ b_3\ q_3$	$c_1\ c_3\ r_3$	
$a_1\ a_4\ p_4$	$b_1\ b_4\ q_4$	$c_1\ c_4\ r_4$	
$a_2\ a_3\ p_4$	$b_2\ b_3\ q_4$	$c_2\ c_3\ c_4$	. . . . (X)
$a_2\ a_4\ p_3$	$b_2\ b_4\ q_3$	$c_2\ c_4\ r_3$	
$a_3\ a_4\ p_2$	$b_3\ b_4\ q_2$	$c_3\ c_4\ r_2$	
$p_2\ q_3\ r_4$	$p_3\ q_4\ r_2$	$p_4\ q_2\ r_3$	

Dat deze 21_3 niet met de 21_3 van tabel VIII gelijksoortig is, blijkt terstond uit het aantal cf. driehoeken, waartoe de cf. punten behooren: naarmate zij tot de $(12_4, 16_3)$ cf. of tot hare nevenhoekpunten gerekend moeten worden, komen zij in 9 of 4 cf. driehoeken voor.

Uit deze 21_3 kunnen 8 cf. $(21_4, 28_3)$ afgeleid worden door toevoeging van 7 driepuntige diagonalen; elk der 8 kwadrupels van gescheiden lijnen der $(12_4, 16_3)$ waarvan de 21_3 de punten bevat, kan daartoe, in verband met de overige drie lijnen van de $(9_2, 6_3)$ der nevenhoekpunten, gebezigd worden. De 7 nieuwe lijnen kunnen b.v. zijn:

$a_1\ b_1\ c_1$		
$a_2\ b_3\ c_4$	$p_2\ q_4\ r_3$	
$a_3\ b_4\ c_2$	$p_3\ q_2\ r_4$	. . . . (XI)
$a_4\ b_2\ c_3$	$p_4\ q_3\ r_2$	

De beide cf. $(21_4, 28_3)$ hebben blijkbaar 26 lijnen gemeen; het aantal cf. driehoeken, waarin de cf. punten voorkomen, is voor de laatst beschouwde 9 of 4 (evenals voor de 21_3, waaruit zij afgeleid werd), voor de eerstgenoemde 5 of 0.

» Uit de punten der harmonische $(24_3, 18_4)$ en hare neven-
» hoekpunten kunnen 240 cf. 21_3 gevormd worden, welke
» van elke der beide geassocieerde $(12_4, 16_3)$ 6 punten en
» alle nevenhoekpunten bevatten, en 4 met de vorige onge-
» lijksoortige 21_3, welke de nevenhoekpunten en alle punten

»van eene der beide (12_4, 16_3) bevatten. Door toevoeging »telkens van een stel van 7 nieuwe lijnen kunnen uit deze »cf. (240 + 32) cf. (21_4, 28_3) gevormd worden; de laatste »32 verschillen in samenstelling van de 240 der eerste groep".

8. De in den aanhef van § 4 gemaakte opmerking geeft het middel om gemakkelijk een tabel voor de lijnen der aldaar gevonden cf. (48_6, 96_3) te verkrijgen. Daarbij blijkt, dat van de 16 restfiguren (9_2, 6_3) A, waaruit deze cf. is samengesteld, er slechts drie behoeven opgeschreven te worden, daar de overige door verschikking van letters en indices uit deze voortvloeien.

Deze zijn:

$$\begin{array}{lll|lll}
(a_2\ b_2) & (b_3\ c_3) & (a_4\ c_4) & (a_2\ b_2) & (b_4\ c_4) & (a_3\ c_3) \\
(a_3\ b_3) & (b_4\ c_4) & (a_2\ c_2) & (a_3\ b_3) & (b_2\ c_2) & (a_4\ c_4) \\
(a_4\ b_4) & (b_2\ c_2) & (a_3\ c_3) & (a_4\ b_4) & (b_3\ c_3) & (a_2\ c_2) \\
 & & & & & \\
(a_1\ b_1) & (b_2\ c_3) & (a_3\ c_2) & (a_1\ b_1) & (b_3\ c_2) & (a_2\ c_3) \\
(a_2\ b_2) & (b_3\ c_2) & (a_1\ c_4) & (a_2\ b_2) & (b_1\ c_4) & (a_3\ c_2) \quad ..(XII) \\
(a_3\ b_3) & (b_1\ c_4) & (a_2\ c_3) & (a_3\ b_3) & (b_2\ c_3) & (a_1\ c_4) \\
 & & & & & \\
(a_1\ b_2) & (b_1\ c_4) & (a_3\ c_1) & (a_1\ b_2) & (b_4\ c_1) & (a_2\ c_4) \\
(a_2\ b_1) & (b_4\ c_1) & (a_1\ c_3) & (a_2\ b_1) & (b_2\ c_3) & (a_3\ c_1) \\
(a_3\ b_4) & (b_2\ c_3) & (a_2\ c_4) & (a_3\ b_4) & (b_1\ c_4) & (a_1\ c_3).
\end{array}$$

Het eerste zestal lijnen staat op zichzelf; uit het tweede kunnen nog 8, uit het derde nog 5 zestallen afgeleid worden; dit hangt hiermede samen, dat de lijnen der oorspronlijke (12_4, 16_3), waarvoor deze getallen de restfiguren zijn, tot de grondvormen $a_1\ b_1\ c_1$, $a_1\ b_i\ c_i$ ($a_i\ b_1\ c_i$, $a_i\ b_i\ c_1$), $a_i\ b_k\ c_l$ (i, k, $l = 2, 3, 4$) kunnen gebracht worden.

Met behulp van de volledige tabel der bedoelde (48_6, 96_3) vindt men gemakkelijk, dat zij vijftientallen van onderling gescheiden lijnen bezit. Als voorbeeld diene de volgende groep.

$(a_1\ b_2)\ (b_1\ c_4)\ (a_3\ c_1)$	$(a_1\ b_3)\ (b_1\ c_2)\ (a_4\ c_1)$	
$(a_2\ b_1)\ (b_4\ c_1)\ (a_1\ c_3)$	$(a_3\ b_1)\ (b_2\ c_1)\ (a_1\ c_4)$	
$(a_3\ b_4)\ (b_2\ c_3)\ (a_2\ c_4)$	$(a_2\ b_4)\ (b_3\ c_2)\ (a_3\ c_4)$	
$(a_4\ b_3)\ (b_2\ c_4)\ (a_2\ c_3)$	$(a_4\ b_2)\ (b_3\ c_4)\ (a_3\ c_2)$	(XIII)
$(a_1\ b_4)\ (b_1\ c_3)\ (a_2\ c_1)$	$(a_2\ b_2)\ (b_3\ c_3)\ (a_4\ c_4)$	
$(a_4\ b_1)\ (b_3\ c_1)\ (a_1\ c_2)$	$(a_3\ b_3)\ (b_4\ c_4)\ (a_2\ c_2)$	
$(a_2\ b_3)\ (b_4\ c_2)\ (a_4\ c_3)$	$(a_4\ b_4)\ (b_2\ c_2)\ (a_3\ c_3)$	
$(a_3\ b_2)\ (b_4\ c_3)\ (a_4\ c_2)$		

Het is dus niet mogelijk, om uit deze cf. door de bovengebezigde methode van afzondering eener groep van cf. lijnen, eene eenvoudiger cf. verkrijgen. Maar door op te merken, dat in de cf. $(48_7,\ 112_3)$ van § 4 de lijn $(a_1\ b_1)$, $(b_1\ c_1)$, $(a_1\ c_1)$ voorkomt, die met bovenstaand vijftiental eene groep van 16 onderling gescheiden lijnen vormt, welke samen alle punten der cf. bevatten, komt men tot eene nieuwe $(48_6,\ 96_3)$ door deze 16 lijnen weg te laten.

De eerstgenoemde $(48_6,\ 96_3)$ heeft 144 tweepuntige diagonalen, die in twaalftallen met de punten der oorspronkelijke $(12_4,\ 16_3)$ incident zijn; daar zij elk twee punten der $(48_6,\ 96_3)$ bevatten, komen in elk dezer punten 6 zulke diagonalen samen. Door deze 144 lijnen in de cf. op te nemen, verkrijgt men dus eene cf. $(60_{12},\ 240_3)$, voor welke de lijnen der $(12_4,\ 16_3)$ zespuntige diagonalen zijn.

9. Met het oog op de uitkomsten der vorige §§ zal bij het onderzoek van cf. met vrucht gebruik gemaakt kunnen worden van deze regels.

»Bezit eene cf. $(p\ x_q,\ q\ x_p)$ eene groep van x onderling »gescheiden lijnen, dan levert de afzondering dezer lijnen »eene cf. $(p\ x_{q-1},\ (q-1)\ x_p)$ Heeft zij x diagonalen, welke »ieder eene verschillende groep van p cf. punten bevatten, »dan ontstaat door het toevoegen dezer p=puntige diago»nalen eene cf. $(p\ x_{q+1},\ (q+1)\ x_p)$."

RAPPORT

OVER DE VERHANDELING VAN DEN HEER DR. J. T. OUDEMANS,

GETITELD:

BEITRÄGE ZUR KENNTNISS DES CHIROMYS MADAGASCARIENSIS.

(Uitgebracht in de Vergadering van 30 Juni 1888).

De ondergeteekenden hebben de eer, over deze in hunne handen gestelde verhandeling, het volgende mede te deelen.

Genoemde verhandeling, groot 38 folio-pagina's schrift en vergezeld van 3 platen, bevat anatomische onderzoekingen en biologische aanteekeningen over Chiromys madagascariensis, van welke belangwekkende en zeldzame Prosimia van Madagascar tot nog toe slechts weinige exemplaren bekend zijn, terwijl slechts enkele schrijvers zich met haar anatomie hebben beziggehouden. Elk nieuw onderzoek over dit belangrijk dier is dan ook met vreugde te begroeten.

Den schrijver stonden 2 vrouwelijke exemplaren ten dienste. Het eene, in den tuin van het Kon. zoöl. Gen. Natura Artis Magistra gestorven, werd gedeeltelijk versch onderzocht; het andere exemplaar was in alcohol bewaard. Het onderzoek strekte zich uit over het spierstelsel, het oog, de hersenen, het darmkanaal, de bronchiaalvertakkingen, de tepels, alsmede over de wijze waarop het dier zich voedt. Van de figuren behooren er 9 bij het spierstelsel, 4 bij de hersenen, 1 bij het darmkanaal en 1 bij de voedingswijze van het dier.

Aan de behandeling van het spierstelsel is het grootste gedeelte van het onderzoek van den Heer OUDEMANS gewijd; met uitzondering van de aangezichtsspieren, die kortelings door RUGE zeer volledig bewerkt zijn en van de romp- en staartspieren, heeft de schrijver van het spierstelsel van Chiromys, in 't bizonder van dat der l dematen eene uitvoerige en nauwkeurige beschrijving geleverd. Bij vergelijking met oudere onderzoekingen zooals b. v. met die van OWEN, MURIE AND MIVART en ALIX, onderscheidt zich de hier voor ons liggende verhandeling door groote nauwkeurigheid. Het meest stemmen de door den schrijver verkregen resultaten met die van MURIE AND MIVART overeen. In menig opzicht bevat evenwel het onderzoek van den Heer OUDEMANS tal van nieuwe bizonderheden. De innervatie der spieren is in hoofdzaak niet nagegaan, hetgeen echter ten volle te verontschuldigen is, wanneer men bedenkt dat bij een dier als Chiromys, het homologiseeren der spieren zoo goed als geen bezwaren oplevert.

Bij de behandeling van het oog bespreekt de schrijver wel de oogleden en de oogspieren, maar van een speciaal onderzoek van den bulbus moest hij door den minder goeden conservatietoestand afzien.

Van de hersenen, (voor de eerste maal dat de hersenen van een Chiromys in verschen toestand onderzocht zijn), werden de grootte, de vorm, de convexiteit der hemisphaeren en de kleine hersenen meer speciaal behandeld, waarbij de schrijver tevens eenige vergelijkingen met de door OWEN onderzochte hersenen van een spiritusexemplaar van Chiromys en met de hersenen van Lemur catta en die van Perodicticus Potto ten beste geeft. De nomenclatuur van de sleuven der hemisphaeren ontleent de schrijver aan KRUEG, maar onthoudt zich van voorbarige vergelijkingen met bij den mensch voorkomende toestanden.

De door den Heer OUDEMANS aan het darmkanaal zijner beide exemplaren verrichte metingen doen ons zien, ook wanneer hij ze met de uitkomsten van OWEN en PETERS vergelijkt, dat de lengte der verschillende onderafdeelingen belangrijk afwisselt. Het onderzoek der bronchiaalvertakkin-

gen stemt overeen met de uitkomsten van PETERS, dat der tepels met de beschrijving van KLAATSCH.

Daar er veel tegenstrijdigheid heerscht over het voedsel van Chiromys, heeft de schrijver de litteratuur daarover nauwkeurig nagegaan en komt op grond van eigen waarnemingen tot de slotsom, dat Chiromys een frugivoor is, ofschoon zij evenwel sommige insecten niet versmaadt. De wijze waarop een nu nog in den Amsterdamschen dierentuin levend voorwerp haar voedsel (appelen en walnoten) tot zich neemt, wordt uitvoerig uiteengezet en door een afbeelding opgehelderd.

De litteratuur is uitvoerig en op doeltreffende wijze behandeld. De afbeeldingen zijn fraai en voortreffelijk uitgevoerd.

Wij zien in de verhandeling van den Heer OUDEMANS een zeer belangrijke en te waardeeren bijdrage tot de kennis van Chiromys, die vele nieuwe feiten aan het licht brengt en verder vele onderdeelen grondiger behandelt dan tot dusver geschied is. Wij aarzelen dan ook niet het onderzoek van den Heer OUDEMANS ter opneming in de Verhandelingen aan de Afdeeling aan te bevelen.

Amsterdam en Leiden,
Juni 1888.

M. FÜRBRINGER,
C. K. HOFFMANN.

RAPPORT

OVER EENE

VERHANDELING VAN DEN HEER DR. P. H. DOJES

„OVER DE AFHANKELIJKHEID DER OPLOSBAARHEID VAN DRUK EN TEMPERATUUR".

(Uitgebracht in de Vergadering van 30 Juni 1888).



De verhandeling van den Heer DOJES, waarover ons is opgedragen rapport uit te brengen, heeft tot titel: »de afhankelijkheid der oplosbaarheid van druk en temperatuur". Had de schrijver nauwkeurig willen zijn, dan had hij er wel mogen bijvoegen »der zouten"; immers alleen de oplosbaarheid daarvan wordt behandeld; doch ook dan ware o. i. de titel nog niet juist.

Het volgende geeft beter den inhoud der verhandeling weder: »een betrekking tusschen de verandering in de oplosbaarheid der zouten en de verandering in de spanning van den damp boven die oplossingen". Een vraag, betrekking hebbende op de verandering der electromotorische kracht van enkele cellen met de temperatuur, wordt aan het einde dezer niet zeer groote verhandeling mede door den schrijver behandeld.

In de eerste plaats zoekt de schrijver de betrekking tusschen de verandering in de oplosbaarheid bij drukverhooging en de vermindering in de spanning van den waterdamp boven een geconcentreerde zoutoplossing, vergeleken bij die boven zuiver water. Langs twee verschillende wegen wordt die betrekking verkregen, nl. met behulp van de theorie

van de thermodynamische potentiaal en door de beschouwing van een omkeerbaar isothermisch kringproces, waarbij eerst door druk zout uitgescheiden wordt, daarna water verdampt en ten laatsten het verdampte water weder met het uitgescheiden zout tot de vroegere oplossing wordt teruggebracht. Bij zulk een omkeerbaar isothermisch kringproces is de som der verrichte hoeveelheden arbeid gelijk nul, en het is van deze eigenschap, dat de schrijver gebruik maakt om de formule te vinden, die hem tot de slotsom leidt: dat bij alle zouten, die onder contractie oplossen, de oplosbaarheid bij verhooging van druk vermeerdert en omgekeerd.

Het schijnt ons toe, dat de schrijver dit resultaat als het voornaamste beschouwt wat uit de gevonden formule volgt. Ten minste dit is het eenige gevolg dat afzonderlijk aangeduid en in het licht gesteld wordt. Is dit zoo, dan zou niet veel nieuws gevonden en de formule van niet veel beteekenis zijn, want reeds vóór 15 à 16 jaren is door GIBBS de algemeene regel uitgesproken, waaronder dit als bijzonder geval behoort, nl. »bij verhooging van druk verdwijnt die phase die het grootste volumen heeft, en treedt in de plaats die van het kleinste volumen". Een ander gevolg der gevonden formule echter is óf nieuw óf ten minste veel minder algemeen bekend, nl. hoe de verandering der oplosbaarheid met verhoogden druk berekend zou kunnen worden, indien bekend is de mate waarin de spanning van den waterdamp met het zoutgehalte der oplossing samenhangt. Mocht men, zooals de schrijver doet, aannemen dat de druk regelmatig met aangroeiend zoutgehalte en evenredig daaraan afneemt, — iets dat approximatief bij zeer verdunde oplossingen geldt en wel eens de wet van WÜLLNER genoemd wordt, — dan liet de gevonden formule ook de bovengenoemde berekening toe. De schrijver waagt zich dan ook aan enkele berekeningen. Maar de overeenstemming met de ervaring is niet zeer groot en dit wordt door hem toegeschreven aan mogelijke fouten der waarneming. Wij schrijven ze toe aan het *niet* gelden der wet van WÜLLNER.

In de tweede plaats wordt behandeld de verandering der oplosbaarheid met de temperatuur, of liever deze verande-

ring wordt in verband gebracht met de vermindering der dampspanning.

Maar wij zullen niet verder in bijzonderheden treden en liever tot de formuleering van ons advies overgaan.

De verhandeling bevat iets nieuws of ten minste weinig bekends. Dit geeft den doorslag, waar wij anders zouden aarzelen. Want wij hebben tegen de behandeling, vooral uit het oogpunt van duidelijkheid en nauwkeurigheid, bedenkingen. Ook het gebruikte kringproces kan ons niet voldoen. Daarom raden wij de Akademie aan, de verhandeling wel in de Verslagen en Mededeelingen op te nemen; maar den schrijver vooraf met dit rapport in kennis te stellen, opdat hij met de Commissie in overleg trede over aan te brengen verbeteringen.

Amsterdam en *Haarlem*,
28 Juni 1888.

J. D. VAN DER WAALS.
J. BOSSCHA.

OVER EENIGE FORMULES,

BETREKKING HEBBENDE OP DE

VERANDERINGEN IN SAMENSTELLING DER OPLOSSINGEN, DOOR DRUK- EN TEMPERATUURSVERANDERINGEN BEWERKT.

DOOR

Dr. P. H. DOJES.

INLEIDING.

Ter rechtvaardiging en verduidelijking van de navolgende toepassingen van de theorie van den thermodynamischen potentiaal mogen hier de volgende beschouwingen voorafgaan.

De bekende theorie van GIBBS leert, dat er chemisch evenwicht bestaat, wanneer de thermodynamische potentiaal eene minimum-waarde heeft. Vooral door DUHEM *) is deze theorie systematisch doorgevoerd en toegepast. Ten einde tot grootere kortheid van uitdrukking te geraken, zullen hier eenige symbolische benamingen gebruikt worden. Men beschouwe n.l. een mengsel of oplossing van twee of meer bestanddeelen. De grootte van den thermodynamischen potentiaal, het volume, de energie en de entropie van het geheel hangt af van de hoeveelheid en de verhouding, waarin de bestanddeelen optreden. De bedoelde symbolische uitdrukkingen nu zijn de thermodynamische potentiaal, het volume, de energie

*) DUHEM. *Potentiel Thermodynamique etc.* Paris 1886. Men zie ook PLANCK. *Wied. Ann.* Bd 30 en 31. 1887.

en de entropie van elk der bestanddeelen, zooals zij in het mengsel voorkomen. Men houde wel in 't oog, dat zij alleen symbolisch zijn; hare werkelijke beteekenis moge uit het volgende blijken.

Zij F de thermodynamische potentiaal onder den constanten druk p van eene zekere hoeveelheid van een (homogeen) mengsel, die M_1 G. van de eene en M_2 G. van de andere stof bevat. Zij V het volume van deze hoeveelheid, U en S hare energie, respectievelijk entropie.

Daar F, V, U en S alle homogene functiën van den eersten graad in M_1 en M_2 zijn, bestaan de volgende gelijkheden:

$$M_1 \frac{\partial F}{\partial M_1} + M_2 \frac{\partial F}{\partial M_2} = F$$

$$M_1 \frac{\partial V}{\partial M_1} + M_2 \frac{\partial V}{\partial M_2} = V$$

$$M_1 \frac{\partial U}{\partial M_1} + M_2 \frac{\partial U}{\partial M_2} = U$$

$$M_1 \frac{\partial S}{\partial M_1} + M_2 \frac{\partial S}{\partial M_2} = S.$$

Verder heeft men daar $F = U - TS + pV$ is:

$$\frac{\partial F}{\partial M_1} = \frac{\partial U}{\partial M_1} - T \frac{\partial S}{\partial M_1} + p \frac{\partial V}{\partial M_1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial M_2} = \frac{\partial U}{\partial M_2} - T \frac{\partial S}{\partial M_2} + p \frac{\partial V}{\partial M_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \cdot \frac{\partial F}{\partial M_1} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial U}{\partial M_1} - T \frac{\partial S}{\partial M_1} + p \frac{\partial V}{\partial M_1} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial M_1} \left(\frac{\partial U}{\partial T} - S - T \frac{\partial S}{\partial T} + p \frac{\partial V}{\partial T} \right)$$

of, daar

$$\frac{\partial U}{\partial T} - T \frac{\partial S}{\partial T} + p \frac{\partial V}{\partial T} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \cdot \frac{\partial F}{\partial M_1} = - \frac{\partial S}{\partial M_1}.$$

Evenzoo is:

$$\frac{\partial}{\partial T} \cdot \frac{\partial F}{\partial M_2} = - \frac{\partial S}{\partial M_2} .$$

Verder is:

$$\frac{\partial}{\partial p} \cdot \frac{\partial F}{\partial M_1} = \frac{\partial}{\partial M_1}\left(\frac{\partial U}{\partial p} - T\frac{\partial S}{\partial p} + p\frac{\partial V}{\partial p} + V\right) = \frac{\partial V}{\partial M_1}$$

en evenzoo:

$$\frac{\partial}{\partial p} \cdot \frac{\partial F}{\partial M_2} = \frac{\partial V}{\partial M_2} .$$

Voert men de volgende notatiën in:

$$\frac{\partial F}{\partial M_1} = F_1 , \quad \frac{\partial F}{\partial M_2} = F_2 , \quad \frac{\partial V}{\partial M_1} = V_1 , \quad \frac{\partial V}{\partial M_2} = V_2 ,$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_1} = U_1 , \quad \frac{\partial U}{\partial M_2} = U_2 , \quad \frac{\partial S}{\partial M_1} = S_1 \text{ en } \frac{\partial S}{\partial M_2} = S_2 :$$

dan bestaan tusschen deze grootheden de betrekkingen:

$$F_1 = U_1 - T S_1 + p V_1$$

$$F_2 = U_2 - T S_2 + p V_2$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial T} = - S_1 , \quad \frac{\partial F_2}{\partial T} = - S_2 , \quad \frac{\partial F_1}{\partial p} = + V_1 \text{ en}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p} = + V_2 .$$

Tusschen de grootheden F_1, V_1, U_1, en S_1, F_2, V_2, U_2 en S_2 bestaan dus die betrekkingen, welke gelden voor den thermodynamischen potentiaal, het volume, de energie en de entropie van eene onvermengd voorkomende stof. Maar op zich zelf heeft het geen physischen zin, te spreken van den thermodynamischen potentiaal, het volume, de energie en de entropie van elk der bestanddeelen, zooals zij in het mengsel voorkomen.

Voor een mengsel van meer dan twee bestanddeelen gelden gelijke betrekkingen.

Beschouwen wij thans de voorwaarden voor chemisch evenwicht. Laten twee stoffen twee mengsels van verschillende samenstelling vormen; zij treden dan volgens de uitdrukking van Gibbs in twee verschillende phasen op. Voor het eene mengsel, dat M_1 G. resp. M_2 G. der beide bestanddeelen bevat, hebben F, V, U en S; F_1, V_1, U_1 en S_1; F_2, V_2, U_2 en S_2 de bovengemelde beteekenis. f, v, u en s; f_1, v_1, u_1 en s_1; f_2, v_2, u_2 en s_2 duiden dezelfde grootheden aan voor het andere mengsel, dat m_1, resp. m_2 G. bevat.

Vermeerdert de hoeveelheid m_1 met de oneindig kleine hoeveelheid dm_1 en vermindert dientengevolge M_1 met dm_1, dan is de variatie van den thermodynamischen potentiaal:

$$\frac{\partial f}{\partial m_1} dm_1 - \frac{\partial F}{\partial M_1} dm_1$$

en daar deze functie in den evenwichtstoestand eene minimumwaarde heeft, moet deze variatie gelijk nul zijn. Hieruit volgt:

$$\frac{\partial f}{\partial m_1} - \frac{\partial F}{\partial M_1} = 0 \quad \text{of} \quad f_1 - F_1 = 0.$$

Evenzoo geldt voor het andere bestanddeel;

$$f_2 - F_2 = 0,$$

indien f_2 en F_2 voor dit bestanddeel gelijke beteekenis hebben als f_1 en F_1 voor het eerstgenoemde.

In het vervolg hebben F_1, V_1, U_1 en S_1, F_2, V_2, U_2 en S_2 steeds de bovengemelde beteekenis:

$$\frac{\partial F}{\partial M_1}, \frac{\partial V}{\partial M_1}, \frac{\partial U}{\partial M_1}, \frac{\partial S}{\partial M_1} \text{ enz.};$$

de symbolische benamingen voor deze functiën: thermodynamische potentiaal, volume, energie en entropie van 1 G.

eener stof, zooals deze in het mengsel voorkomt, zijn hierdoor, wat hare beteekenis betreft, voldoende verklaard.

De in de formules optredende verschillen $v_1 - V_1$, $v_2 - V_2$, $-s_1 + S_1$ en $-s_2 + S_2$ hebben eene gemakkelijk aan te wijzen beteekenis. Immers, vermeerdert de hoeveelheid m_1 met dm_1 en vermindert dus gelijktijdig M_1 met dm_1, dan is de volume-vermeerdering van het systeem der beide mengsels:

$$\frac{\partial v}{\partial m_1} dm_1 - \frac{\partial V}{\partial M_1} dm_1 = dm_1 (v_1 - V_1)$$

$v_1 - V_1$ is dus de volume-vermeerdering, per G. berekend. Analoog is de beteekenis van $v_2 - V_2$. Evenzoo stelt

$$s_1 - S_1 = \frac{\partial s}{\partial m_1} - \frac{\partial S}{\partial M_1}$$

de entropie-vermeerdering voor, die bij de gemelde verandering van het systeem optreedt (ook weder per gewichtseenheid berekend).

Bij het vermengen van twee vloeistoffen kunnen verschillende gevallen voorkomen, waaronder echter twee het menigvuldigst optreden: zij kunnen of geheel zich vermengen, of slechts gedeeltelijk, zóódat twee lagen van verschillende samenstelling ontstaan. De thermodynamica leert, dat de damp boven deze beide vloeistofmengsels geheel dezelfde is en verder, dat zij beide hetzelfde vriespunt hebben. Daarentegen lossen gassen en vaste stoffen in het algemeen slechts tot een bepaald bedrag in eene vloeistof op. Met behulp van den thermodynamischen potentiaal kan men de veranderingen nagaan, die door veranderden druk en temperatuur in de samenstelling der mengsels en oplossingen optreden.

---

1. Twee gedeeltelijk mengbare vloeistoffen.

Beschouwen wij het systeem van de beide vloeistoffen en nemen wij als concreet voorbeeld de twee mengsels van

aethylaether en water. Voor de gemakkelijkheid der notatiën duide men alle grootheden, die op de benedenste laag betrekking hebben, door een' hoofdletter aan; daarentegen door een kleinen letter alle, die voor de bovenste laag gelden. In de eerstgenoemde laag kome voor M_1 G. aether en M_2 G. water; F_1 zij de thermodynamische potentiaal onder constanten druk van 1 G. aether, in deze laag voorkomende, F_2 die voor 1 G. water van dit mengsel, V_1 zij het volume, dat in het mengsel door 1 G. aether wordt ingenomen, V_2 het analoge volume van 1 G. water, S_1 en S_2 stellen de respectieve entropiën voor. (symbolische benamingen met boven verklaarde beteekenis.) Voor de bovenste laag hebben m_1, m_2, f_1, f_2, v_1, v_2, s_1 en s_2 gelijksoortige beteekenis. Men stelle ten slotte $\frac{M_2}{M_1} = H$ en $\frac{m_2}{m_1} = h$.

De beide mengsels verkeeren oorspronkelijk onder den druk van hun damp. In de volgende formules wordt deze kleine druk verwaarloosd. Als evenwichtsvergelijkingen heeft men: $f_1 - F_1 = 0$ en $f_2 - F_2 = 0$. Om den invloed der drukvermeerdering te leeren kennen, heeft men slechts neer te schrijven, dat in den nieuwen evenwichtstoestand de thermodynamische potentialen weer gelijk moeten zijn. Dit geeft:

$$f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial p} dp + \frac{\partial f_1}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial p} dp - F_1 - \frac{\partial F_1}{\partial p} dp - \frac{\partial F_1}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial p} dp = 0$$

en

$$f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial p} dp + \frac{\partial f_2}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial p} dp - F_2 - \frac{\partial F_2}{\partial p} dp - \frac{\partial F_2}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial p} dp = 0,$$

of daar

$$f_1 - F_1 = 0 \text{ en } f_2 - F_2 = 0:$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} + \frac{\partial f_1}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial F_1}{\partial p} - \frac{\partial F_1}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial p} + \frac{\partial f_2}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial F_2}{\partial p} - \frac{\partial F_1}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} = 0.$$

Vooreerst heeft men nu de boven (bladz. 228) afgeleide vergelijkingen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} = v_1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial p} = v_2, \quad \frac{\partial F_1}{\partial p} = V_1, \quad \frac{\partial F_2}{\partial p} = V_2;$$

verder bestaan de betrekkingen *):

$$\frac{\partial f_2}{\partial h} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial h} \quad \text{en} \quad \frac{\partial F_2}{\partial H} = -\frac{1}{H} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial H}.$$

Dit alles ingevoerd zijnde, vindt men door oplossing:

$$\frac{\partial log H}{\partial p} = \frac{v_1 - V_1 + h(v_2 - V_2)}{\frac{\partial F_1}{\partial H}(H-h)} \text{ en } \frac{\partial log h}{\partial p} = \frac{v_1 - V_1 + H(v_2 - V)}{\frac{\partial f_1}{\partial h}(H-h)} . \quad (1)$$

De damp boven een vloeistofmengsel bevat dampen der beide vloeistoffen; kent men de wet, welke volgens de partiëele spanning van een der dampen afhangt van de verhouding, waarin beide vloeistoffen gemengd zijn, dan kan men

$$\frac{\partial F_1}{\partial H} \quad \text{en} \quad \frac{\partial f_1}{\partial h}$$

berekenen. Men make nl. de onderstelling, dat beide dampen zich als volkomen gassen gedragen en dat hunne partiëele spanningen P_1 en P_2 zijn, zoodat de totale dampdruk $P = P_1 + P_2$ is. Is F dan de thermodynamische potentiaal onder den totalen druk P van het vloeistofmengsel, dat M_1 G. van de eene en M_2 G. van de andere vloeistof bevat, en is evenzoo ψ die voor het dampmengsel, dat uit n_1 G. van de eene en uit n_2 G. van de andere stof in dampvorm bestaat, dan bestaat ook hier weer de evenwichtsvoorwaarde:

$$\frac{\partial F}{\partial M_1} - \frac{\partial \psi}{\partial n_1} = 0.$$

Men kan nu ψ nog anders uitdrukken, daar volgens on-

*) Duhem, *Potentiel Thermodynamique*, Paris 1886.

derstelling beide dampen zich als volkomen gassen verhouden. Denkt men zich nl. beide damphoeveelheden van het mengsel gescheiden en beide afzonderlijk op het volume gebracht, dat door het dampmengsel wordt ingenomen, dan is de som van de functiën energie, entropie en thermodynamische potentiaal (onder den betreffenden partiëelen druk) der beide afzonderlijke dampmassa's gelijk die functiën, welke voor het dampmengsel gelden. Is dus φ_1 de thermodynamische potentiaal onder den druk P_1 van 1 G. van den eenen damp en φ_2 die onder den druk P_2 van 1 G. vau den anderen damp, dan is:

$$\psi = n_1 \varphi_1 + n_2 \varphi_2 \text{, waaruit volgt, dat } \frac{\partial \psi}{\partial n_1} = \varphi_1 \text{ is.}$$

Om dit te bewijzen, houde men in 't oog, dat in de formule

$$\frac{\partial F}{\partial M_1} - \frac{\partial \psi}{\partial n_1} = 0$$

de differentiatie van F naar M_1 en van ψ naar n_1 plaats moet hebben bij constante waarde van den totalen druk P. Daar nu φ_1 van P_1 en φ_2 van P_2 afhangt, zullen wij eerst φ_1 en φ_2 uitdrukken in P_1, n_1 en n_2. Duiden $R_1 T$ en $R_2 T$ de bekende produkten aan voor 1 G. van elk der dampen, die zich volgen onderstelling als volkomen gassen gedragen, dan is:

$$P_1 = \frac{n_1 R_1}{n_1 R_1 + n_2 R_2} P \text{ en } P_2 = \frac{n_2 R_2}{n_1 R_1 + n_2 R_2} P$$

en dus:

$$\frac{\partial P}{\partial n_1} = \frac{P_2 R_1}{n_1 R_1 + n_2 R_2} = \frac{P_1 P_2}{n_1 P} \text{ en } \frac{\partial P_2}{\partial n_1} = - \frac{P_1 P_2}{n_1 P} .$$

Men vindt dus voor $\frac{\partial \psi}{\partial n_1}$, wanneer P constant blijft:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_1} = \varphi_1 + n_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial n_1} + n_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial P_2} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial n_1} .$$

Daar

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial P_1} = V_{d_1} = \frac{R_1 T}{P_1}$$

(het volume van 1 G. van den damp onder den druk P_1) en evenzoo

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial P_2} = \frac{R_2 T}{P_2}, \quad \frac{n_1 R_1}{P_1} = \frac{n_2 R_2}{P_2}$$

en eindelijk

$$\frac{\partial P_1}{d n_1} = - \frac{\partial P_2}{\partial n_1},$$

vallen de twee laatste termen tegen elkaar weg en er blijft over:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_1} = \varphi_1 .$$

Evenzoo is

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_2} = \varphi_2 .$$

Verandert nu de verhouding $\frac{M_2}{M_1} = H$, dan verandert tevens de dampdruk. $F_1 = \frac{\partial F}{\partial M_1}$ hangt zoowel van H als van den totalen druk P af; $\frac{\partial \psi}{\partial n_1} = \varphi_1$ zijnde, verandert alleen voor zoover de partiëele druk P_1 verandert.

De differentiatie naar H geeft dus:

$$\frac{\partial F_1}{\partial H} + \frac{\partial F_1}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial H} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial H} = 0.$$

Nu is $\frac{\partial \varphi_1}{\partial P_1} = V_{d_1}$, waarin V_{d_1} het volume van 1 G. van dezen damp onder den druk P_1 voorstelt.

$$\frac{\partial F}{\partial P} = V_1 = \frac{\partial V}{\partial M_1}$$

is de volume-vermeerdering van het vloeistofmengsel, veroorzaakt door dat de gewichtseenheid van de vloeistof M_1 in het mengsel overgaat.

Men vindt dus:

$$\frac{\partial F_1}{\partial H} = V_{d_1} \frac{\partial P_1}{\partial H} - V_1 \frac{\partial P}{\partial H}.$$

Verwaarloost men, daar V_1 klein is tegenover V_{d_1} en $\frac{\partial P}{\partial H}$ slechts om $\frac{\partial P_2}{\partial H}$ grooter is dan $\frac{\partial P_1}{\partial H}$, den term $V_1 \frac{\partial P}{\partial H}$, dan komt men tot de benaderde formule:

$$\frac{\partial F_1}{\partial H} = V_{d_1} \frac{\partial P_1}{\partial H}.$$

Evenzoo is:

$$\frac{\partial f_1}{\partial h} = v_{d_1} \frac{\partial p_1}{\partial h}.$$

Neemt men verder nog aan, dat de wet van Mariotte geldig is, en stelt men diensvolgens $P_1 V_{d_1} = p_1 v_{d_1} = R_1 T$, dan komt men tot de vergelijkingen:

$$\frac{\partial F_1}{\partial H} = V_{d_1} \frac{\partial P_1}{\partial H} = \frac{R_1 T}{P_1} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial H} \text{ en } \frac{\partial f_1}{\partial h} = v_{d_1} \frac{\partial p_1}{\partial h} = \frac{R_1 T}{p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial h}.$$

Voor het geval, waarop de vergelijkingen (1) betrekking hebben is $P_1 = p_1$ te stellen;

$$\frac{\partial P_1}{\partial H} \text{ en } \frac{\partial p_1}{\partial h}$$

zijn echter verschillend. De invoering van deze waarden geeft de vergelijkingen:

$$\frac{\partial \log H}{\partial p} = \frac{v_1 - V_1 + h(v_2 - V_2)}{R_1 T \cdot \frac{\partial P_1}{\partial H}(H - h)} P_1 \text{ en}$$

$$\frac{\partial \log h}{\partial p} = \frac{v_1 - V_1 + H(v_2 - V_2)}{R_1 T \cdot \frac{\partial p_1}{\partial h}(H - h)} P_1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1^a)$$

Alle tot nu toe uitgevoerde experimenteele onderzoekingen schijnen te leeren, dat in deze formules $\frac{\partial p_1}{\partial h}$ en $\frac{\partial P_1}{\partial H}$ negatief zijn en wel is $-\frac{\partial p_1}{\partial h} > -\frac{\partial P_1}{\partial H}$.

Hebben $v_1 - V_1$ en $v_2 - V_2$ hetzelfde teeken, dan is dit ook het geval met $\frac{\partial h}{\partial p}$ en $\frac{\partial H}{\partial p}$. Opdat na drukverhooging de beide mengsels in samenstelling minder van elkander verschillen, hetgeen den overgang vormt tot volkomen vermenging, moet $\frac{\partial h}{\partial p}$ positief en $\frac{\partial H}{\partial p}$ negatief zijn; hieruit volgt $v_1 - V_1 < 0$ en $v_2 - V_2 > 0$; deze twee laatste voorwaarden zijn echter niet voldoende. De verandering der concentratie door druk verhooging is verder, al het overige gelijk zijnde, omgekeerd evenredig met de vermindering in dampspanning.

De afhankelijkheid der samenstelling der twee lagen van de temperatuur wordt aangegeven door de twee vergelijkingen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial T} + \frac{\partial f_1}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial T} - \frac{\partial F_1}{\partial T} - \frac{\partial F_1}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial T} = 0 \text{ en}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial T} + \frac{\partial f_2}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial T} - \frac{\partial F_2}{\partial T} - \frac{\partial F_2}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial T} = 0 .$$

Hierin is:

$$\frac{\partial f_1}{\partial T} = -s_1, \frac{\partial F_1}{\partial T} = -S_1, \frac{\partial f_2}{\partial T} = -s_2 \text{ en } \frac{\partial F_2}{\partial T} = -S_2.$$

Vermeerdert m_1 met $d\,m_1$ en vermindert M_1 met dm_1, dan worde in 't geheel eene warmtehoeveelheid opgenomen, gelijk aan $\lambda_1\, d\,m_1$. Vermeerdert m_2 met $d\,m_2$ en M_2 met $-d\,m_2$, dan worde $\lambda_2\; d\,m_2$ opgenomen. Met het oog hierop, bestaan dan de gelijkheden:

$$\frac{\partial f_1}{\partial T}-\frac{\partial F_1}{\partial T}=-s_1+S_1=-\frac{\lambda_1}{T} \text{ en } \frac{\partial f_2}{\partial T}-\frac{\partial F_2}{\partial T}=-s_2+S_2=-\frac{\lambda_2}{T}.$$

Daar verder:

$$\frac{\partial f_2}{\partial h}=-\frac{1}{h}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial h} \text{ en } \frac{\partial F_2}{\partial H}=-\frac{1}{H}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial H},$$

gaan de bovenstaande vergelijkingen over in:

$$-\frac{\lambda_1}{T}=\frac{\partial F_1}{\partial H}\cdot\frac{\partial H}{\partial T}-\frac{\partial f_1}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial T} \text{ en}$$

$$-\frac{\lambda_2}{T}=-\frac{1}{H}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial H}\cdot\frac{\partial H}{\partial T}+\frac{1}{h}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial T},$$

waaruit door oplossing volgt:

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\lambda_1+h\lambda_2}{T}&=\frac{\partial log H}{\partial T}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial H}(H-h)=\frac{\partial log H}{\partial T}\cdot V_{d_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial H}(H-h)\\-\frac{\lambda_1+H\lambda_2}{T}&=\frac{\partial log h}{\partial T}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial h}(H-h)=\frac{\partial log h}{\partial T}\cdot v_{d_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial h}(H-h)\end{aligned}\right\}.(2)$$

Men kan verder nog voor $V_{d_1}\frac{\partial P_1}{\partial H}$ en $v_{d_1}\frac{\partial p_1}{\partial h}$ de boven ontwikkelde waarden invoeren.

Over de afhankelijkheid der samenstelling der twee mengsels van den druk zijn in 't geheel geen proeven genomen; ook die over de veranderlijkheid met de temperatuur zijn weinig talrijk *).

Opdat temperatuursverhooging het verschil in samenstelling verminderе, moet $\lambda_1+h\lambda_2<0$ en $\lambda_1+H\lambda_2>0$ zijn, waaruit volgt: $\lambda_1<0$ en $\lambda_2>0$; deze laatste twee voorwaarden zijn evenwel niet voldoende.

De combinatie van de vergelijkingen (1) en (2) geeft:

---

*) Ostwald, *Lehrbuch der allgemeinen Chemie.*

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p} &= -\frac{\partial H}{\partial T} \cdot \frac{v_1 - V_1 + h(v_2 - V_2)}{\lambda_1 + h\lambda_2} T \\ \text{en } \frac{\partial h}{\partial p} &= -\frac{\partial h}{\partial T} \cdot \frac{v_1 - V_1 + H(v_2 - V_2)}{\lambda_1 + H\lambda_2} T\end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

---

2. Vaste lichamen en gassen.

Veel eenvoudiger zijn de formules, die de afhankelijkheid der oplosbaarheid van vaste stoffen en gassen van temperatuur en druk aangeven.

Bij de notatiën neme men aan, dat de index 1 op de vloeistof, 2 op de vaste stof of het gas slaat. f_2 zij de thermodynamische potentiaal onder constanten druk van 1 G. opgelost, ψ_2 die van 1 G. onopgelost zout, v_2 en V_2 de volumina, s_2 en Σ_2 de entropiën van 1 G. zout in opgelosten, resp. in onopgelosten toestand. (symbolisch op te vatten.) h is de gewichtsverhouding, waarin zout en vloeistof in de oplossing voorkomen.

Alsdan gelden de vergelijkingen:

$$\frac{\partial f_2}{\partial p} + \frac{\partial f_2}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial \psi_2}{\partial p} = 0$$

voor de veranderlijkheid met den druk en

$$\frac{\partial f_2}{\partial T} + \frac{\partial f_2}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial T} - \frac{\partial \psi_2}{\partial T} = 0$$

voor die met de temperatuur.

Men heeft:

$$\frac{\partial f_2}{\partial p} = v_2, \frac{\partial \psi_2}{\partial p} = V_2, \frac{\partial f_2}{\partial h} = -\frac{1}{h}\frac{\partial f_1}{\partial h}, \frac{\partial f_2}{\partial T} = -s_2, \frac{\partial \psi_2}{\partial T} = -\Sigma_2.$$

Stelt men $s_2 - \Sigma_2 = \frac{A_2}{T}$, dan is A_2 de warmtehoeveel-

heid, die opgenomen wordt, wanneer eene kleine zouthoeveelheid in eene bijna verzadigde oplossing overgaat (per G. berekend).

De invoering al dezer waarden, geeft de twee vergelijkingen:

$$\frac{\partial \log h}{\partial p} = - \frac{V_2 - v_2}{\frac{\partial f_1}{\partial h}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

en

$$\frac{\partial \log h}{\partial T} = - \frac{A_2}{T \frac{\partial f_1}{\partial h}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Door combinatie van (4) en (5) vindt men:

$$\frac{\partial h}{\partial p} = \frac{V_2 - v_2}{A_2} T \cdot \frac{\partial h}{\partial T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Stellen v_{d_1} en p_1 volume en druk van den damp voor boven de verzadigde oplossing en volgt de damp de wet van Mariotte, dan is:

$$\frac{\partial f_1}{\partial h} = v_{d_1} \frac{\partial p_1}{\partial h} = R_1 T \cdot \frac{\partial \log p_1}{\partial h}$$

en (4) en (5) gaan over is:

$$\frac{\partial \log h}{\partial p} = - \frac{V_2 - v_2}{R_1 T \cdot \frac{\partial \log p_1}{\partial h}} \quad \ldots\ldots\ldots (4^a)$$

en

$$\frac{\partial \log h}{\partial T} = - \frac{A_2}{R_1 T^2 \cdot \frac{\partial \log p_1}{\partial h}} \quad \ldots\ldots (5^a)$$

Zeer eenvoudig worden deze formules, indien de wet van Wüllner geldig is; alsdan heeft $\frac{\partial p_1}{\partial h}$ de waarde $-b$, b

eene constante zijnde, die alleen nog van de temperatuur afhangt. Deze substitutie uitvoerende, vindt men:

$$\frac{\partial \log h}{\partial p} = \frac{p_1}{b R_1 T}(V_2 - v_2) \text{ en } \frac{\partial \log h}{\partial T} = \frac{p_1}{b R_1 T^2} A_2.$$

De formule (6) is door BRAUN *) langs anderen weg afgeleid; de formule (5^a) door DUHEM †) met behulp van den thermodynamischen potentiaal. De door KIRCHHOFF §) afgeleide formule voor de oplossingswarmte stemt niet met de door DUHEM gegevene overeen.

Voor zoutoplossingen zijn door SORBY **) eenige quantitatieve bepalingen omtrent de verandering der oplosbaarheid door drukverhooging geschied. TAMMANN heeft ††) verder voor de oplossingen, die SORBY onderzocht, ook de dampspanningen onderzocht, zoodat men aan zijne tabellen de waarde van b ontleenen kan. De overeenstemming tusschen de waargenomen en de berekende waarde van $\frac{\partial h}{\partial p}$ is echter vrij slecht en is waarschijnlijk te verklaren, hetzij door waarnemingsfouten, bij de bepaling van dergelijke kleine grootheden als $\frac{dh}{dp}$ en $V_2 - v_2$ noodzakelijk begaan of door

---

*) F. BRAUN, *Wied. Annalen*, Bd. 30, pag. 250, 1887. BRAUN begaat overigens eene onnauwkeurigheid door te stellen: (pag. 253):

$$u - \bar{\omega} + k\frac{\partial u}{\partial g} = -I\lambda,$$

hetgeen streng genomen moet zijn:

$$u - \bar{\omega} + k\frac{\partial u}{\partial g} = -I\lambda - p\,v\,\varphi.$$

Daardoor wordt zijne eindvergelijkingen volmaakt gelijk aan de hier ontwikkelde:

$$\varepsilon I\lambda = T\eta\,v\,\varphi.$$

†) DUHEM, *Comptes Rendus*, T. 104, pag. 683, 1887.

§) KIRCHHOFF, *Poggend. Ann.*, Bd. 103, pag. 177, 1858.

**) SORBY, *Phil. Mag.*, Vol. 27, 4th Ser., pag. 145, 1864.

††) TAMMANN, *Wied. Ann.*, Bd. 24, pag. 523, 1885.

de onjuistheid van de wet van WÜLLNER. Ook voor de meest verdunde oplossing (11,05 G. $K_2 SO_4$ in 100 G. water) is de overeenstemming onbevredigend; SORBY geeft aan 0,0002914, de berekening levert 0,0002207. p is daarbij in atmosfeeren uitgedrukt.

Voor de oplossing van gassen in niet of weinig vluchtige vloeistoffen, gelden geheel analoge formules. De index 1 hebbe betrekking op de vloeistof, de index 2 op het gas. F_2 zij de thermodynamische potentiaal onder constanten druk van 1 G. der gasvormige stof, f_2 die van 1 G. opgeloste stof; v_2 en V_2 zij het volumen, s_2 en S_2 de entropie in gasvormigen, resp. in opgelosten toestand (symbolische benamingen.) h zij de verhouding van de gewichtshoeveelheden gas en vloeistof, waarin zij in de oplossing voorkomen.

De gelijkheid $f_2 - F_2 = 0$ geeft door differentiatie naar p en T:

$$\frac{\partial F_2}{\partial p} - \frac{\partial f_2}{\partial p} - \frac{\partial f_2}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial p} = 0 \text{ en } \frac{\partial F_2}{\partial T} - \frac{\partial f_2}{\partial T} - \frac{\partial f_2}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial T} = 0.$$

Stelt men $S_2 - s_2 = \frac{L_2}{T}$, dan beteekent $L_2 \, d m_2$ de (negatieve) warmtehoeveelheid, die opgenomen wordt, wanneer bij constante temperatuur eene kleine gashoeveelheid $d m_2$ door de bijna verzadigde oplossing wordt geabsorbeerd. Door invoering van deze waarde en door substitutie van $\frac{\partial f_2}{\partial p}$ enz. door hunne bekende waarden, vindt men:

$$v_2 - V_2 = \frac{\partial f_2}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial p} \text{ en } \frac{L_2}{T} = \frac{\partial f_2}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial T}.$$

De combinatie van deze beide vergelijkingen geeft:

$$\frac{\partial h}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial T} \frac{v_2 - V_2}{L_2} T.$$

Bij niet te hoogen druk mag men V_2 tegenover v_2 ver-

waarloozen; volgt verder het gas de wet van MARIOTTE, dan is:

$$v_2 = \frac{R\,T}{p}$$

en de laatste vergelijking verandert in:

$$p \frac{\partial h}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial T} \frac{R\,T^2}{L_2}.$$

Daar volgens de wet van HENRY $h = p\,\beta$, waarin β den absorptie-coëfficiënt voorstelt, die niet van p afhangt, gaat deze formule over in:

$$L_2 = R\,T^2 \cdot \frac{\partial \log \beta}{d\,T}$$

en deze stemt geheel overeen met de vroeger langs anderen weg door KIRCHHOFF *) afgeleide.

---

3. BEVRIEZING VAN ZOUTOPLOSSINGEN.

De analogie tusschen het verschijnsel der verzadiging en dat der bevriezing leidt er toe, ook den invloed van den druk op dit verschijnsel te bespreken. Bij de verzadigingstemperatuur is de oplossing in evenwicht met vast zout; bij het vriespunt in evenwicht met ijs.

Zij (symbolisch) f_1 weder de thermodynamische potentiaal onder constanten druk van 1 G. water, in de oplossing voorkomende, ψ_1 die van 1 G. ijs. Alsdan is bij het vriespunt $f_1 - \psi_1 = 0$. Indien men nu den druk verhoogt, kan men de concentratie van de oplossing berekenen, die onder dezen hoogeren druk *hetzelfde vriespunt* heeft. De gelijkheid $f_1 - \psi_1 = 0$ gedifferentiëerd, geeft:

---

*) KIRCHHOFF, l. c. pag. 194.

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} + \frac{\partial f_1}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial \psi_1}{\partial p} = 0 \text{ of } \frac{\partial h}{\partial p} = \frac{V_1 - v_1}{\frac{\partial f_1}{\partial h}}.$$

V_1 is het volumen van 1 G. ijs, (bij de temperatuur van het vriespunt der oplossing onder den druk p) en v_1 dat van 1 G. water, zooals dit in de oplossing voorkomt (symbolisch).

Daar

$$\frac{\partial f_1}{\partial h} = v_{d_1} \frac{\partial p_1}{\partial h}$$

en $\frac{\partial p_1}{\partial h}$ negatief is, daar verder het specifiek volumen van ijs grooter is dan dat van zuiver water en water in 't algemeen onder contractie door eene oplossing wordt opgenomen, is $V_1 - v_1$ positief; hieruit volgt dat $\frac{\partial h}{\partial p}$ negatief is, m. a. w. eene meer verdunde oplossing heeft onder hoogeren druk hetzelfde vriespunt.

De temperatuursverandering, die men moet veroorzaken, opdat eene oplossing van *dezelfde concentratie* onder verhoogden druk met ijs in evenwicht is, wordt gegeven door de vergelijking:

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} + \frac{\partial f_1}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial \psi_1}{\partial p} - \frac{\partial \psi_1}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial p} = 0.$$

Men stelle weder

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial T} - \frac{\partial f_1}{\partial T} = \frac{L_1}{T};$$

L_1 beteekent dan de naar verhouding voor 1 G. berekende hoeveelheid warmte, die opgenomen wordt, wanneer eene kleine hoeveelheid ijs bij het vriespunt in de zoutoplossing overgaat. Bijgevolg is:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v_1 - V_1}{L_1} T.$$

Daar voor waterige oplossingen algemeen $v_1 < V_1$ en L_1 (de som van de smeltingswarmte van ijs en van de verdunningswarmte) positief is, heeft $\frac{\partial T}{\partial p}$ eene negatieve waarde.

Wanneer de volumeverandering van het oplossingsmiddel bij den overgang van den vasten in den vloeibaren toestand verschillend teeken heeft van die bij den overgang van de vloeistof in de oplossing, dan bestaat de mogelijkheid, dat eene oplossing zich onder vermeerderden druk in omgekeerden zin gedraagt als het zuivere oplossingsmiddel.

De vraag, naar de concentratieverandering eener oplossing, die bij veranderde temperatuur met ijs in aanraking blijft, wordt beantwoord door de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial f_1}{\partial T} + \frac{\partial f_1}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial T} - \frac{\partial \psi_1}{\partial T} = 0\,,$$

of daar:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial T} - \frac{\partial f_1}{\partial T} = \frac{L_1}{T}$$

is, volgt uit deze gelijkheid:

$$\frac{\partial h}{\partial T} = \frac{L_1}{T \frac{\partial f_1}{\partial h}}\,.$$

In dezen vorm geeft de vergelijking de vermindering der concentratie aan, die de oplossing moet ondergaan, opdat zij bij verhoogde temperatuur met ijs in evenwicht is. Het omgekeerde differentiaal-quotiënt $\frac{\partial T}{\partial h}$ geeft dus eenvoudig aan, met hoeveel de temperatuur verlaagd moet worden, wanneer h met dh wordt vermeerderd, m. a. w. $\frac{\partial T}{\partial h}$ is de verlaging van het vriespunt. Men vindt dus daarvoor:

$$\frac{\partial T}{\partial h} = \frac{T \frac{\partial f_1}{\partial h}}{L_1}\,.$$

Voor verdunde oplossingen gaat L_1 over in de smeltingswarmte van ijs; daar verder $\frac{\partial f_1}{\partial h} = v_{d_1} \frac{\partial p_1}{\partial h}$ en v_{d_1} het volume voorstelt van 1 G. damp boven ijs bij 0°, drukt deze vergelijking uit, dat voor alle verdunde oplossingen de verlaging van het vriespunt evenredig is met de vermindering der dampspanning.

Men kan evenwel ook voor oplossingen van willekeurige concentratie aan deze formule eene merkwaardige en volkomen streuge gedaante geven. Daar nl. bij het vriespunt eener oplossing onder den druk van haren damp (bij het drievoudige punt) deze druk gelijk is aan dien van den damp boven ijs, kan men L_1 gemakkelijk uitdrukken. Men late nl. bij het drievoudige punt eene kleine hoeveelheid ijs verdampen; deze damphoeveelheid voere men, zonder voorafgaande compressie (daar de dampspanningen gelijk zijn) in de oplossing over.

Alsdan ziet men, dat L_1 het verschil is van de twee verdampingswarmten, onverschillig of de damp zich als volkomen gas gedraagt of niet. Zij π de spanning van den waterdamp boven ijs en p_1 die boven de zoutoplossing; bij het drievoudige punt van de oplossing is $p_1 = \pi$; de specifieke volumina van den damp zijn dus ook dezelfde.

Men vindt dus:

$$L_1 = v_{d_1} T \left(\frac{d\pi}{dT} - \frac{\partial p_1}{\partial T} \right).$$

Dit in

$$\frac{\partial T}{\partial h} = T \frac{\frac{\partial f_1}{\partial h}}{L_1}$$

ingevoerd zijnde, geeft:

$$\frac{\partial T}{\partial h} = \frac{T v_{d_1} \frac{\partial p_1}{\partial h}}{T v_{d_1} \left(\frac{d\pi}{dT} - \frac{\partial p_1}{\partial T} \right)} = \frac{\frac{\partial p_1}{\partial h}}{\frac{d\pi}{dT} - \frac{\partial p_1}{\partial T}}.$$

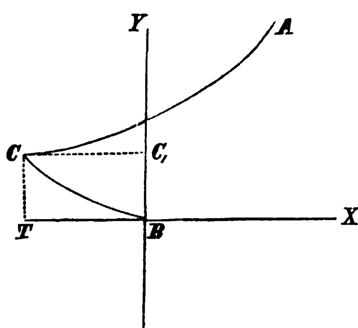
De verlaging van het vriespunt door eene bepaalde ver-

meerdering der concentratie is ook bij eene willekeurig geconcentreerde oplossing evenredig met de vermindering in dampspanning, door dezelfde concentratie-vermeerdering veroorzaakt; de veranderlijke proportionaliteitsfactor $\frac{d\pi}{dT} - \frac{\partial p_1}{\partial T}$ wijst op de discontinuïteit, waarmede bij het vriespunt der zoutoplossing de lijn harer dampspanning in die der spanning boven ijs overgaat.

---

4. Cryohydraten

Ten slotte zij het mij vergund hier het probleem te behandelen omtrent de samenstelling van een cryohydraat *).



Een cryohydraat is eene oplossing, die tegelijkertijd met ijs en zout in evenwicht is; uit deze oplossing scheidt zich bij het bevriezen ijs en zout in zoo snelle opeenvolging uit, dat zij schijnbaar eene homogene, vaste massa vormen †).

Zij in nevenstaande figuur X de lijn der temperaturen, B het 0-punt der Celsius-schaal en Y de lijn der zouthoeveelheden, opgelost in 100 G. water. Zij $A\,C$ de oplosbaarheidslijn en $B\,C$ de lijn van het vriespunt. Eene oplossing van het gehalte $B\,C_1$ heeft haar vriespunt bij T^0 en is tevens verzadigd; zij is dus een cryohydraat. De beide lijnen snijden elkaar slechts eenmaal en eindigen beide in het punt C.

De hoeken, die de raaklijnen in C, aan de beide krommen getrokken, met de X-as maken, hebben tot tangenten:

---

*) Dit probleem is zeer onlangs, maar op m i onjuiste wijze behandeld door Parker. *Phil. Mag* 5th Ser., N°. 156, pag. 406, *May*. 1888.

†) Volgens Guthrie is eigenlijk deze vaste massa van dezelfde procentische samenstelling als de oplossing een cryohydraat.

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_{AC} = \frac{-A_2 h}{T v_{d_1} \frac{\partial p_1}{\partial h}} \quad \text{en} \quad \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_{BC} = \frac{L_1}{T v_{d_1} \frac{\partial p_1}{\partial h}};$$

de verhoudingen der tangenten is eenvoudig:

$$\frac{\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_{AC}}{\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_{BC}} = -\frac{A_2 h}{L_1}.$$

Om den invloed van den druk op de samenstelling van een cryohydraat na te gaan, voere men de volgende notatiën in. f_1 zij de thermodynamische potentiaal onder constanten druk van 1 G. water in de oplossing voorkomende, ψ_1 die van 1 G. ijs, f_2 die van 1 G. opgelost zout en ψ_2 die van 1 G vast zout. Verder beteekenen v_1. v_2 de volumina van 1 G. water en zout, zooals zij in de oplossing voorkomen, V_1 en V_2 de specifieke volumina van ijs en zout; s_1, s_2, Σ_1 en Σ_2 de respectieve entropiën (als steeds symbolische benamingen).

Alsdan gelden onder den kleinen druk van den damp boven het cryohydraat, welken druk men verwaarloozen mag, de gelijkheden:

$$f_1 - \psi_1 = 0 \quad \text{en} \quad f_2 - \psi_2 = 0.$$

Den invloed der drukverhooging leert men kennen door differentiatie van deze vergelijkingen, waarbij T en h als functiën van p zijn te beschouwen. Deze geeft:

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} + \frac{\partial f_1}{\partial h}\left(\frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial \psi_1}{\partial p} - \frac{\partial \psi_1}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial p} + \frac{\partial f_2}{\partial h}\left(\frac{\partial h}{\partial p} + \frac{\partial h}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}\right) + \frac{\partial f_2}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial \psi_2}{\partial p} - \frac{\partial \psi_2}{\partial I}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} = 0.$$

Stellen wij:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial T} - \frac{\partial f_1}{\partial T} = \frac{L_1}{T} \quad \text{en} \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial T} - \frac{\partial f_2}{\partial T} = \frac{\Lambda_2}{T};$$

de beteekenis van L_1 en Λ_2 is duidelijk.

Na

$$\frac{\partial f_2}{\partial h} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial h} \text{ en } \frac{\partial f_1}{\partial p} = v_1, \frac{\partial F_1}{\partial p} = V_1 \text{ enz.}$$

gesteld te hebben, vindt men door oplossing:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v_1 - V_1 + h(v_2 - V_2)}{L_1 + h\Lambda_2} T$$

en

$$\frac{\partial h}{\partial p} + \frac{\partial h}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{L_1(v_2 - V_2) - \Lambda_2(v_1 - V_1)}{\frac{\partial f_1}{\partial h}(L_1 + h\Lambda_2)} h.$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p} + \frac{\partial h}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p}\right) dp$$

geeft de totale verandering in samenstelling aan, door de drukverhooging dp veroorzaakt.

L_1 en Λ_2 zijn in 't algemeen beide positief; $v_1 - V_1$ is (voor waterige oplossingen) in 't algemeen negatief, evenzoo $v_2 - V_2$; de beide termen van den teller hebben dus hetzelfde teeken en het kan gebeuren als een bijzonder geval, dat $L_1(v_2 - V_2) = \Lambda_2(v_1 - V_1)$ is en in dit geval zou de samenstelling van het cryohydraat onafhankelijk zijn van den druk.

In het algemeen zijn echter deze grootheden niet gelijk en men ziet, dat de concentratie van het cryohydraat wel van den druk afhangt *).

---

*) Parker meent bewezen te hebben, dat de samenstelling onveranderlijk is.

Daar $\frac{\partial f_1}{\partial h} = v_{d_1} \frac{\partial p_1}{\partial h}$ correspondeert, al het overige gelijk blijvende, eene groote veranderiug in samenstelling met eene kleine vermindering in dampspanning.

$\frac{\partial T}{\partial p}$ is algemeen negatief; het vriespunt van het cryohydraat wordt dus door druk verlaagd.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 29 September 1888.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, MAC GILLAVRY, BEHRENS, PLACE, KORTEWEG, FRANCHIMONT, HOOGEWERFF, DE VRIES, BEYERINCK, MARTIN, HOFFMANN, SCHOUTE, ZEEMAN, BIERENS DE HAAN, BAEHR, STOKVIS, HUBRECHT, FORSTER, RAUWENHOFF, VAN 'T HOFF, SCHOLS, J. A. C. OUDEMANS, LORENTZ, A. C. OUDEMANS JR., GRINWIS, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, VAN DIESEN, PEKELHARING, VAN DORP, VAN BEMMELEN, KAPTEYN, GUNNING en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. H. DUMONCEAU, Bibliothecaris van Z. M. den Koning, 'sGravenhage, 8 September 1888; 2°. het Ministerie van Buitenlandsche Zaken, 's Gravenhage, 10 September 1888; 3°. het Minesterie van Oorlog, 's Gravenhage, 7 September 1888; 4°. het Ministerie van Marine, 's Gravenhage, 7 September 1888; 5°. het Ministerie van Justitie, 's Gravenhage, 12 September 1888; 6°. den Commissaris des Konings in Noord-Holland te Haarlem, 8 September 1883; 7°. Burge-

meester en Wethouders van Amsterdam, 7 September 1888; 8°. Curatoren der Rijks-Universiteit te Leiden, 14 September 1888; 9°. Curatoren der Rijks-Universiteit te Utrecht, 11 September 1888; 10°. Curatoren der Rijks-Universiteit te Groningen, 7 September 1888; 11°. H. C. Rogge, Bibliothecaris der Universiteits-Bibliotheek te Amsterdam, 7 September 1888; 12°. A. J. van Pesch, Bibliothecaris van het wiskundig Genootschap »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" te Amsterdam, 7 September 1888; 13°. Directeuren der Nederlandsche Handelmaatschappij te Amsterdam, 7 September 1888; 14°. Guye, Redacteur van het Nederlandsch Tijdschrift voor Geneeskunde te Amsterdam, 7 September 1888; 15°. A. J. Enschedé, Bibliothecaris der Stads-Bibliotheek te Haarlem, 8 September 1888; 16°. J. Bosscha, Secretaris van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem, 8 September 1888; 17°. G. C. W. Bohnensieg, Conservator van Teyler's Stichting te Haarlem, 19 September 1888; 18°. H. G. van de Sande Bakhuyzen, Directeur der Sterrenwacht te Leiden, 1888; 19°. A. Kluyver, Bibliothecaris van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, 19 September 1888; 20°. A. R. Arntzenius, Griffier van de Tweede Kamer der Staten Generaal te 's Gravenhage, 8 September 1888; 21°. H. Vollenhoven, 's Gravenhage, 10 September 1888; 22°. J. Tideman, Secretaris van het koninklijk Instituut van Ingenieurs te 's Gravenhage, 8 September 1888; 23°. T. C. L Wijnmalen, Secretaris van het koninklijk Instituut voor Taal-, Land- en Volkenkunde te 's Gravenhage, 17 September 1888; 24°. J. F. L. Schneider, Bibliothecaris der polytechnische School te Delft, 23 Juli 1888; 25°. R. M. van Lijnden, Secretaris van het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen te Utrecht, Juni 1888; 26°. W. F. C. van Laak Jr., Bibliothecaris der Gemeente-Bibliotheek te Arnhem 1888; 27°. L. Broekema, Directeur der Rijkslandbouwschool te Wageningen, 10 September 1888; 28°. Burgemeester en Wethouders der stad Zutphen, 10 September 1888; 29°. Kruseman, Secretaris van het Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Middelburg, 1888; 30°. J. L. Berns, Biblio-

thecaris der provinciale Bibliotheek in Friesland te Leeuwarden, 17 September 1888; 31°. TAETS VAN AMERONGEN, Gouverneur der koninklijke militaire Akademie te Breda, 12 September 1888; 32°. F CZERMAK, Secretaris van het naturforschende Verein te Brunn, Januari 1888; 33°. VON HELMHOLTZ, Berlin, 15 April 1888; 34°. G. VOSS, Secretaris der naturforschende Gesellschaft te Emden, 20 September 1888; 35°. TH. STECK, Bibliothecaris der naturforschende Gesellschaft te Bern, 9 Juni 1887; 36°. J. R. KOCH, Bibliothecaris der allgemeine schweizerische Naturforscher Gesellschaft te Bern, 8 Juni 1887; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken, 's Gravenhage, 9, 24 Juli, 3, 18 Augustus 1888; 2°. het Ministerie van Oorlog, 's Gravenhage 20 Juli 1888; 3°. den Commissaris des Konings in de provincie Friesland te Leeuwarden, 5 Juli 1888; 4°. J. F. L. SCHNEIDER, Bibliothecaris der polytechnische School te Delft, 30 Juli 1888; 5°. R. M. VAN LIJNDEN, Secretaris van het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen te Utrecht, Juni 1888; 6°. het Ministère de l'Instruction publique et des beaux Arts te Parijs, 26 Juli 1888; 7°. DE MILLOUÉ, Directeur van het Musée Guimet te Parijs, 1888; 8°. den Directeur der Ecole polytechnique te Parijs, Januari 1888; 9°. G. BRUNEL, Archivaris der Société des Sciences physiques et naturelles te Bordeaux, 1 Februari 1887; 10°. A. DUMÉRI, Secretaris der Académie des Sciences, Inscriptions et belles Lettres te Toulouse, 1 Maart 1888; 11°. F. NICHOLSON, Bibliothecaris der literary philosophical Society te Manchester, 1888; 12°. R. HEIDENRAIN, Voorzitter der Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur te Breslau, 1 Augustus 1888; 13°. D. STRICKER, Bibliothecaris der Senckenbergische naturforschende Gesellschaft te Frankfort a/M., 24 Augustus 1888; 14°. G. DI LORENZO, Napels 19 September 1888; 15°. G. STORM, Secretaris der Videnskabs-Selskabet te Christiania, 29 Mei 1888; 16°. E. DE REGEL,

Directeur van den Jardin impérial de Botanique te St. Petersburg, 28 Januari 1888; 17°. den Secretaris der Naturforscher-Gesellschaft te Dorpat, 1 April 1888; 18°. F. M. Thorn, Directeur der U. S. coast and geodetic Survey te Washington, 14 Juli 1888; 19°. J. F. Bride, Bibliothecaris der public Library te Melbourne, 8 Augustus 1888; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. Eene missive van den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid (1 Sept. 1888), ter begeleiding van een adres met bijlagen van den Heer D. Dobbe, te 's Gravenhage, betreffende eene door hem bereide soort van olie, bestemd om wormen en insecten uit hout en andere stoffen te weren. — De Minister vestigt de aandacht der Afdeeling op dit middel, in verband met het aanhangig onderzoek in zake de Limnoria lignorum, en betuigt dat het hem aangenaam zou zijn, over den tegenwoordigen stand van dat onderzoek eenig bericht te ontvangen.

2°. Een brief van den Gouverneur van Suriname (Paramaribo 17 Juli 1888), waarin, naar aanleiding van sommige in Nederland openbaar gemaakte verslagen over de verwoestingen, door den Paalworm en de Limnoria lignorum teweeggebracht, de aandacht der Afdeeling gevestigd wordt op eenige houtsoorten van West-Indië, aldaar gebruikelijk bij het bouwen van waterwerken, en waarvan vooral het mambarklak, door eene langdurige praktijk, gebleken was bestand te zijn tegen de verwoestingen van den Paalworm. — De Gouverneur deelde tevens mede, dat de Afdeeling in het bezit gesteld zou worden van monsters van dat hout en dat daaruit blijken zou: 1°. dat het mambarklak niet altijd uit knoestige stukken bestaat, maar wel degelijk in den vorm van rechte palen verkregen kan worden, ter inheiing geschikt, en 2°. dat de Paalworm wel het splint, maar niet het kernhout van den mambarklakboom aantast. — De Secretaris bericht, dat de hierboven bedoelde voorwerpen in het bezit der Akademie gekomen zijn. — De Voorzitter wenscht én

den brief van den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid én dien van den Gouverneur van Suriname, met al de daarbij behoorende bescheiden en bewijsstukken, ter beschikking te stellen van de Limnoria-Commissie, opdat de Afdeeling te zijner tijd het advies zoowel over de bederfwerende olie als over het mambarklak moge vernemen. — Aldus wordt besloten. — Tevens stelt de Voorzitter voor, den Gouverneur van Suriname, den Heer Mr. H. J. SMIDT, thans in Nederland teruggekeerd, den dank der Afdeeling te brengen: zoowel voor zijne belangstelling in een voor het moederland zoo belangrijk vraagstuk als het maken van standhoudende waterwerken, als voor de toezending van de grondstof, waarmeê proeven kunnen genomen worden. — Dit voorstel wordt aangenomen. — De Heer HUBRECHT, Voorzitter der Limnoria-Commissie, in tijds door den Secretaris in kennis gesteld met het verlangen van den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid om een en ander over den tegenwoordigen stand van het onderzoek der Commissie te vernemen, leest een door de Commissie goedgekeurd rapport voor, dat als antwoord op 's Ministers vraag zou kunnen dienen, en 't welk hij voorstelt dat door de Afdeeling als het hare erkend worde. — Aan dezen wensch wordt zonder discussie gevolg gegeven.

3°. Een brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken (22 Aug. 1888), ter begeleiding van het programma der Statuten en van een uitnoodiging ter bijwoning van het VIIe internationale Congres van Amerikanisten te Berlijn.

4°. Een brief van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs (16 Juli 1888), ter begeleiding van een exemplaar eener prijsvraag, uitgeschreven door de Afdeeling Ned.-Indië van genoemd Instituut, en luidende: »men vraagt eene praktische handleiding tot toepassing van de gezondheidsleer bij het bouwen in Nederlandsch Indië". Voor het beste antwoord wordt uitgeloofd eene som van ƒ 1000.

5°. Het bericht van het overlijden van het buitenlandsch lid der Akademie Dr. RUDOLF CLAUSIUS, Hoogleeraar te Bonn. De mededeeling werd door den Secretaris beantwoord.

6°. Eene missive van den Hoogleeraar Dr. M. FÜRBRINGER

(17 Juli 1888), waarin hij kennis geeft van zijn aanstaand vertrek naar Jena, en zijn lidmaatschap der Akademie nederlegt.

7°. Een brief van het lid der Akademie Dr. HOEK, ter begeleiding van een exemplaar van het rapport over de visscherij met ankerkuilen en staalboomen op het Hollandsch Diep en Haringvliet, ingevolge eene opdracht van den Minister van Financiën aan hem zelven en den Heer BOTTEMANNE verstrekt.

8°. Een brief van het lid der Akademie, den oud-Hoogleeraar VAN DEN BERG, ter begeleiding van een opstel voor de Verslagen en Mededeelingen: »De constructie-figuur voor de oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen, beschouwd als configuratie".

9°. Eene verhandeling »Over polyedrale configuraties", aangeboden door Dr. JAN DE VRIES, leeraar aan de H. B. S. te Kampen, voor de werken der Afdeeling. De Voorzitter benoemt tot rapporteurs over dien arbeid de Heeren BIERENS DE HAAN en VAN DEN BERG.

— De Heer DE VRIES spreekt over steriele maïs-planten. Naast eene gewone maïs-plant wordt een andere vertoond, waaraan de zijtakken en de kolven ontbreken, terwijl de geheele pluim door eene naakte spil vervangen is. In de oksels der bladscheeden zijn geene knoppen, hoe klein ook, te zien. De plant mist dus het vermogen om zich te vertakken in haren stam te eenen male. Een veertigtal zulke planten waren in dezen zomer op een bed van omstreeks 340 maïs-planten ontstaan; zij waren krachtig en sterk bebladerd, en bijna alle volkomen onvertakt. Slechts enkele toonden aan den top der spil eenige zeer fijne takjes. Het bedoelde bed was opgekweekt uit de zaden van eene enkele in 1887 gewonnen kolf. Van een paar andere kolven, in 1887 gewonnen uit hetzelfde zaaisel (uit één kolf van 1886), werden in 1888 eveneens zaden uitgezaaid. Onder deze, minder talrijke, culturen kwamen eveneens zulke steriele maïs-planten voor.

Met den Heer BEYERINCK wisselt spreker van gedachte over de vragen: 1°. of de bloemlooze individuen niet ver-

menigvuldigd zouden kunnen worden door hunne bladknoppen en 2°. of het ontstaan van variatiën altijd, zooals de spreker zulks had voorgesteld, de uitkomst van meer dan één tijdperk van groei moet wezen, en of de mogelijkheid was uitgesloten, dat in eene zelfde periode niet enkel het verschijnsel, maar ook de aanleg daartoe werde voortgebracht. De spreker meende dat de volstrekte afwezigheid van okselknoppen bij de door hem onderzochte één-assige maïs-planten geen kans van vermenigvuldiging langs vegetatieven weg aanbood, en dat het antwoord op de tweede vraag langs experimenteelen weg niet gegeven kan worden. Eene vraag van den Heer J. A. C. OUDEMANS over den invloed van het klimaat op de weelderige ontwikkeling der kolven wordt door den Heer DE VRIES beantwoord.

— De Secretaris leest eene geschrevene bijdrage van het correspondeerend lid der Afdeeling, den Heer Dr. BURCK te Buitenzorg, »Over den invloed van het licht op de kieming der sporen van *Hemileia vastatrix*". Zij zal worden opgenomen in de Verslagen en Mededeelingen.

Eveneens wordt door den Secretaris, op verzoek van den Heer Dr. J. G. BOERLAGE, mededeeling gedaan van diens voorloopig verslag van werkzaamheden, verricht in 's Lands Plantentuin te Buitenzorg, van 14 April tot 4 Augustus 1888.

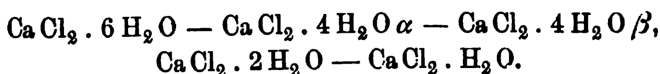
— De Heer VAN BEMMELEN doet mededeelingen omtrent de onderzoekingen van den Heer BAKHUIS ROOZEBOOM; »Over de verbindingen van chloorcalcium met water in vasten en vloeibaren toestand."

Deze onderzoekingen zijn ondernomen met het doel, de gevolgtrekkingen te toetsen, welke afgeleid konden worden omtrent de samenstellingen en de dampspanningen van verzadigde zoutoplossingen uit de thermodynamische formulen van Prof. VAN DER WAALS, welke formulen in overeenstemming gebleken waren met de uitkomsten der vroegere onderzoekingen van den Heer ROOZEBOOM over gashydraten en verwante lichamen.

Tevens wenschte de Heer ROOZEBOOM voor een enkel zout alle verbindingen op te sporen, die het met water kan aangaan, de voorwaarden van haar ontstaan te leeren kennen, en de omstandigheden van temperatuur en druk waaronder twee of meer dezer vaste lichamen met elkander in evenwicht kunnen zijn, nevens oplossing, nevens damp, of nevens damp en oplossing samen.

Eene dergelijke studie was noodig om een volledig overzicht te krijgen over het gedrag van zouten tegenover water.

Bij het chloorcalcium bleken de volgende vaste hydraten te bestaan:



$$CaCl_2 . 6 H_2O — CaCl_2 . 4 H_2O \alpha — CaCl_2 . 4 H_2O \beta,$$
$$CaCl_2 . 2 H_2O — CaCl_2 . H_2O.$$

De Heer ROOZEBOOM bepaalde van al deze hydraten de oplosbaarheid, en vond langs dien weg het verschil tusschen de beide hydraten met $4 H_2O$, welke tot dusverre voor dezelfde verbinding waren aangezien. Hij isoleerde het hydraat met $2 H_2O$ voor 't eerst uit de zuivere oplossing, dat vroeger slechts door de toevoeging van HCl verkregen was; terwijl het hydraat met $1 H_2O$ tot dusverre niet bekend was.

Voor het van ouds bekende hydraat met $6 H_2O$ toonde hij aan, dat het beneden zijne smelttemperatuur niet alleen naast oplossingen met meer water, maar evenzeer nevens oplossingen met meer $CaCl_2$ bestaanbaar is, wier gehalte aan $CaCl_2$ toeneemt naarmate men zich van het smeltpunt verwijdert. Hierdoor wordt voor 't eerst de bestaanbaarheid aangetoond van dergelijke oplossingen; terwijl die bestaanbaarheid reeds afgeleid was uit de formule van Prof. VAN DER WAALS, die de betrekking aangeeft tusschen concentratie en temperatuur, in verband met de concentratie van het vaste hydraat, de dampspanning en de oploswarmte.

Voor geen der andere hydraten werden zulke oplossingen aangetroffen. Slechts het $CaCl_2 . 2 H_2O$ kan tot zeer nabij zijn smeltpunt vervolgd worden, de anderen worden reeds ver beneden hun smeltpunt omgezet in het opvolgende waterarmere hydraat. In zulke gevallen is de bestendigheid van oplossingen, met nog meer zout dan het gesmolten hydraat, ondenkbaar.

Behalve de verschillende hydraten, kunnen ook de beide componenten zelve in vasten toestand nevens vloeibare complexen bestaan. Zoo loopt de oplossingslijn van ijs in de oplossing van $Ca\,Cl_2$, van het kryohydratische punt (— 55°) tot het smeltpunt van ijs; de oplossingslijn van watervrij $Ca\,Cl_2$ begint bij ± 260° om te eindigen in het smeltpunt van $Ca\,Cl_2$ ± 720°. Bij de laatste kunnen slechts oplossingen behooren, die meer H_2O bevatten dan de vaste stof; bij de eerste daarentegen slechts oplossingen, die meer $Ca\,Cl_2$ bevatten dan de vaste stof (ijs). Uit dit oogpunt beschouwd, vormen dus de vriespuntslijnen, van oplossingen van $Ca\,Cl_2$ zoowel als van andere zouten, alle voorbeelden van den nieuwen tak der oplosbaarheidslijn, waarvan de bestaanbaarheid voor hydraten voor 't eerst bij $Ca\,Cl_2 . 6\,H_2O$ bleek.

De Heer Roozeboom heeft verder de dampspanningen der verzadigde oplossingen bepaald, tusschen 0° en 205°. Hierdoor heeft hij voor de verzadigde oplossingen van het 6e hydraat eene tweede gevolgtrekking kunnen bevestigen, die uit de formule van van der Waals af te leiden is omtrent de wijze waarop de evenwichtsdruk van het stelsel: vast, oplossing, damp: met de temperatuur verandert. Beschouwt men namelijk de oplossingen die meer water bevatten dan het vaste hydraat, dan zou, naarmate men van lagere temperaturen tot het smeltpunt van het hydraat voortschrijdt, de dampdruk eerst moeten toenemen, daarna tot aan het smeltpunt moeten afnemen. In de graphische voorstelling zou dus de lijn (p, t) twee takken vertoonen ter weerszij van eene temperatuur, behoorende bij een drukmaximum.

Het bestaan dier twee takken was door den Heer Roozeboom reeds vroeger aangetroffen bij verschillende gashydraten, doch bij geen der bestudeerde gevallen kwamen die takken tegelijkertijd voor. De dampspanningslijn van het systeem met het 6e hydraat vertoont nu echter beide takken, omdat men hierbij, van vrij slappe oplossingen uitgaande, tot het smeltpunt geraken kan. Evenwel is de tak van de afnemende spanningen zeer klein.

Deze bizonderheid stemt echter overeen met de voorwaarden, waardoor de temperatuur van het drukmaximum bepaald

wordt. Bij deze temperatuur moet namelijk de omzettingswarmte van het systeem nul geworden zijn. Daar nu bij temperaturen beneden het smeltpunt de omzetting bestaat in smelting van hydraat, en in eene absorbtie van eene hoeveelheid waterdamp, die het gesmolten hydraat veranderen kan in oplossing (behoorende bij die temperatuur), zoo behoeft men slechts weinig beneden het smeltpunt te gaan om een punt te bereiken, voor hetwelk de absorbtiewarmte reeds gelijk is aan de smeltwarmte van het hydraat.

Kunnen dus hydraten niet tot zeer nabij hun smeltpunt vervolgd worden, dan bestaat er weinig kans tot het verwezenlijken dezer druklijn. Alleen bij $CaCl_2 . 2H_2O$ werd dan ook nog eene aanduiding van die lijn gevonden. De Heer ROOZEBOOM kon verder het beloop der spanningslijn voor verzadigde oplossingen van $CaCl_2 . 6H_2O$, met gebruikmaking van thermochemische bepalingen van anderen, toetsen aan de formule van VAN DER WAALS, en vond voldoende overeenstemming tusschen proefneming en berekening, ook voor de temperatuur van het drukmaximum.

De studie der spanningslijnen voor de oplossingen der verschillende bovengenoemde hydraten voerde tevens tot kennis der dampspanning bij de temperaturen, waarbij het eene hydraat in het andere wordt omgezet. De punten, die deze temperaturen en spanningen voorstellen, zijn quadrupelpunten, waar telkens twee hydraten met oplossing en damp in evenwicht zijn, en waarin, behalve de spanningslijnen der beide verzadigde oplossingen, ook nog moeten samenkomen de spanningslijnen, welke het evenwicht aangeven tusschen die twee hydraten en waterdamp, en de lijnen voor het evenwicht dier hydraten nevens oplossing alleen.

Voor de meeste stelsels heeft de Heer ROOZEBOOM eerstgenoemde lijnen bepaald, van de laatste reeks slechts hare richtingen.

Met gebruikmaking dezer lijnen laat zich een volledig graphisch overzicht geven van al de evenwichtstoestanden die mogelijk zijn, en van de veranderingen, die zich kunnen openbaren bij verhooging of verlaging van temperatuur of druk in een bestaand stelsel.

Zij leeren nauwkeurig kennen de voorwaarden voor het bestaan of ontstaan van eenig hydraat, hetzij uit een ander hydraat, hetzij uit de oplossing.

Zoo bestaat:

$CaCl_2 . 6H_2O$	nevens	oplossing,	tusschen	— 55°	en	30°.2
$CaCl_2 . 4H_2O\beta$	»	»	»	29°.2	»	38°.4
$CaCl_2 . 4H_2O\alpha$	»	»	»	29°.8	»	45°.3
$CaCl_2 . 2H_2O$	»	»	»	45°.3	»	176°
$CaCl_2 . H_2O$	»	»	»	176°	»	± 260°.

Bij 162° wordt de spanning der verzadigde oplossing grooter dan 1 atm. Boven deze temperatuur zijn dus oplossingen slechts mogelijk in gesloten toestellen.

Bij 205° is de spanning der met $CaCl_2 . H_2O$ verzadigde oplossing reeds 2 atm. De oplossingen nevens watervrij $CaCl_2$ kunnen dus slechts bij zeer hoogen druk bestaan.

Toch doet de formule van VAN DER WAALS verwachten, dat ook deze druk tot een maximum stijgen zal, om daarna (vermoedelijk zeer snel) met toenemende temperatuur te dalen tot den smeltdruk van $CaCl_2$, die zeker zeer klein is.

Deze onderzoekingen bevestigen tevens, dat elk hydraat bij elke temperatuur slechts met eene oplossing van bepaalde concentratie in evenwicht kan zijn; dat bij eene overgangstemperatuur de beide hydraten gelijke oplosbaarheid hebben, en dat de verandering der oplosbaarheid bij dit punt plotseling geschiedt, zoodat de beide oplosbaarheidslijnen elkander scherp snijden.

Dat elk hydraat eene eigen oplosbaarheid heeft, is reeds door LOEWEL en G J. MULDER beslist uitgesproken; later echter, vooral in navolging van NAUMANN, verduisterd. NAUMANN zag in de omzetting van een hydraat in een ander, dat armer aan water was, een begin van gradueele dissociatie in de *oplossing* — eene meening die tot in den allerlaatsten tijd voortleeft.

Deze opvatting is volslagen in strijd:

1°. met de scherpe wijziging der oplosbaarheid bij het bereiken van eene overgangstemperatuur;

2⁰. met de mogelijkheid om het waterarmere hydraat onder gunstige omstandigheden ook beneden zijne overgangstemperatuur in verzadigde oplossing te behouden;

3⁰. met de regelmatige aansluiting, die in dat geval de beide deelen der oplosbaarheidslijn vertoonen, en

4⁰. met het feit, dat in vele gevallen het waterarmere hydraat even goed met de temperatuur in oplosbaarheid toeneemt als het waterrijkere.

De oplosbaarheidsbepalingen bij de hydraten van $Ca\,Cl_2$ leveren voor dit alles nieuwe voorbeelden, en dwingen tot de erkentenis: 1⁰ dat elk hydraat zijne eigen oplosbaarheid heeft, 2⁰ dat de verandering in het vaste zout oorzaak is van de verandering in de oplosbaarheid — niet omgekeerd; waarom ook bij de overgangstemperatuur dezelfde verandering zich openbaart bij het hydraat buiten de oplossing.

Deze feiten versterken eindelijk het inzicht, dat eene oplossing een zelfstandige evenwichtstoestand is, geheel verschillend van den evenwichtstoestand van het hydraat, hetwelk tot hare bereiding mag gediend hebben, en evenzeer van dien der andere hydraten, welke zich mogelijkerwijze uit die oplossing bij verschillende temperaturen zouden kunnen afzetten.

— De Heer J. A. C. Oudemans deelt een en ander mede omtrent een gebrek, dat vele, aanvankelijk onberispelijke, niveaubuizen later vertoonen, dat namelijk bij langzaam toenemende helling de luchtbel onbewegelijk blijft, om dan in eens een heel eind vooruit te gaan. Eenige in Indië gebruikte niveaubuizen waren in 1886 wegens dat gebrek teruggezonden.

Het is wel bekend dat uit den zwavelether, waarmede de niveaubuizen gevuld worden, mikroskopische lichaampjes zich tegen den glaswand afzetten, en dat deze den gang der luchtbel stremmen, maar over den scheikundigen aard dier lichaampjes en de reden van hun ontstaan was men het niet eens.

Prof. H. Wefers Bettink te Utrecht nam, op verzoek van Spreker, een onderzoek naar de oorzaak van dit gebrek

op zich, en vond toen reeds, in October 1886, door chemische analyse, dat de buizen, die het gebrek het meest vertoonden, ook het sterkst natrongehalte bezaten; dat derhalve waarschijnlijk door sporen van azijnzuur of van water het glas werd aangetast; de mikroskopische lichaampjes bleken ook uit het losgekomen kiezelzuurhydraat te bestaan.

Bij het verdampen van den ether op platina bleef eene rest terug, waarin langs mikrochemischen weg calcium en natrium konden worden aangetoond, terwijl in de korreltjes kiezelzuur de hoofdmassa vormde met sporen van ijzer. Azijnzuur kon niet worden aangetoond.

Eene analyse van het glas der *niet* aangetaste niveaus toonde, dat het kalium daarin in verhouding tot het natrium voorkwam als 43,14 : 56,86.

Eene analyse van het glas der niveaus, waarin zich de korreltjes hadden afgezet, deed eene verhouding vinden van 22,61 kalium op 77,39 natrium. Bij het aangetaste glas, was dus ongeveer de helft van het kalium, dat in het onaangetaste glas werd gevonden, door natrium vervangen.

Hij ried dus, in plaats van zwavelether, het gebruik van petroleumether aan, wijl deze vloeistof in alle geval niet verzuren kan. Het is echter gebleken, dat dit nog niet geheel voldoende was, en opnieuw werden de niveaus uit Indië teruggezonden. Het resultaat van zijn herhaald onderzoek (Mei jl.) was nu, dat het aantasten van het glas bepaaldelijk door het *water* geschiedde *), en dat bij den petroleumether de mogelijkheid bestaat, dat dit ontleend wordt aan de kleefstof, waarmede zoowel de dekplaatjes als het diaphragma aan de buis worden bevestigd. Om dus niveaus te vervaardigen, die het gevreesde gebrek niet vertoonen, was het advies van Prof. Wefers Bettink: 1^{0}. het gebruik

---

*) Dat inderdaad het water de oorzaak moet zijn van het aangetast worden, en de ether inderdaad waterhoudend is, blijkt wanneer men den inhoud van een der niveaus uitgiet in een buisje, dat poedervormig acidum tannicum bevat. De inhoud der niveaus maakte terstond het acidum tannicum kleverig, wat, zooals bekend is, met watervrijen ether het geval niet is.

van buizen, vervaardigd uit glas met een sterk kali- en een zwak natrongehalte, 2^0. liefst de vulling te doen met lichten pretroleumether, die minder kans heeft van water aan te trekken, dan zwavelether, en 3^0. de niveaubuizen aan de beide einden toe te smelten, zooals trouwens reeds lang ook gebruikelijk is.

In dien zin had Spreker ook aan den Heer REICHEL te Berlijn geschreven, en daarna eerst kennis gekregen van een onderzoek van Dr. MYLIUS (werkzaam aan de physikalisch-technische Reichsanstalt te Charlottenburg), dat geplaatst is in het Augustus-nummer van het *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, en dat tot dezelfde uitkomst geleid heeft als dat van Prof. WEFERS BETTINK Spreker merkt op, dat laatstgenoemde dus geheel onafhankelijk tot hetzelfde, voor de praktische astronomie en geodesie belangrijke, resultaat gekomen is.

— Voor de Boekerij der Akademie worden aangeboden: door den Heer BIERENS DE HAAN, uit naam van het wiskundig Genootschap: »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven": Nieuw Archief voor Wiskunde, XIV, 2 en XV, 1; en uit naam van den Heer J. C. VAN DEN BERG diens Dissertatie »Over de Wervelbeweging"; door den Heer GRINWIS de Dissertatie van den Heer L. VAN ELFRINKHOF: »De viriaal en hare beteekenis in de Mechanica"; door den Heer VAN BEMMELEN de Dissertatie van den Heer STORTENBEKER »Over de verbinding van het chloor en het jodium"; door den Heer SCHOLS 3 stukken van »Waterbouwkunde" door HENKET, SCHOLS en TELDERS; door den Heer C. A. J. A. OUDEMANS de door hem in vereeniging met den Heer BOERLAGE bewerkte: » Bibliographie der Flora van Nederland".

— Daar er verder niets te verhandelen is, wordt de vergadering gesloten.

MISSIVE

AAN

ZIJNE EXCELLENTIE DEN MINISTER VAN WATERSTAAT, HANDEL EN NIJVERHEID,

OVER DEN

TEGENWOORDIGEN STAND VAN HET ONDERZOEK DER LIMNORIA-COMMISSIE.

Amsterdam, September 1888.

In antwoord op Uwer Excs. missive van 1 September l.l., heeft de Afdeeling Natuurkunde der Koninklijke Akademie van Wetenschappen de eer, U omtrent den stand van het onderzoek naar de verspreiding en de middelen ter bestrijding van de Limnoria lignorum het navolgende te berichten.

Nadat in een tweetal voorloopige mededeelingen, door de te dezer zake benoemde Commissie aan onze Afdeeling gedaan en ook aan Uwe Exellentie toegezonden, vastgesteld was dat de Limnoria niet geacht kan worden een vernielende vijand te zijn, die voor het eerst met een aanval op onze inheemsche waterstaatswerken dreigt en als zoodanig door snelle maatregelen van tegenweer nog zou kunnen worden afgeweerd, maar dat zij integendeel moet beschouwd worden als een op vele punten der Nederlandsche kust (een deel der Zuiderzee uitgesloten) voorkomend Schaaldier, hetwelk daar al vroeger een vernielenden invloed op houtwerk, dat in zeewater geplaatst is, heeft uitgeoefend, meende die Commissie, dat hare wijze van werken in overeenstemming behoorde gebracht te worden met deze uitkomst.

Nu het niet de vraag bleek te zijn een dreigend gevaar

af te weren, maar veeleer om voor een reeds lang bestaande kwaal verzachting te zoeken, achtte de Commissie het allereerst hare taak te zijn, meer betrouwbare gegevens te erlangen omtrent de leefwijze en de voortplanting van de Limnoria, dan tot heden in de literatuur over dit onderwerp (die ook vele buitenlandsche verhandelingen omvat), te vinden zijn. Zoo moest er worden vastgesteld in welk jaargetijde de Limnoria geacht kan worden haar meest krachtigen aanval op het houtwerk te doen; zoo ook of er verband bestaat tusschen dien heftigen aanval en de voortplanting der soort, hetzij doordien de jonggeborenen aan het maken van nieuwe loopgraven deelnemen, hetzij doordien vóór hunne geboorte reeds door de ouders voor meer ruimte in de gemeenschappelijke woning wordt zorg gedragen. Ook de vraag: hoe de volgende generaties zich door het water verspreiden en nabijgelegen houtwerk aantasten, moest langs proefondervindelijken weg worden uitgemaakt.

Daarbij mocht niet verzuimd worden, waarnemingen te doen omtrent den invloed, dien het zoutgehalte, in verband met de temperatuur van het zeewater, op de bovengenoemde verschijnsels zou kunnen uitoefenen: een invloed, die, op grond van voorloopig verkregen resultaten, reeds als positief bestaande mocht worden aangemerkt.

Eindelijk heeft de Commissie zich voorgesteld, proeven te nemen — die ook reeds aangevangen zijn — over voorbehoedmiddelen, die, op het houtwerk toegepast, de nadeelige werking der Limnoria beletten of althans verlangzamen.

Het behoeft niet nader uiteengezet te worden, dat voor een en ander een behoorlijk tijdsverloop dient gesteld te worden, vóór en aleer men het terrein der waarneming verlaten en dat der gevolgtrekking betreden mag.

In het geheel zijn sedert het begin van de werkzaamheid onzer Commissie op twaalf verschillende punten van de kust een honderdtal proeflatten geplaatst, en van deze laatsten een 80 tal weder gelicht, en nauwkeurig onderzocht. Geregelde waarnemingen omtrent zoutgehalte enz. worden sedert het begin van het onderzoek en wel veelal driemaal daags op acht verschillende punten verricht.

Liever dan thans in eene uiteenzetting van het tot nu toe gevondene te treden, wenscht de Commissie, en met haar ook de Afdeeling, door Uwe Excellentie te dezer zake diligent verklaard te worden.

En liever dan telkens kleine mededeelingen van opeenvolgende stappen in den gang van het onderzoek aan de Regeering te doen, zou de Afdeeling het eindrapport van de Commissie, te dezer zake benoemd, willen afwachten, waarin de geheele aangelegenheid op de meer uitgebreide schaal, die hierboven geschetst werd, behandeld zal worden, zij het dan ook dat zoodanig eindrapport uit den aard der zaak eerst na verloop van eenige jaren mag worden te gemoet gezien.

De geldmiddelen, door de Regeering voor het Limnoria-onderzoek toegestaan, zijn niet uitgeput en worden door de Commissie tot het nemen van de meermalen genoemde proeven met overleg aangewend.

De Afdeeling Natuurkunde van de
Koninklijke Akad. v. Wetenschappen.
de Secretaris
C. A. J. A. OUDEMANS.

DE CONSTRUCTIE-FIGUUR

VOOR DE

OPLOSSING VAN EEN STELSEL LINEAIRE VERGELIJKINGEN, BESCHOUWD ALS CONFIGURATIE,

DOOR

F. J. VAN DEN BERG.



De in de Verslagen en Mededeelingen der Akademie, Afdeeling Natuurkunde, 3e Reeks, Deel V, Stuk 1, 1888, blz. 105—120, opgenomen bijdrage van Dr. J. DE VRIES, »Over vlakke configuraties", geeft mij aanleiding tot eene opmerking met betrekking tot de oplossingswijze die op blz. 207—249 van mijn in de genoemde Verslagen, enz., Deel IV, Stuk 2, 1887, blz. 196—252, geplaatst opstel »Over de graphische oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen" het laatst en uitvoerigst werd behandeld. De figuur namelijk, die aldaar werd gebezigd om wat ik noemde het wortelpunt van het willekeurig gegeven stelsel vergelijkingen te bepalen door middel van de wortelpunten van zekere daaruit afgeleide stelsels, vertoont de bijzonderheid — waarop bij de gevolgde wijze van behandeling niet zoo kennelijk het licht viel — dat zij niet anders dan eene zoogenaamde configuratie is. Bij de uiteenzetting van deze bijzonderheid, waartoe ik thans wensch over te gaan, zal ik mij als vroeger hoofdzakelijk houden aan beschouwingen in het platte vlak, niet in de ruimte, en ook op het voetspoor van vroeger duidelijkheidshalve beginnen met de afzonderlijke behandeling van de twee eenvoudigste gevallen, waarin namelijk het aantal n der vergelijkingen en der onbekenden hetzij 2 of 3 bedraagt.

In het geval van $n = 2$ (zie blz. 207—209 en Fig. 2) valt dadelijk in het oog dat de in het geheel beschouwde 6 wortelpunten, te weten het eenige wortelpunt der 0[de] orde of oorsprong O, de 4 wortelpunten der 1[e] orde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, en het eenige wortelpunt der 2[e] orde of hoofdwortelpunt X, de hoekpunten zijn van eene volledige vierzijde gevormd door de 4 in de figuur aanwezige lijnen OX_1, OX_2, $\alpha_1 \alpha_2$, $\beta_1 \beta_2$, en dat deze hoekpunten en zijden dus eene configuratie $(6_2, 4_3)$ vormen die — na het geval $(3_2, 3_2)$ eener driezijde — tevens het meest eenvoudige geval is van de in het algemeen uit de n zijden en $\binom{n}{2}$ hoekpunten eener volledige n-zijde bestaande configuratie $\left(\binom{n}{2}_2, n_{n-1}\right)$. Ofschoon het alzoo voor dit geval van $n = 2$ op zich zelf minder noodig is hierbij langer stil te staan of deze configuratie door eene andere notatie voor te stellen, zullen wij toch, voornamelijk als voorbereiding tot eene overeenkomstige notatie die voor hoogere n doelmatig zal blijken, reeds hier de volgende teekens invoeren. De twee oorspronkelijke assen OX_1 en OX_2 noemen wij 1 en 2, de twee lijnen $\alpha_1 \alpha_2$ en $\beta_1 \beta_2$, in plaats van 3 en 4, liever — om later zekere regelmaat of symmetrie duidelijker in het oog te doen vallen — $1'$ en $2'$; terwijl wij in het algemeen het snijpunt van twee lijnen aanduiden door de nummers dezer lijnen naast elkander te stellen, zoodat hier de punten $O = 12$, $\alpha_1 = 11'$, $\alpha_2 = 21'$, $\beta_1 = 12'$, $\beta_2 = 22'$, $X = 1'2'$ zijn. En tevens stellen wij de volgende tabel of overzigt van de ter sprake komende lijnen en punten op:

0[de] orde		1 2	12
1[e] orde	1' 2'	11' 21' 12' 22'	
2[e] orde	1' 2'		

,

waarin de zamenstelling van de onderling gelijkvormige

bovenrand en linkerrand duidelijk is, terwijl de vier elementen van het middenvak zijn ingevuld door, als in eene tafel van vermenigvuldiging, voor ieder daarvan te nemen de in dezelfde kolom en in dezelfde rij geplaatste elementen der beide genoemde randen. De tabel bevat alzoo $1^2 + 2^2 + 1^2 =$ $= 6 = \binom{4}{2}$ elementen ieder van twee cijfers, voorstellende het enkele wortelpunt der 0de orde (of met nul accenten) 12, de 4 wortelpunten der 1e orde (met 1 accent) 11′, 21′, 12′, 22′, en het enkele wortelpunt der 2e orde (met 2 accenten) 1′2′; en voorts $1 . 2 + 2 . 1 = 4 = \binom{4}{1}$ elementen ieder van één cijfer, voorstellende de 2 lijnen met nul accenten (wij zullen daarom zeggen: van de 0de orde) 1 en 2, en de 2 lijnen met 1 accent (van de 1e orde) 1′ en 2′. Voor ieder der 6 punten komen de 2 daardoor gaande lijnen, en voor ieder der 4 lijnen komen de 3 daarop liggende punten vóór deels in rij en deels in kolom van het punt of van de lijn zelf. Anders gezegd, in verband met de wijze van notatie: ieder punt is het product van de 2 daardoor gaande lijnen, iedere lijn is een factor van de 3 daarop liggende punten. Of, meer in bijzonderheden nog voor de vijf afzonderlijke vakken der tabel, in aansluiting aan de wordingswijze van Fig. 2: — wij herhalen: te uitvoerig misschien voor dit eenvoudige geval op zich zelf, maar gewettigd misschien als wegwijzer voor de allengs ingewikkelder gevallen —

1⁰. Door het punt der 0de orde 12 gaan de 2 lijnen der 0de orde 1 en 2.

2⁰. Op iedere lijn der 0de orde ligt het punt der 0de en 2 punten der 1^e orde.

3⁰. Door ieder punt der 1^e orde gaat 1 lijn der 0de en 1 lijn der 1^e orde.

4⁰. Op iedere lijn der 1^e orde liggen 2 punten der 1^e en het punt der 2^e orde.

5⁰. Door het punt der 2^e orde 1′ 2′ gaan de 2 lijnen der 1^e orde 1′ en 2′.

Overgaande tot het geval van $n = 3$ (zie blz. 209—215 en Fig. 3), stellen wij, overeenkomstig met hetgeen zoo even geschiedde, den oorsprong O of het snijpunt der alsnu aangenomen drie assen OX_1, OX_2, OX_3 door 123 voor, daarentegen deze assen zelve niet door de afzonderlijke cijfers 1, 2, 3, maar — wederom met het oog op hetgeen later voor hoogere n dienstig zal blijken, en in overeenstemming met hetgeen wij thans voor de overige te bespreken lijnen zullen doen — door hunne drie verbindingen twee aan twee, en wel liefst in opklimmende volgorde, dus door 12, 13, 23. De hoekpunten $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ der drie in de figuur voorkomende driehoeken α, β, γ, die wij thans evenals den oorsprong en de verdere benoodigde punten door drie cijfers aanduiden, noemen wij, door bij de assen waarin zij liggen het cijfer 1′ of 2′ of 3′ (wederom liever dan 4 of 5 of 6) bij te schrijven, (121′, 131′, 231′), (122′, 132′, 232′), (123′, 133′, 233′), zoodat men in zekeren zin deze enkele cijfers 1′, 2′, 3′ als de vertegenwoordigers der drie genoemde driehoeken zou kunnen beschouwen, ofschoon wij later liever op eene andere meetkundige beteekenis, die deze cijfers met de drie afzonderlijke 1, 2, 3 zelve gemeen hebben, zullen terugkomen. Vasthoudende verder aan den bij deze aangenomen notatiën reeds geldenden dubbelen regel, dat de door twee of meer punten gaande lijn de aan dezen gemeene cijfers draagt en dat wederkeerig het snijpunt van twee of meer lijnen de cijfers van dezen omvat, hebben wij de zijden waarop het eerste en het tweede, het eerste en het derde, het tweede en het derde hoekpunt van den driehoek (121′, 131′, 231′) liggen, te noemen (11′, 21′, 31′), en evenzoo voor den driehoek (122′, 132′, 232′) de zijden (12′, 22′, 32′) en voor den driehoek (123′, 133′, 233′) de zijden (13′, 23′, 33′); dus wederom de snijpunten der overeenkomstige zijden van den eersten en den tweeden dezer driehoeken (11′2′, 21′2′, 31′2′), en daarom de deze drie snijpunten bevattende homologe as der twee zelfde driehoeken 1′2′, terwijl de punten (11′3′, 21′3′, 31′3′) en (12′3′, 22′3′, 32′3′) en de homologe assen 1′3′ en 2′3′ voor den eersten en den derden en voor

den tweeden en den derden der genoemde driehoeken de overeenkomstige beteekenis hebben. En ten slotte dient alzoo, wil men stelselmatig te werk gaan, het hoofdwortelpunt X, waarop deze drie homologe assen uitloopen, door de notatie $1'2'3'$ aangeduid te worden. Dit alles vatten wij in beknopten vorm weder zamen in de hier volgende, met de voorgaande overeenstemmende, tabel:

0de orde		1	2	3	12	13	23	123
	1'	11'	21'	31'	121'	131'	231'	
1e orde	2'	12'	22'	32'	122'	132'	232'	
	3'	13'	23'	33'	123'	133'	233'	
	1'2'	11'2'	21'2'	31'2'				
2e orde	1'3'	11'3'	21'3'	31'3'				
	2'3'	12'3'	22'3'	32'3'				
3e orde	1'2'3'							

waarin ook nu uit de onderling gelijkvormige bovenrand en linkerrand de verdere vakken als in eene vermenigvuldigingstabel zijn ingevuld, en waarin men de gezamenlijke $1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 20 = \binom{6}{3}$ wortelpunten of elementen van drie cijfers, en de gezamenlijke $1.3 + 3.3 + 3.1 = 15 = \binom{6}{2}$ lijnen of elementen van twee cijfers aantreft; wordende voor ieder element, hetzij punt of lijn, wat wij genoemd hebben de orde door het aantal accenten aangegeven. Voor ieder der 20 punten zijn de 3 daardoor gaande lijnen, voor ieder der 15 lijnen de 4 daarop liggende punten weder in de eigen rij en kolom te vinden: de geheele figuur is mitsdien niet anders dan eene configuratie $(20_3, 15_4)$. Of wederom: ieder punt is een veelvoud van zijne lijnen, iedere lijn is een factor van hare punten. Of nogmaals, de

zamenstelling der meetkundige figuur of van de rekenkundige tabel, die slechts twee verschillende beelden van ééne en dezelfde zaak zijn, stap voor stap volgende:

1°. Door het punt der 0de orde 123 gaan de 3 lijnen der 0de orde 12, 13 en 23.

2°. Op iedere lijn der 0de orde ligt het punt der 0de en 3 punten der 1e orde.

3°. Door ieder punt der 1e orde gaat 1 lijn der 0de en 2 lijnen der 1^{e} orde.

4°. Op iedere lijn der 1^{e} orde liggen 2 punten der 1^{e} en 2 punten der 2^{e} orde.

5°. Door ieder punt der 2^{e} orde gaan 2 lijnen der 1^{e} en 1 lijn der 2^{e} orde.

6°. Op iedere lijn der 2^{e} orde liggen 3 punten der 2^{e} en het punt der 3^{e} orde.

7°. Door het punt der 3^{e} orde 1'2'3' gaan de 3 lijnen der 2^{e} orde 1'2', 1'3' en 2'3'.

Al het voorgaande geeft, onder rekenkundigen vorm, niet anders terug dan wat voor de beide gevallen $n = 2$ en $n = 3$ in mijn vroeger opstel meetkundig werd uiteengezet. Thans, voor $n = 4$, zullen wij in zooverre eene andere volgorde in acht nemen dat wij dadelijk eene tabel, geconstrüeerd als het ware naar het voorbeeld van de beide vorigen, op den voorgrond stellen en daarvoor dan beredeneren eensdeels dat zij eene configuratie kan vertegenwoordigen en ten andere dat deze met het zamenstel van alle op $n = 4$ betrekkelijke wortelpunten — dus niet alleen de $1 + 4 + 9 + 16 = 30$, waarmede men strikt genomen voor de constructie van het hoofdwortelpunt zelf (zie onder anderen blz. 240—247) kan volstaan, maar ook de $70 - (30 + 1) = 39$ overigen — zamenvalt. De bedoelde tabel volgt hier:

0de orde		1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	123	124	134	234	1234
1e orde	1'	11'	21'	31'	41'	121'	131'	141'	231'	241'	341'	1231'	1241'	1341'	2341'	
	2'	12'	22'	32'	42'	122'	132'	142'	232'	242'	342'	1232'	1242'	1342'	2342'	
	3'	13'	23'	33'	43'	123'	133'	143'	233'	243'	343'	1233'	1243'	1343'	2343'	
	4'	14'	24'	34'	44'	124'	134'	144'	234'	244'	344'	1234'	1244'	1344'	2344'	
2e orde	1'2'	11'2'	21'2'	31'2'	41'2'	121'2'	131'2'	141'2'	231'2'	241'2'	341'2'					
	1'3'	11'3'	21'3'	31'3'	41'3'	121'3'	131'3'	141'3'	231'3'	241'3'	341'3'					
	1'4'	11'4'	21'4'	31'4'	41'4'	121'4'	131'4'	141'4'	231'4'	241'4'	341'4'					
	2'3'	12'3'	22'3'	32'3'	42'3'	122'3'	132'3'	142'3'	232'3'	242'3'	342'3'					
	2'4'	12'4'	22'4'	32'4'	42'4'	122'4'	132'4'	142'4'	232'4'	242'4'	342'4'					
	3'4'	13'4'	23'4'	33'4'	43'4'	123'4'	133'4'	143'4'	233'4'	243'4'	343'4'					
3e orde	1'2'3'	11'2'3'	21'2'3'	31'2'3'	41'2'3'											
	1'2'4'	11'2'4'	21'2'4'	31'2'4'	41'2'4'											
	1'3'4'	11'3'4'	21'3'4'	31'3'4'	41'3'4'											
	2'3'4'	12'3'4'	22'3'4'	32'3'4'	42'3'4'											
4e orde	1'2'3'4'															

De bovenrand bevat de verbindingen één aan één, twee aan twee, drie aan drie en vier aan vier van de cijfers 1, 2, 3, 4, allen weder in opklimmende volgorde; de linkerrand onderscheidt zich daarvan ook nu slechts door bijvoeging van een accent bij ieder cijfer; uit beide randen zijn voorts wederom de verdere vakken bij wijze van vermenigvuldiging ingevuld. Terwijl wij later terugkomen op de meetkundige beteekenis die men aan de elementen van twee en aan die van één cijfer kan hechten, staan wij thans meer in het bijzonder stil bij de $1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = = 70 = \binom{8}{4}$ elementen van vier cijfers en bij de $1.4 + + 4.6 + 6.4 + 4.1 = 56 = \binom{8}{3}$ elementen van drie cijfers die de tabel in het geheel bevat. Laat vooreerst, in de 0de orde, 1234 weder de naam zijn dien wij aan den oorsprong O, en 123, 124, 134, 234 de namen die wij aan de vier daardoor gelegde assen OX_1, OX_2, OX_3, OX_4 geven; laten verder de op deze assen liggende hoekpunten van de vier vierhoeken — of, liever nog (evenals eene overeenkomstige benaming ook in mijn vroeger opstel doorgaande met meer juistheid had kunnen worden gebezigd) van de vier volledige vierhoeken — die de vier gegeven vergelijkingen meetkundig voorstellen, worden aangeduid door bij deze assen het cijfer $1'$ of $2'$ of $3'$ of $4'$ bij te schrijven, zoodat deze 16 hoekpunten of wortelpunten der 1^e orde de in het vak van vier cijfers dier orde ingevulde elementen zijn; de gegevens van ons vraagstuk zijn dan hiermede aangewezen. Men late nu, om de stelling van blz. 218 te kunnen toepassen, bijv. de vierde gegeven vergelijking of den volledigen vierhoek, waarbij het cijfer $4'$ behoort, buiten beschouwing en neme in de drie overige vergelijkingen in de eerste plaats de bij de eerste as, 123, behoorende onbekende gelijk nul: de vier vergelijkingen met vier onbekenden zijn dan tot drie vergelijkingen met drie onbekenden afgeknot of, meetkundig, de vier vierhoeken op de vier assen tot drie driehoeken op drie dezer assen. De op de configuratie dezer drie driehoeken betrekkelijke

tabel is om zoo te zeggen als onderdeel van de zoo even opgestelde tabel reeds aanwezig; want houdt men daarin voor een oogenblik alleen al die elementen aan, die het cijfer 4 wél, maar 4′ niet bevatten, dan verdwijnt de geheele linkerrand en herleidt overigens de tabel zich tot eene die zich van de volledige boven voor $n = 3$ nedergeschrevene alleen onderscheidt door bij ieder element van deze het cijfer 4 bij te schrijven en die daarom inderdaad als voorstelling van de evenbedoelde configuratie mag gelden. En daar bovendien deze bijvoeging overal van het cijfer 4 blijkbaar geene verandering hoegenaamd kan teweegbrengen in den voor tabel $n = 3$ geldigen dubbelen regel — namelijk: ieder punt behoort tot alle lijnen die factoren zijn van het punt; iedere lijn bevat alle punten die veelvouden zijn van de lijn — zoo behoudt deze regel ook zijne geldigheid voor de omschreven gedeeltelijke tabel (laat ons zeggen (4,—4′)) van $n = 4$, terwijl de elementen van vier cijfers van deze gedeeltelijke tabel juist die wortelpunten der 0[de], der 1[e], der 2[e] en der 3[e] orde van de vier gegeven vergelijkingen beteekenen, die tevens als zoodanig behooren tot de drie beschouwde daaruit afgeleide vergelijkingen. Dit zoo zijnde, is het op grond van de onderlinge onafhankelijkheid van alle acht cijfers 1, 2, 3, 4, 1′, 2′, 3′, 4′ duidelijk, vooreerst dat, als men, altijd nog de vierde vergelijking of vierhoek of cijfer 4′ wegdenkende, de tweede as 124, of de derde 134, of de vierde 234, achtervolgens uitligt in denzelfden zin als zoo even de eerste as 123, drie nieuwe gedeeltelijke tabellen (3, — 4′), (2, — 4′) en (1, — 4′) uit die van $n = 4$ komen, in het wezen der zaak ieder weder geheel identisch met die van $n = 3$, en waaromtrent zich dus het dergelijke als zoo even laat zeggen, zoodat nu met name 41′2′3′ en 31′2′3′ en 21′2′3′ en 11′2′3′ de wortelpunten der 3[e] orde zijn van de achtervolgens beschouwde vier stelsels van drie vergelijkingen; ten andere dat, als men, hetgeen op het cijfer 4′ betrekking heeft hiermede uitgeput zijnde, alsnu beurtelings de cijfers 3′ en 2′ en 1′ diezelfde rol doet vervullen, telkens weder het dergelijke geldt, zoodat de 16 elementen van het tot de 3[e] orde behoorende vak van vier

cijfers der tabel blijken de gezamenlijke 16 wortelpunten dier orde van de vier gegeven vergelijkingen voor te stellen. Maar volgens de reeds aangehaalde stelling van blz. 218 liggen nu vooreerst de vier eerstgenoemde van deze wortelpunten, dat is 41'2'3', 31'2'3', 21'2'3', 11'2'3', in eene regte lijn, die men dus regelmatigheidshalve de lijn 1'2'3' der 3e orde dient te noemen, terwijl 1'2'4', 1'3'4' en 2'3'4' voor de drie volgende viertallen van wortelpunten eene soortgelijke beteekenis verkrijgen; en gaan ten andere deze vier lijnen allen door het hoofdwortelpunt dat alzoo, wat aantal cijfers, wat orde of aantal accenten en wat zamenhang met die lijnen aangaat, teregt door de notatie 1'2'3'4' als laatste element der tabel wordt aangeduid. De voor $n = 4$ uitgeschreven tabel in haar geheel blijkt derhalve juist diegene te zijn die, om verband te houden met meergenoemde stelling, uit de tabel voor $n = 3$ als het ware behoort te worden opgebouwd; en ook voor die tabel $n = 4$ in haar geheel blijft de dubbele regel omtrent punten en lijnen, beschouwd als veelvouden en factoren, geldig, waardoor tegelijkertijd naar wij meenen het bewijs geleverd is, dat het door háár voorgestelde netwerk der bij $n = 4$ behoorende wortelpunten niet anders dan eene configuratie $(70_4, 56_5)$ is. Ten overvloede, en in navolging van hetgeen wij zoowel voor $n = 2$ als voor $n = 3$ gedaan hebben, schrijven wij ook hier de negen onderdeelen, waaruit thans de bewerking in haar geheel in figuur of tabel bestaat, voluit neder:

1⁰. Door het punt der 0de orde 1234 gaan de 4 lijnen der 0de orde 123, 124, 134 en 234.

2⁰. Op iedere lijn der 0de orde ligt het punt der 0de en 4 punten der 1e orde.

3⁰. Door ieder punt der 1e orde gaat 1 lijn der 0de en 3 lijnen der 1e orde.

4⁰. Op iedere lijn der 1e orde liggen 2 punten der 1e en 3 punten der 2e orde.

5⁰. Door ieder punt der 2e orde gaan 2 lijnen der 1e en 2 lijnen der 2e orde.

6⁰. Op iedere lijn der 2e orde liggen 3 punten der 2e en 2 punten der 3e orde.

7⁰. Door ieder punt der 3ᵉ orde gaan 3 lijnen der 2ᵉ en 1 lijn der 3ᵉ orde.

8⁰. Op iedere lijn der 3ᵉ orde liggen 4 punten der 3ᵉ en het punt der 4ᵉ orde.

9⁰. Door het punt der 4ᵉ orde 1'2'3'4' gaan de 4 lijnen der 3ᵉ orde 1'2'3', 1'2'4', 1'3'4' en 2'3'4'.

Na het uiteengezette zal het wel minder noodig zijn even uitvoerig voor hoogere waarden van n voort te gaan. Voor $n = 5$ bijv. schrijven wij de tabel, overeenkomende met de voor $n = 2$, 3 en 4 besprokene, dan ook niet neder, maar bepalen ons tot de aanwijzing dat haar bovenrand bestaat uit alle in geregelde volgorde genomen verbindingen van de vijf eerste cijfers, namelijk: | 1, 2, 3, 4, 5 | 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45 | 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345 | 1234, 1235, 1245, 1345, 2345 | 12345 | ; dat de linkerrand geheel dezelfde is behoudens toevoeging van een accent bij ieder cijfer; dat uit deze twee randen de tabel zelve wordt ingevuld als ware zij eene vermenigvuldigingstabel. En dan laat zich weder, opklimmende van $n = 4$ tot $n = 5$, geheel op dezelfde wijze als zoo even aantoonen, dat deze tabel het rekenkundige beeld is van het zamenstel der door de $1^2 + 5^2 + 10^2 + 10^2 + 5^2 + 1^2 = = 252 = \binom{10}{5}$ elementen van vijf cijfers voorgestelde wortelpunten van de 0ᵈᵉ tot de 5ᵉ orde van vijf vergelijkingen met vijf onbekenden, welke wortelpunten 6 aan 6 blijken te liggen op de door de $1.5 + 5.10 + 10.10 + 10.5 + 5.1 = = 210 = \binom{10}{4}$ elementen van vier cijfers voorgestelde regte lijnen van de 0ᵈᵉ tot de 4ᵉ orde, die telkens 5 aan 5 door een zelfde wortelpunt gaan; zoodat deze wortelpunten en lijnen werkelijk weder eene configuratie $(252_5, 210_6)$ vormen.

Zoo voortgaande, ziet men in het algemeen voor eene willekeurige waarde van n eene tabel ontstaan, bevattende evenveel elementen van n cijfers als het geheele aantal wor-

telpunten der verschillende orden bedraagt, namelijk — in verband met wat ik reeds op blz. 225—226 van mijn vroeger opstel uit de onderlinge gelijkstelling der van x onafhankelijke termen in het ontwikkelde eerste en laatste lid der identiteit

$$\left\{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\text{enz.}+\binom{n}{n}x^n\right\}.$$
$$.\left\{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\frac{1}{x}+\binom{n}{2}\frac{1}{x^2}+\text{enz.}+\binom{n}{n}\frac{1}{x^n}\right\}=$$
$$=(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=\frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$$

besloot — het aantal

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\text{enz.}+\binom{n}{n}^2=\binom{2\,n}{n};$$

en bevattende voorts, in verband met wat diezelfde identiteit door gelijkstelling der coëfficiënten van $\frac{1}{x}$ of ook van x leert, een aantal van

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}+\binom{n}{1}\binom{n}{2}+\binom{n}{2}\binom{n}{3}+\text{enz.}+$$
$$+\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}=\binom{2\,n}{n-1}=\binom{2\,n}{n+1}$$

elementen van $n-1$ cijfers; terwijl hier tevens moge worden gezegd (al heeft dit voor ons tegenwoordig doel minder belang) dat, wederom met het oog op de termen in $\frac{1}{x^2}$ of x^2, in $\frac{1}{x^3}$ of x^3, enz., in $\frac{1}{x^{n-1}}$ of x^{n-1} der identiteit, de tabel overigens nog bevat:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{2}+\binom{n}{1}\binom{n}{3}+\binom{n}{2}\binom{n}{4}+\text{enz.}+$$
$$+\binom{n}{n-2}\binom{n}{n}=\binom{2\,n}{n-2}=\binom{2\,n}{n+2}$$

elementen van $n - 2$ cijfers,

$$\binom{n}{0}\binom{n}{3} + \binom{n}{1}\binom{n}{4} + \binom{n}{2}\binom{n}{5} + \text{enz.} +$$
$$+ \binom{n}{n-3}\binom{n}{n} = \binom{2n}{n-3} = \binom{2n}{n+3}$$

elementen van $n - 3$ cijfers, enz., tot

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{1}\binom{n}{n} = \binom{2n}{1} = \binom{2n}{2n-1}$$

elementen van 1 cijfer. Ook nu weder kunnen de genoemde elementen van n cijfers de wortelpunten zelve beteekenen, en de elementen van $n - 1$ cijfers regte lijnen waarover zij regelmatig verspreid zijn, daar ook thans de boven herhaaldelijk genoemde dubbele regel omtrent punten en lijnen, beschouwd als veelvouden en factoren, toepasselijk blijkt: meer bepaaldelijk gaan namelijk in deze algemeene tabel door ieder punt der p^e orde p lijnen der $(p - 1)^e$ en $n - p$ lijnen der p^e orde, en liggen wederkeerig op iedere lijn der p^e orde $p + 1$ punten der p^e en $n - p$ punten der $(p + 1)^e$ orde. De tabel stelt alzoo weder eene door de gezamenlijke wortelpunten en door hunne lijnen gevormde configuratie

$$\left(\binom{2n}{n}_n, \binom{2n}{n-1}_{n+1}\right)$$

voor, en hiermede is dan ook de onderlinge gelijkheid der beide, ieder aan

$$\frac{(2n)!}{(n-1)!\ n!}$$

gelijke, producten

$$n\binom{2n}{n} \text{ en } (n+1)\binom{2n}{n-1}$$

naar behooren in overeenstemming.

Twee uit de wijze van zamenstelling der tabel volgende bijzonderheden willen wij nog doen opmerken. In de eerste plaats — en juist om dit sprekender te doen uitkomen, hielden wij overal de n oorspronkelijke cijfers met bijvoeging van een accent aan, liever dan evenveel hoogere cijfers in te voeren — dat elke twee elementen, symmetrisch liggende wederzijds de van den linker-boven- naar den regterbenedenhoek der tabel te trekken diagonaal, en dus uit elkander volgende door verwisseling hunner beide regthoekige coördinaten ten opzigte van bovenrand en linkerrand, zich alleen door onderlinge verwisseling van elk cijfer met en zonder accent onderscheiden; alle door deze diagonaal doorsneden elementen zijn dus tevens al diegene die bij zulk eene verwisseling onveranderd blijven, bijv. voor $n = 4$ de 10 elementen 11', 22', 33', 44', 121'2', 131'3', 141'4', 232'3', 242'4', 343'4'. In de tweede plaats, dat elke twee symmetrisch wederzijds het middelpunt van het regthoekige raam der tabel liggende elementen van n cijfers, al welke elementen de gezamenlijke wortelpunten voorstellen, elkander aanvullen tot de gezamenlijke gebezigde $2n$ cijfers met en zonder accenten. Dit laatste is bepaaldelijk een gevolg van de bij het opstellen van den bovenrand en dus ook van den linkerrand der tabel steeds in acht genomen opklimmende volgorde in ieder der groepen van verbindingen der n cijfers, waardoor al die verbindingen voorkomen in dezelfde orde die zij, ieder voor zich beschouwd als een enkel uit dezelfde cijfers bestaand getal, zouden innemen; want op grond van deze geregelde volgorde vullen bijv. in den bovenrand — het allereerste of ledige vak daarvan zich voor een oogenblik door eene nul ingevuld denkende — elke twee even ver wederzijds het midden van dien geheelen rand zelf geplaatste verbindingen elkander tot de gezamenlijke n cijfers aan; (zoo zijn bijv. in den reeds voor $n = 5$ neêrgeschreven bovenrand 0 en 12345, 1 en 2345, 2 en 1345, enz., 12 en 345, 13 en 245, enz. twee aan twee complementair ten aanzien van 12345). Immers, indien men in het algemeen de groep der $\binom{n}{p}$ verbindingen p aan p indeelt in onder-

groepen waarin telkens een zelfde linkercijfer voorkomt, dan rangschikken deze ondergroepen zich als volgt: die waarin 1 voorkomt; die zonder 1, maar met 2; die zonder 1 en 2, maar met 3; enz.; en dan komen hare complementaire ondergroepen, die te zamen de even zoovele $\binom{n}{n-p}$ verbindingen $n - p$ aan $n - p$ bevatten, namelijk die zonder 1, die met 1, maar zonder 2, die met 1 en 2, maar zonder 3, enz., blijkbaar in den beschouwden bovenrand in omgekeerde volgorde voor. En daar het dergelijke blijft gelden wanneer men ieder der gezegde ondergroepen nogmaals, en wel ditmaal naar gelang van het tweede cijfer links, indeelt in nieuwe ondergroepen en deze weder ieder met hare complementaire in verband beschouwt; en wederom bij onderverdeeling naar den maatstaf van het derde cijfer, enz., totdat de beschouwde groep in haar geheel in hare enkele verbindingen is ontleed, is hiermede naar wij meenen de doorgaande symmetrische plaatsing van elk paar complementaire verbindingen in den bovenrand uitgewezen. Zij geldt dan evenzeer in den geheel gelijkvormigen linkerrand, en mitsdien, krachtens de zamenstelling der tabel uit beide randen, ook in de tabel zelve ten opzigte van haar middelpunt, gelijk beweerd werd. Deze symmetrische plaatsing van elk paar complementaire elementen van n cijfers der tabel wijst er, in verband met den aard der configuratie zelve, nog op heen, dat in dit opzigt het paar der laatste elementen van beide randen, namelijk $123 \ldots n$ en $1'2'3' \ldots n'$, niets wezenlijks vóór heeft boven ieder ander complementair paar; en in meetkundigen zin blijkt dus ook de in mijn vroeger opstel aangewezen wederkeerigheid tusschen de beide door de genoemde laatste elementen voorgestelde wortelpunten, namelijk de oorsprong O en het hoofdwortelpunt X, evenzeer te gelden voor ieder ander paar complementaire of toegevoegde wortelpunten der volledige figuur. In verband hiermede zij tevens nog opgemerkt, dat de beschouwde configuratie eene zoogenaamde regelmatige is.

Door den Heer DE VRIES wordt in § 9, blz. 114, zijner in den aanhef dezes aangehaalde bijdrage ook melding gemaakt van de configuratie $(20_3, 15_4)$, gevormd door de $\binom{6}{2}=15$ radicale lijnen en de $\binom{6}{3}=20$ radicale punten van zes willekeurige in één vlak liggende cirkels. De boven in het geval van $n=3$ beschouwde configuratie $(20_3, 15_4)$, die bleek te ontstaan uit drie driehoeken met gemeenschappelijk homoloog middelpunt, kan steeds, en zelfs op een aantal wijzen dat als een oneindig aantal van de vierde orde voorkomt, als zulk eene uit zes cirkels voortvloeijende configuratie worden opgevat. Men denke zich namelijk vooreerst twee overigens willekeurige cirkels, hebbende eene der 15 lijnen van onze gegeven configuratie, bijv. de lijn 12, tot radicale lijn — en juist deze éene voorwaarde, die toelaat dat twee willekeurige, bestaanbare of toegevoegd onbestaanbare, punten dezer lijn als snijpunten der beide cirkels gedacht worden en dat twee willekeurige punten van de in het midden opgerigte loodlijn als hunne middelpunten worden aangenomen, wijst op de evenbedoelde viervoudige oneindigheid van dergelijke cirkelparen heen — dan kan, omdat de lijn 12 bijv. de beide lijnen 13 en 23 in een zelfde punt, namelijk 123, snijdt, het snijpunt der loodlijnen, uit het middelpunt van den eersten cirkel op 13 en uit dat van den tweeden op 23 nedergelaten, als middelpunt van een derden cirkel dienen wiens straal zóó te bepalen is dat 13 en 23 gelijktijdig de radicale lijnen van dezen nieuwen cirkel met de beide eersten en dus 123 het gemeenschappelijk radicaal punt van alle drie wordt. Geheel op dezelfde wijze geeft ieder der drie andere op de lijn 12 gelegen punten 121′, 122′ en 123′ der configuratie, door middel telkens van de twee andere aldaar zamenkomende lijnen der configuratie, aanleiding tot een nieuwen cirkel die op overeenkomstige wijze met de twee eerste cirkels in verband staat. En dat dan de volledige gegeven configuratie werkelijk die van alle radicale punten en lijnen van de zes aanwezige cirkels onderling is, blijkt doordien de radi-

cale lijn bijv. van de beide uit 123 en uit 121′ voortgekomen cirkels moet gaan door de radicale punten van de twee drietallen die dit cirkelpaar opvolgend met den eersten en met den tweeden aangenomen cirkel vormt, dat is door het snijpunt der radicale lijnen 13 en 11′ en door dat van 23 en 21′, dat is door de beide als 131′ en 231′ gegeven punten, zoodat deze radicale lijn noodwendig de gegeven lijn 31′ moet zijn; terwijl dezelfde redenering natuurlijk op iedere andere verbinding van twee of ook van drie der zes cirkels toepasselijk is. Deze zes cirkels zelve, waarvan de radicale lijnen en punten door de verbindingen twee aan twee en drie aan drie van de zes cijfers 1, 2, 3, 1′, 2′, 3′ worden voorgesteld, kunnen dus eigenaardig door deze cijfers op zich zelve worden aangeduid; en hierdoor is tegelijkertijd de vroeger toegezegde meetkundige beteekenis dezer $1.3 + 3.1 = = 6 = \binom{6}{1}$ in de tabel voor $n = 3$ voorkomende elementen van één cijfer toegelicht. Hierbij ten slotte nog de volgende opmerkingen: 1°. Ieder der 10 paren van wat wij boven noemden complementaire of toegevoegde of wederkeerige wortelpunten van de gegeven configuratie is een der 10 paren radicale punten van twee drietallen telkens waarin men de zes cirkels kan indeelen. 2°. De volledige zeshoek der middelpunten van de zes cirkels is eene configuratie $(6_5, 15_2)$, waarvan de 15 zijden loodregt staan op de 15 radicale lijnen en tevens 20 driehoeken vormen in dier voege dat de drie radicale lijnen door ieder radicaal punt loodregt staan op de zijden van den overeenkomstigen uit deze 20 driehoeken. 3°. Bij behoud der zes middelpunten kunnen voor dezelfde radicale lijnen de vierkanten der zes stralen allen met een zelfde willekeurig bedrag vermeerderd of verminderd worden; dit is dus een voorbeeld van de aangevoerde meervoudige oneindigheid der cirkelstelsels.

Indien men, zooals oorspronkelijk in mijn vroeger opstel geschiedde, in het geval van $n = 4$ aanneemt dat de gebezigde constructie-figuur of de configuratie $(70_4, 56_5)$, in plaats van in één vlak te liggen, eene ruimtefiguur is, kan men die geheel in denzelfden geest als zoo even ook op-

vatten als ontstaan uit acht willekeurige bollen. Terwijl dan deze bollen zelve worden voorgesteld door de $1.4 + 4.1 = = 8 = \binom{8}{1}$ elementen van één cijfer, en de bij hunne verbindingen twee aan twee behoorende radicale vlakken door de $1.6 + 4.4 + 6.1 = 28 = \binom{8}{2}$ elementen van twee cijfers die de tabel voor $n = 4$ bevat en op wier meetkundige beteekenis wij zeiden te zullen terugkomen, vertegenwoordigen de toen reeds nader onderzochte $56 = \binom{8}{3}$ elementen van drie cijfers de radicale lijnen der drie aan drie genomen bollen, en de $70 = \binom{8}{4}$ elementen van vier cijfers hunne uit viertallen voortkomende radicale punten. Bij opmerkingen, die zich aan deze beschouwing in denzelfden trant als zoo even zouden laten vastknoopen, staan wij niet verder stil.

Evenzoo stippen wij slechts met een enkel woord aan, dat men voor willekeurige waarden van n ook vlakke en ruimte-figuren zou kunnen beschouwen, correlatief van de tot nog toe besprokene, en waarin dus punten en lijnen, of wel punten en vlakken, lijnen en lijnen in elkanders plaats zouden komen. Voor $n = 3$ zou de op deze wijze ontstaande configuratie $(15_4, 20_3)$ ook hare verklaring kunnen vinden in de $\binom{6}{2} = 15$ uitwendige gelijkvormigheidspunten — of desverkiezende ook sommige uitwendige, en bepaalde daarbij behoorende inwendige gelijkvormigheidspunten — van zes willekeurige cirkels in één vlak, genomen twee aan twee, en in de $\binom{6}{3} = 20$, bij viertallen door deze punten gaande en de punten zelve bij drietallen bevattende, gelijkvormigheidslijnen dezer cirkels drie aan drie. Voor $n = 4$ is aan de configuratie $(56_5, 70_4)$ eene overeenkomstige beteekenis in de ruimte te geven, afgeleid uit acht willekeurige bollen.

Nadat ik het vorenstaande had opgesteld maakte de Heer DE VRIES mij nog opmerkzaam op de verhandeling van S. KANTOR »Ueber eine Gattung von Configurationen in der Ebene und im Raume", voorkomende in den 80en Band, 2e Abtheilung (Jahrg. 1879) van de Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Kais. Akademie der Wissenschaften, Wien, 1880, blz. 715—723. In deze verhandeling wordt in de eerste plaats (blz. 716) opgemerkt dat, als de hoekpunten van drie volledige vierhoeken op vier door één punt gaande stralen liggen, de vier punten van HESSE (dat zijn de gemeenschappelijke snijpunten telkens van drie assen van homologie, als waarvan sprake was op blz. 211, regel 7—10, van mijn vroeger opstel), waartoe de vier uit deze vierhoeken te vormen drietallen van onderling perspectivische driehoeken aanleiding geven, tot ééne regte lijn behooren; en vervolgens dat, als vier volledige vierhoeken in vier door één punt getrokken lijnen beschreven zijn, de vier zoo even bedoelde regte lijnen, ontstaande uit de vier te beschouwen drietallen dezer vierhoeken, in één punt zamenkomen. Op deze wijze voortgaande, komt KANTOR tot de beide op blz. 716 onder in déze woorden uitgesproken stellingen:

»Construirt man nun $n-1$ vollständige n-Ecke, deren Ecken auf n gegen einen Punkt W convergirenden Strahlen liegen, so erhält man in jede Combination dieser Strahlen zu $n-1$ eine Reihe von $n-1$ vollständigen $(n-1)$-Ecken eingeschrieben und jede dieser Reihen liefert einen Punkt T_{N-1}. Diese n Punkte liegen alle in einer Geraden g_N. (1 Figur)".

»Werden n vollständige n-Ecke in der eben beschriebenen Lage angenommen, so treffen sich die für ihre n Combinationen zu je $n-1$ construirten Geraden g_N in demselben Punkte T_N. (2 Figur)".

(NB. De twee hier aangehaalde figuren komen waarschijnlijk voor in de vroegere verhandeling van KANTOR »Ueber eine Gattung merkwürdiger Geraden und Punkte bei vollständigen n-Ecken auf dem Kreise" in de Sitzungsberichte als voren, 78er Band, 2e Abtheilung, waarnaar bij, evenals naar zijne verhandeling »Ueber den Zusammenhang

von n beliebigen Geraden in der Ebene", idem, 76ᵉʳ Band, verwijst. Zie overigens nog over configuratiën in het algemeen de in het opstel van Dr. J. DE VRIES vermelde litteratuur).

En van deze stellingen leidt de eerste hem tot eene uit $n-1$ volledige n-hoeken ontstaande configuratie

$$\left(\binom{2n-1}{n-1}_n, \binom{2n-1}{n-1}_n\right),$$

en de tweede tot eene uit n volledige n-hoeken ontstaande configuratie

$$\left(\binom{2n}{n}_n, \binom{2n}{n-1}_{n+1}\right);$$

zijnde deze laatste juist dezelfde als de door mij uit een eenigzins ander gezigtspunt beschouwde.

Bovendien wordt door KANTOR op blz. 719 nog eene meer algemeene configuratie

$$\left(\binom{m+n-1}{n}_n, \binom{m+n-1}{n-1}_m\right)$$

afgeleid, bij welke gelegenheid onder anderen wordt gezegd dat de bij het tellen van de aantallen punten en lijnen dézer configuratie voorkomende sommatiën — overeenkomende met de boven door mij uit de ontwikkeling van $\dfrac{(1+x)^{2n}}{x^n}$ verkregen sommatiën voor het beschouwde geval $m=n+1$ — ook, zooals door NETTO werd opgemerkt, uit de hypergeometrische reeks volgen.

De op blz. 721—723 behandelde uitbreiding op de ruimte staat eveneens in naauw verband met wat ik in mijn vorig en in mijn tegenwoordig opstel voor het geval der ruimte heb uiteengezet.

Naar mij voorkomt bevinden zich in het besproken stuk van KANTOR de volgende kleine druk- of schrijffouten:

Blz.	717,	regel	14,	staat:	fünf;	lees: n.
»	»	»	17,	» :	$\binom{n-1}{1}$;	lees: $\binom{n-1}{2}$.
»	719,	»	5,	» :	weniger;	» : mehr.
»	723,	»	6,	» :	$\binom{m+n}{n+1}$;	» : $\binom{m+n}{n-1}$.

Gaarne maak ik van deze gelegenheid gebruik om eene aanvulling mede te deelen die, zooals de Heer A. E. Rahusen, Leeraar aan de Polytechnische School te Delft, mij deed opmerken, de op blz. 219—220 van mijn vroeger opstel vermelde determinanten-eigenschap, overgenomen uit mijne bijdrage in het *Nieuw Archief voor Wiskunde*, Deel VI, Stuk I, 1879, blz. 79—80, behoeft. Ik haal daartoe de volgende woorden van den Heer Rahusen aan:

»Uit een matrix M, die uit $(n-1)$ rijen en n kolommen bestaat, kan men door weglating telkens van eene kolom n determinanten van den $(n-1)^{\text{sten}}$ graad vormen, die aangegeven worden door $P_1, P_2, \ldots P_n$. Zijn i $[i > 1]$ dezer determinanten, bijv. $P_1, P_2, \ldots P_i$, gelijk nul, zoo zijn tevens gelijk nul de $(n-i)$ overige determinanten $P_{i+1}, \ldots P_n$, *tenzij* gelijk nul zijn alle determinanten van den $(n-i)^{\text{den}}$ graad, die gevormd kunnen worden uit de matrix, welke aan de determinanten $P_1, P_2, \ldots P_i$ gemeen is."

»Zij bijv. $M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$ en P_1, P_2, P_3, P_4, P_5

de determinanten, verkregen door uit de matrix M de 1ste, 2de, 3de, 4de of 5de kolom weg te laten; zoo volgt uit

$$P_1 = P_2 = P_3 = 0\,, \quad \begin{pmatrix} n = 5 \\ i = 3 \end{pmatrix},$$

dat:

$$\text{of } P_4 = P_5 = 0 \text{ of } \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \\ a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} = 0 \text{ is."}$$

»Nauw verwant aan deze stelling is de volgende: Is een determinant gelijk nul en tevens de minor van het element a_{rs}, zoo zijn tevens gelijk nul de minoren der overige elementen *of* van de rij, *of* van de kolom, waartoe het element a_{rs} behoort."

»In verband hiermede staat ook, dat de bekende stelling — welke zegt, dat, als een determinant gelijk nul is, de elementen van elke rij (of kolom) uitgedrukt kunnen worden als homogene lineaire functies, met gelijke coëfficiënten, der overeenkomstige elementen der overige rijen (of kolommen) — alleen waar is, wanneer geen der eerste minoren gelijk nul is."

De Heer RAHUSEN meldt mij te dezer zake nog dat hij in een waarschijnlijk spoedig in de *Annales de l'Ecole Polytechnique de Delft* verschijnend opstel onder anderen de volgende meer algemeene stelling uitwerkt:

»Uit de matrix

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1p} & b_{11} & b_{12} \ldots b_{1q} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2p} & b_{21} & b_{22} \ldots b_{2q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{np} & b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nq} \end{vmatrix}$$

(waarbij $q < n < p + q$ wordt ondersteld) kan men $\binom{p+q}{n}$ determinanten van den n^{den} graad vormen. Zijn onder deze determinanten alle die, welke de q kolommen b bevatten, gelijk nul, dan zijn ook alle overige gelijk nul, *tenzij* gelijk nul zijn alle determinanten van den q^{den} graad, die men uit de q kolommen b kan vormen."

Julij 1888.

RAPPORT

OVER DE VERHANDELING:

ALGEMEENE EIGENSCHAPPEN VAN DE ZUIVER ROLLENDE BEWEGING VAN EEN OMWENTELINGSLICHAAM OP EEN HORIZONTAAL VLAK,

TOEGEPAST OP DE

BEWEGING VAN EEN OMWENTELINGSLICHAAM OM EEN VAST PUNT VAN ZIJNE AS,

DOOR

Dr. G. SCHOUTEN.

(Uitgebracht in de vergadering van 30 Juni 1888).

Deze verhandeling van Dr. G. SCHOUTEN bestaat, zooals ook de titel reeds te kennen geeft, uit twee gedeelten die door een tamelijk lossen band verbonden zijn.

Het eerste deel behandelt in twee hoofdstukken het rollen van een omwentelingslichaam — onderworpen aan de werking der zwaartekracht — over een horizontaal vlak. Na in het eerste hoofdstuk de bewegingsvergelijkingen afgeleid en aan eenige herleidingen onderworpen te hebben, neemt de schrijver in het tweede zijne toevlucht tot eene graphische methode ten einde orde te brengen in de verschillende gevallen van dit inderdaad tamelijk ingewikkelde mechanische probleem. Schrijver is in de keuze dier methode naar ons inzien gelukkig geslaagd. Terwijl hij den hellingshoek als abscis gebruikt, wordt als ordinaat uitgezet wat schrijver de hellingsenergie noemt, dat is eene grootheid gelijk aan het verschil tusschen de totale energie (potentieele +

kinetische) en de schommelingsenergie, onder welke laatste verstaan wordt dat gedeelte der energie 't welk van de fluctie van den hellingshoek afhankelijk is, indien men als onafhankelijk veranderlijken de drie welbekende EULER'sche hoeken invoert. Van de kromme die op deze wijze ontstaat, kan het beloop in algemeene trekken worden aangegeven, terwijl hare snijding door eene rechte, wier afstand tot de abscissenas, waarmede zij evenwijdig loopt, gelijk is aan de totale energie, de beweging in groote trekken doet kennen en de bijzondere gevallen tot hun recht doet komen.

Het tweede gedeelte der verhandeling loopt over het bekende probleem van de beweging van een omwentelingslichaam onderworpen aan de zwaartekracht en ondersteund in een vast punt der omwentelingsas. Inderdaad kan dit probleem als een bijzonder geval beschouwd worden van het meer algemeene in het eerste gedeelte behandelde. Deze beschouwing is echter weinig natuurlijk en werpt geen nieuw licht op het meer bijzonder probleem. Wat echter wel eenig verband brengt tusschen beide gedeelten der verhandeling is de eenheid van methode. De aanwending van de kromme der hellingsenergie brengt hier wel geene nieuwe waarheden te voorschijn, wat bij een zoo veelvuldig en volledig behandeld vraagstuk ook nauwelijks te verwachten ware, maar zij geeft toch een zeer helder overzicht van de verschillende gevallen die zich kunnen voordoen en blijkt naast andere beschouwingswijzen recht van bestaan te bezitten. Vooral de eigenaardige wijze, waarop de bijzondere gevallen bij welke de as den verticalen stand aannemen kan of asymptotisch tot deze nadert, optreden, verdient opmerking.

Tevens behandelt schrijver de integratie der bewegingsvergelijkingen. Behalve LOTTNER, door den schrijver aangehaald, hebben nog meerdere anderen *) algemeene oplossingen met behulp van elliptische functiën gegeven. Toch gelooven wij dat de korte en bondige aanwijzingen dier

*) FRENZEL, *Schlömilch Zeitschr.* XXVI, § 104—127; SÖDERBLOM, *Upsola, Acta* XII (3) en vooral JACOBI, *Gesammelte Werke*, Bd. II, S. 496.

oplossing door den schrijver achter elk der verschillende gevallen gevoegd, niet misplaatst zijn in zijne verhandeling.

Wij meenen aan de Akademie de opname der geheele verhandeling in de Verslagen en Mededeelingen te mogen aanbevelen.

D. J. KORTEWEG.
CH. M. SCHOLS.

ALGEMEENE EIGENSCHAPPEN

VAN DE

ZUIVER ROLLENDE BEWEGING VAN EEN OMWENTELINGS-LICHAAM OP EEN HORIZONTAAL VLAK,

TOEGEPAST OP DE

BEWEGING VAN EEN OMWENTELINGSLICHAAM OM EEN VAST PUNT VAN ZIJNE AS.

DOOR

Dr. G. SCHOUTEN.

INLEIDING.

Uit de eerste integraalvergelijkingen van de zuiver rollende beweging van een omwentelingslichaam op een horizontaal vlak kunnen eenige algemeene eigenschappen worden afgeleid, wier kennis een algemeen inzicht geeft in den aard der verschillende bewegingen die het lichaam kan hebben, met aanwijzing van de voorwaarden, waaronder deze plaats grijpen.

Een weg tot nadere bepaling der bewegings-elementen door berekening wordt daardoor als van zelve aangewezen.

Nadat in het eerste hoofdstuk de integraalvergelijkingen zijn afgeleid, worden in het tweede de algemeene eigenschappen der beweging ontwikkeld, die in het derde worden toegepast op het geval, dat het lichaam op het vlak steunt in een punt, op zijne as gelegen, of ook, daar dit punt

gedurende de beweging in rust blijft, op de beweging van een omwentelingslichaam om een punt van zijne as.

Mocht van dit vraagstuk reeds eene volledige oplossing bestaan, dan moge de hier gegevene eene plaats vinden ter wille van de methode van onderzoek.

In geen der beide mij bekende verhandelingen wordt het vraagstuk volledig opgelost.

In het stuk van Dr. C. LOTTNER *) wordt alleen het geval behandeld, dat het moment ($M\lambda$) van de hoeveelheid van beweging ten opzichte van de verticaal van het vaste punt eene absoluut grootere waarde heeft dan dat ($M\mu$) ten opzichte van de as, hoewel er in de verhandeling zelve van die beperking geen melding wordt gemaakt.

In de verhandeling van Dr. P. VAN GEER †) wordt eene nog meer beperkende voorwaarde gesteld: het lichaam wordt ondersteld in beweging gebracht te zijn door een koppel van impulsie, loodrecht op de as van 't lichaam, zoodat $\lambda = \mu \cos \alpha$ wordt ondersteld, als α de hellingshoek is bij 't begin van de beweging.

Aan de hier volgende oplossing ligt eene graphische methode ten grondslag, terwijl zooveel mogelijk getracht is aan de standvastigen, welke in de vergelijkingen voor de bewegings-elementen voorkomen, eene mechanische beteekenis te geven, zoodat het mogelijk werd de uitkomsten aanschouwelijk voor te stellen.

---

*) Dr. C. LOTTNER, Reduction der Bewegung eines schweren, um einen festen Punct rotirenden Revolutionskörpers auf die elliptischen Transcendenten. *Journal* von CRELLE, 50er Band, 1855.

†) Dr. P. VAN GEER, Over de beweging van een zwaar lichaam om een vast punt. *Verslagen en Mededeelingen* der Kon. Akad. v. Wet., Afd. Natuurkunde, 2e Reeks, Deel V, 1871.

HOOFDSTUK I.

De eerste integraalvergelijkingen van de beweging.

1. Zij PQ (fig. 1) de as van een omwentelingslichaam en S het punt, waarmede dit op het horizontale vlak rust. Is C het zwaartepunt en treft de loodlijn uit S op de as neergelaten deze in D, dan kunnen $CD = \xi$ en $SD = \eta$ als de coordinaten van het steunpunt beschouwd worden.

2. De stand van het lichaam is bepaald door de volgende hoeken:

a. den hoek θ, gevormd door een bepaald deel CQ van de as met de naar boven als positief gerekende verticaal; wij zullen dien hoek den *hellingshoek* van het lichaam noemen;

b. den hoek ψ, dien het verticale meridiaanvlak PSQ met een vast verticaal vlak XOZ maakt. Wij zullen dezen hoek het *azimuth* van het lichaam noemen, en aannemen dat hij beschreven wordt, als het laatstgenoemde vlak om de naar boven gerichte verticaal als as in den zin van de wijzers eener klok wordt gewenteld tot het evenwijdig komt met het eerstgenoemde;

c. den hoek φ, dien een bepaald meridiaanvlak van het lichaam met het verticale meridiaanvlak maakt. Wij zullen aannemen, dat φ beschreven wordt, als het verticale meridiaanvlak om CQ als as in den zin van de wijzers eener klok wordt gewenteld tot het samenvalt met het bepaalde meridiaanvlak.

3. Het lichaam zal ieder oogenblik eene wenteling bezitten om eene as, die door het steunpunt gaat. De hoeksnelheid ω, waarmede wij onderstellen dat deze wenteling op zeker oogenblik plaats grijpt, ontbinden wij in de volgende hoeksnelheden:

a. $\dfrac{d\theta}{dt}$ of θ' om de lijn, die in S loodrecht staat op het verticale meridiaanvlak;

b. $\frac{d\varphi}{dt}$ of φ' om de lijn uit S evenwijdig aan CQ getrokken;

c. $\frac{d\psi}{dt}$ of ψ' om de verticaal van het steunpunt.

Wij merken hierbij op, dat de hoeksnelheid n, waarmede het lichaam in werkelijkheid om de as wentelt, gelijk is aan φ' vermeerderd met de hoeksnelheid $\psi' \cos\theta$, waarmede het verticale meridiaanvlak ten opzichte van het bepaalde meridiaanvlak wentelt, zoodat

$$n = \varphi' + \psi' \cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

is. De hoeksnelheid ω wordt dus gegeven door

$$\omega^2 = n^2 + \theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

4. De levende kracht T van het lichaam, als dit de bovengenoemde wenteling ω bezit, kan op de volgende wijze bepaald worden:

De lijnen door het zwaartepunt getrokken evenwijdig aan de θ'-, n-, $\psi' \sin\theta$-assen vormen een stelsel hoofdassen van inertie. Zij ϱ_x de traagheidsstraal ten opzichte van eene middellijn van den aequator, en ϱ_z die ten opzichte van de lichaams-as.

De afstand d van het zwaartepunt tot de oogenblikkelijke as wordt gegeven door

$$d^2 = \xi^2 + \eta^2 - \left(\frac{\xi \,.\, n - \psi' \sin\theta \,.\, \eta}{\omega}\right)^2.$$

Is dus M de massa van het lichaam, dan zal

$$\frac{2\,T}{M} = \omega^2 \left\{ d^2 + \varrho^2_x \,.\, \frac{\theta'^2}{\omega^2} + \varrho^{2x} \,.\, \frac{\psi'^2 \sin^2\theta}{\omega^2} + \varrho^2_z \,.\, \frac{n^2}{\omega^2} \right\}$$

zijn, welke vergelijking door substitutie van de waarde van d overgaat in

$$\frac{2T}{M} = \theta'^2 (\varrho^2_x + \xi^2 + \eta^2) + \psi'^2 \sin^2\theta (\varrho^2_x + \xi^2) +$$
$$n^2 (\varrho^2_z + \eta^2) + 2\,\xi\,\eta\,.\,n\,\psi' \sin\theta \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(3)$$

5. Daar ψ en φ niet in T voorkomen, evenmin als in de krachtsfunctie $U = Mg\,(\eta \sin\theta - \xi \cos\theta)$, welke enkel eene functie van θ is, daar ξ en η als zoodanig moeten beschouwd worden, zoo vinden wij door toepassing van de bewegingsvergelijkingen

$$\frac{d\dfrac{dT}{d\psi'}}{dt} = \frac{d(T + U)}{d\psi}$$

zooals LAGRANGE die heeft afgeleid en waarin ψ eene der algemeene coordinaten is, waarin T en U zijn uitgedrukt, de volgende integraalvergelijkingen:

$$\frac{dT}{d\psi'} = \text{constante} = M\lambda\,;\; \frac{dT}{d\varphi'} = \text{constante} = M\mu.$$

Beiden drukken uit, dat het moment van de hoeveelheid van beweging om zekere as standvastig blijft gedurende de beweging; de eerste om de verticaal van het steunpunt, de tweede om de lijn uit het steunpunt evenwijdig aan de lichaams-as getrokken.

Worden deze vergelijkingen ontwikkeld door middel van (3), dan vinden wij

$$\psi' \sin^2\theta (\varrho^2_x + \xi^2) + n\cos\theta (\varrho^2_z + \eta^2) + \xi\eta \sin\theta (n + \psi' \cos\theta) = \lambda \;(4),$$

$$\psi' \sin\theta \,.\, \xi\eta \qquad + n(\varrho^2_z + \eta^2) \qquad = \mu \;(5).$$

Eene derde integraalvergelijking wordt gegeven door het beginsel van arbeidsvermogen, uitgedrukt in de vergelijking

$$T - U = \text{const.},$$

welke door middel van (3) overgaat in

$$\theta'^2 (\varrho^2_x + \xi^2 + \eta^2) + \psi'^2 \sin^2\theta (\varrho^2_x + \xi^2) + n^2 (\varrho^2_z + \eta^2) +$$
$$+ 2\,\xi\,\eta\,.\,n\,\psi' \sin\theta = \text{const.} - 2g\,(\eta \sin\theta - \xi \cos\theta)\,.\,.\,(6)$$

6. De vergelijkingen (4) en (5) bepalen n en ψ' als functies van θ, zoodat (6) θ' ook als functie van θ geeft. De oplossing geeft

$$\left.\begin{aligned}
n &= \frac{-\dfrac{\lambda - \mu\cos\theta}{\sin\theta}\,\xi\,\eta + \mu\,(\rho^2_x + \xi^2)}{(\rho^2_x + \xi^2)(\rho^2_z + \eta^2) - \xi^2\,\eta^2}\\
\psi'\sin\theta &= \frac{\dfrac{\lambda - \mu\cos\theta}{\sin\theta}\,(\rho^2_z + \eta^2) - \mu\,\xi\,\eta}{(\rho^2_x + \xi^2)(\rho^2_z + \eta^2) - \xi^2\,\eta^2}\\
\theta'^2(\rho^2_x + \xi^2 + \eta^2) &= \text{const.} - \left\{2\,g\,h + \frac{\mu^2}{\rho^2_x + \eta^2} + \right.\\
&\left. + \frac{\rho^2_z + \eta^2}{(\rho^2_x + \xi^2)(\rho^2_z + \eta^2) - \xi^2\eta^2}\left(\frac{\lambda - \mu\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\mu\,\xi\,\eta}{\rho^2_z + \eta^2}\right)^2\right\}
\end{aligned}\right\} .(7)$$

waarin $h = \eta\sin\theta - \xi\cos\theta$ de hoogte van het zwaartepunt boven het steunvlak voorstelt.

De laatste van deze zal na integratie θ als functie van den tijd leeren kennen, terwijl door twee quadraturen n en ψ in θ zullen bepaald worden.

7. Om de plaats van het lichaam in de ruimte aan te wijzen, zal het voldoende zijn die van een zijner punten, b.v. het zwaartepunt, te bepalen.

De snelheid van het zwaartepunt is:

$-\psi'\sin\theta\,.\,\xi - n\,\eta$ in de richting van de θ'-as;

$\theta'\,\eta$ in die van de lichaams-as;

$\theta'\,\xi$ in die van de $\psi'\sin\theta$-as.

De ontbondenen u, v, w van die snelheid resp. in de richtingen van de vaste coordinaat-assen OX, OY, OZ zijn dus

$$\left.\begin{aligned}
u &= \theta'(\eta\sin\theta - \xi\cos\theta)\cos\psi + (n\,.\,\eta + \psi'\sin\theta\,.\,\xi)\sin\psi,\\
v &= \theta'(\eta\sin\theta - \xi\cos\theta)\sin\psi - (n\,.\,\eta + \psi'\sin\theta\,.\,\xi)\cos\psi,\\
w &= \theta'(\eta\cos\theta + \xi\sin\theta).
\end{aligned}\right\} .(8)$$

Deze geïntegreerd zullen de coordinaten x, y, z van het zwaartepunt geven.

De coordinaten X, Y van het steunpunt zijn nu

$$\left.\begin{aligned} X &= x + (\xi \sin\theta + \eta \cos\theta) \cos\psi \\ Y &= y + (\xi \sin\theta + \eta \cos\theta) \sin\psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (9)$$

zoodat de ontbondenen U en V van de snelheid, waarmede S zijn spoor beschrijft resp. in de richtingen OX en OY gegeven worden door

$$\left.\begin{aligned} U &= \varphi' \sin\psi \,.\, \eta + (\xi' \sin\theta + \eta' \cos\theta) \cos\psi, \\ V &= -\varphi' \cos\psi \,.\, \eta + (\xi' \sin\theta + \eta' \cos\theta) \sin\psi, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (10)$$

waarin ξ' voor $\dfrac{d\xi}{dt}$ en η' voor $\dfrac{d\eta}{dt}$ gesteld zijn.

Uit deze vergelijkingen volgt verder

$$\left.\begin{aligned} V \cos\psi - U \sin\psi &= -\varphi' \,.\, \eta \\ V \sin\psi + U \cos\psi &= \xi' \sin\theta + \eta' \cos\theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots (11)$$

De eerste stelt de snelheid voor, waarmede het steunpunt S zich in de richting van de θ'-as beweegt, de tweede die in de richting van het beweeglijke been van het azimuth.

HOOFDSTUK II.

Algemeene eigenschappen van de zuiver rollende beweging van een omwentelingslichaam op een horizontaal vlak.

9. Worden de beide leden van de laatste der vergelijkingen (7) met $\frac{1}{2} M$ vermenigvuldigd, dan stelt het eerste lid

$$\tfrac{1}{2} M \theta'^2 (\varrho^2_x + \xi^2 + \eta^2)$$

de energie voor, die het lichaam verkrijgt alleen ten gevolge van de verandering in helling, die zijne as ondergaat; dit gedeelte van de energie van 't lichaam zullen wij de *schommelings-energie* noemen.

De constante in het tweede lid stelt de *totale energie* van het lichaam voor.

De vorm tusschen de accolades, dien wij door Θ zullen aanduiden, zoodat

$$\Theta = \tfrac{1}{2} M \left\{ 2\,g\,h + \frac{\mu^2}{\varrho^2_z + \eta^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varrho^2_z + \eta^2}{(\varrho^2_x + \xi^2)\,(\varrho^2_z + \eta^2) - \xi^2\eta^2} \left(\frac{\lambda - \mu \cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\mu\,\xi\,\eta}{\varrho^2_z + \eta^2} \right)^2 \right\} \quad ..(12)$$

is, stelt het overige gedeelte van de energie voor, nl. de potentiale verminderd met die, welke het lichaam heeft ten gevolge van de wentelingen n en ψ'. Daar bij bepaalde waarden van λ en μ die hoeveelheid alleen afhangt van de helling θ der as, zullen wij haar de *hellings-energie* noemen.

10. Zetten wij nu Θ als ordinaat uit op een rechthoekig coordinaat-stelsel met θ tot abscis, dan stelt

$$y = \Theta$$

de vergelijking eener kromme voor, die wij de *kromme der hellings-energie* zullen noemen.

Deze kromme heeft, als wij het geval $\lambda^2 = \mu^2$ voorloopig uitsluiten en ons bepalen tot de abscissen tusschen 0 en π, de lijnen $\theta = 0$ en $\theta = \pi$ tot asymptoten; zij ligt geheel boven de abscissen-as en moet dus minstens één punt hebben, waarin de raaklijn evenwijdig is aan de abscissen-as, waar Θ dus eene *minimum-waarde* heeft.

De vergelijking

$$\frac{d\,\Theta}{d\,\theta} = 0$$

moet derhalve minstens één bestaanbaren wortel hebben tusschen 0 en π gelegen, die Θ tot een *minimum* maakt.

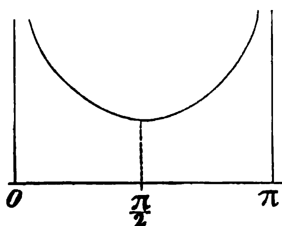
Heeft die vergelijking meer bestaanbare wortels, dan heeft de kromme voor die wortels afwisselend *maximum-* en *minimum*-ordinaten, tenzij in die punten buigpunten mochten aanwezig zijn.

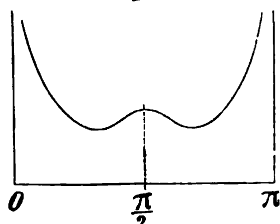
Heeft dus de kromme der hellings-energie voor elk stel waarden van λ en μ minstens ééne *minimum*-ordinaat, omgekeerd zullen λ en μ altijd zóó bepaald kunnen worden, dat die minimum-ordinaat bij eene willekeurig gekozen abscis α behoort. Daartoe wordt slechts vereischt, dat λ en μ voldoen aan de vergelijking

$$\left(\frac{d\,\Theta}{d\,\theta}\right)_x = 0,$$

wat op onbepaald vele wijzen kan plaats grijpen, aangezien λ en μ onderling onafhankelijke willekeurige waarden zijn.

Is het lichaam b. v. eene ellipsoïde van omwenteling, dan zal voor $\lambda = 0$ Θ eene *minimum*-waarde hebben voor $\theta = \frac{\pi}{2}$, ingeval de omwentelings-as de grootste der assen is.





De kromme zal een vorm hebben overeenkomstig de eerste figuur.

Is de ellipsoïde echter afgeplat, dan zal voor μ zeer klein met betrekking tot h de kromme bij de abscis $\frac{\pi}{2}$ eene *maximum*-ordinaat hebben, en een vorm overeenkomstig de tweede figuur, die evenals de vorige symmetrisch is ten opzichte van de ordinaat bij $\frac{\pi}{2}$. Blijkt uit dit voorbeeld, dat de kromme der hellings-energie meerdere *minimum*-ordinaten met tusschen gelegen *maximum*-ordinaat kan hebben, tevens doet het zien, dat zij voor verschillende waarden van λ en μ ook verschillende vormen kan aannemen.

11. Wordt op hetzelfde coordinaten-stelsel de rechte lijn

$$y = \text{constante}$$

getrokken, welke lijn wij *de lijn van energie* zullen noemen, dan zullen die deelen van de kromme der hellings-energie, welke onder deze lijn gelegen zijn, in hunne abscissen de hellingen aanwijzen, die de lichaams-as gedurende de beweging kan verkrijgen.

Zij Fig. 2 de kromme der hellings-energie voor zeker stel waarden van λ en μ, zoodat de hellings-energie Θ twee minimum-waarden heeft voor $\theta = \theta_1$ en $\theta = \theta_2$ en eene maximum-waarde voor $\theta = \theta_0$.

Raakt de lijn van energie de kromme in D, dan moet θ' voortdurend gelijk nul zijn. De lichaams-as zal onveranderlijk dezelfde helling θ_2 behouden, zoodat zij met eenparige beweging een kegelmantel zal beschrijven, die de verticaal tot as en $2\,\theta_2$ tot tophoek heeft. Volgens (11) beweegt zich het steunpunt in eene richting loodrecht op het beweeglijke been van het azimuth, zoodat de kromtestraal ϱ van het spoor op het horizontale vlak beschreven gelijk is aan

$$\varrho = \frac{-\varphi' \,.\, \eta}{\psi'} = \left(\cos\theta - \frac{n}{\psi'}\right)\eta.$$

Dit spoor is dus een cirkel. Het spoor op het lichaam zelf, gevormd door de meetkundige plaats der steunpunten, is een parallelcirkel met den straal η.

Deze beweging van het lichaam heet *conische beweging;* zij heeft met eene *minimum*-waarde van energie plaats, en draagt, zooals wij straks zullen zien, het karakter van *stabiliteit.*

Wordt de energie van de beweging vergroot, zonder in λ en μ eene wijziging te brengen, wat dus geschieden kan door het lichaam onder zijne conische beweging een stoot te geven, gericht in het verticale vlak van zijne as, dan zal dit in de figuur aangewezen worden door de lijn van energie te laten rijzen.

De hellingshoek θ zal nu kunnen veranderen tusschen θ_3 en θ_4, aangegeven door de abscissen der snijpunten van kromme en lijn.

Die grenswaarden θ_3 en θ_4 zullen bereikt worden. Immers de laatste van (7) kan nu op de volgende wijze geschreven worden:

$$\theta'^2 = (\theta - \theta_3)(\theta - \theta_4) f(\theta),$$

waar $f(\theta)$ voor alle abscissen tusschen 0 en π eindige negatieve waarden zal hebben.

Hieruit volgt:

$$\pm\, dt = \sqrt{\frac{1}{-f(\theta)}} \frac{d\theta}{\sqrt{(\theta - \theta_3)(\theta_4 - \theta)}},$$

zoodat het tijdsverloop $T_{\theta_3}^{\theta}$, waarin de helling van θ tot θ_3 verandert, gegeven wordt door

$$T_{\theta_3}^{\theta} = \left[\sqrt{\frac{1}{-f(\theta)(\theta_4 - \theta)}}\right]_{\theta_3 < \theta < \theta_4} \int_{\theta_3}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta - \theta_3}}$$

en in ieder geval eene *eindige* waarde zal hebben. Evenzoo blijkt dat $T_{\theta}^{\theta_4}$ eindig is.

De lichaams-as zal dus regelmatige schommelingen maken in het vlak, door haar en de verticaal bepaald. Bij elke schommeling zal de *schommelings-energie* eene *maximum*-waarde verkrijgen bij de helling der oorspronkelijke conische beweging. Hoe grooter de energie van de beweging wordt, des te grooter zal de slingerwijdte der schommelingen worden. Tevens blijkt, dat de oorspronkelijke beweging eene *stabiele* is.

Bereikt eindelijk de energie die waarde, waarbij de lijn van energie de kromme in B raakt, dan zullen de schommelingen der as tusschen de grenzen θ_5 en θ_6 plaats grijpen, maar tevens zal het lichaam eene tweede conische

beweging kunnen hebben bij de helling θ_1, aangegeven door de abscis van het raakpunt B. Wordt de energie nu nog meer vergroot, dan kan het lichaam twee verschillende bewegingen hebben; de eene is de gestoorde van de eerste, de andere die van de tweede conische beweging.

Bij voortgezette vermeerdering van de energie zal er eens een toestand komen, waarbij de lijn van energie de kromme in C raakt, waar de hellings-energie eene maximum-waarde heeft.

De schommelingen van elk der bewegingen, die het lichaam kon hebben, houden nu op, aangezien de lichaamsas de helling θ_0, aangegeven door de abscis van het raakpunt C, *asymptotisch* zal naderen.

Onder deze omstandigheid toch kan θ' als volgt uitgedrukt worden:

$$\theta'^2 = (\theta - \theta_7)(\theta - \theta_0)^2(\theta - \theta_8)F(\theta)$$

waarin $F(\theta)$ voor alle waarden van θ tusschen 0 en π eindige negatieve waarden heeft.

Hieruit volgt:

$$\pm\, dt = \sqrt{\frac{1}{(\theta - \theta_7)(\theta_8 - \theta). - F(\theta)}}\,\frac{d\theta}{\theta - \theta_0},$$

zoodat $T_{\theta_7}^{\theta}$ en $T_{\theta}^{\theta_8}$ beiden *oneindig groot* zijn.

Onderstellen wij echter, dat het lichaam met dezelfde energie in beweging wordt gezet onder de helling θ_0, dan zal deze weer onveranderlijk gelijk θ_0 blijven, en het lichaam alzoo eene derde *conische* beweging hebben, die nu echter het karakter van *instabiliteit* draagt.

Neemt eindelijk de energie van de beweging nog meer toe, dan zal het lichaam slechts ééne beweging kunnen hebben. De slingerwijdte der schommelingen van de as wordt met de energie grooter, doch kan de waarde π nimmer bereiken. De as zal nimmer door den verticalen stand gaan.

Verder zal de schommelings-energie bij elke schomme-

ling twee *maximum*-waarden bereiken, nl. bij de hellingen der oorspronkelijke *stabiele* conische bewegingen, en ééne *minimum*-waarde bij de helling der *instabiele* conische beweging.

12. Terwijl de lichaams-as schommelt, wordt het vlak van schommeling met eene hoeksnelheid ψ' om de verticaal van het steunpunt gedraaid.

Deze wenteling zal òf voortdurend in denzelfden zin plaats grijpen, òf bij elke schommeling van teeken kunnen veranderen.

Wordt de helling gedurende de beweging zeer gering, dan moet ψ' op dat oogenblik eene zeer groote waarde hebben. De uitdrukking voor Θ toch kan onder de volgende gedaante geschreven worden:

$$\Theta = \tfrac{1}{2} M \left\{ 2gh + \frac{\mu^2}{\varrho^2_z + \eta^2} + \frac{(\varrho^2_x + \xi^2)(\varrho^2_z + \eta^2) - \xi^2\eta^2}{\varrho^2_z + \eta^2} \psi'^2 sin^2\theta \right\}$$

zoodat

$$\frac{(\varrho^2_x + \xi^2)(\varrho^2_z + \eta^2) - \xi^2\eta^2}{\varrho^2_z + \eta^2} \psi'^2 sin^2\theta = \frac{2\Theta}{M} - \left(2gh + \frac{\mu^2}{\varrho^2_z + \eta^2}\right)$$

is. Omdat h, ξ, η eindige waarden behouden en Θ zeer groot is als de as den verticalen stand nabij komt, zal ook $\psi'^2 sin^2\theta$ en *à fortiori* ψ'^2 dan zeer groot zijn.

13. Beschouwen wij nog kortelijk het geval $\lambda^2 = \mu^2$.

Is $\lambda = \mu$, dan snijdt de kromme der hellings-energie de ordinaten-as, maar heeft nog de lijn $\theta = \pi$ tot asymptoot. Heeft de snijding onder een rechten hoek plaats, en 't blijkt uit den vorm van de uitdrukking voor Θ dat dit het geval moet zijn als het raakpunt bij verticalen stand van de as op de as ligt, dan is de ordinaat bij $\theta = 0$ eene *minimum*- of *maximum*-ordinaat.

In 't eerste geval is de eenparige wenteling om de verticaal naar boven gerichte as eene *stabiele* beweging, en alle andere bewegingen, die het lichaam kan hebben zijn

gestoorde van deze, waarbij de as schommelingen maakt om de verticaal als middenstand.

In 't tweede geval is die eenparige wenteling eene *instabiele*, en het lichaam zal eene *stabiele* conische beweging kunnen hebben bij de helling, aangegeven door de abscis van het laagste punt van de kromme der hellings-energie. Alle bewegingen van het lichaam kunnen beschouwd worden als gestoorde van deze stabiele conische beweging. Zoolang de energie van de beweging kleiner blijft dan die van de instabiele wenteling, zal de as schommelingen maken, waarbij de verticale stand door de as niet wordt bereikt. Is de energie daaraan gelijk, dan zal de as zich *asymptotisch* naar den verticalen stand begeven; is ze grooter, dan zal de as bij elke schommeling door den verticalen stand gaan.

Snijdt de kromme der hellings-energie de ordinaten-as niet loodrecht, zooals dat o. a. bij den hoepel het geval is, dan kan het lichaam geene eenparige wenteling om de verticaal naar boven gerichte as hebben, en het hangt nu van het beloop der kromme af, hoedanig de bewegingen zullen zijn, die het lichaam nu zal kunnen hebben. Onder alle vormen van de krommen vermelden wij er slechts één, insgelijks bij den hoepel voorkomende, nl. die, waarbij de kromme voortdurend stijgt met toenemende abscissen. In dit geval kan het lichaam geen enkele conische beweging hebben, en moet de as bij alle bewegingen van het lichaam om de verticaal als middenstand schommelen.

Het geval $\lambda = -\mu$ geeft tot soortgelijke opmerkingen aanleiding; de ordinaten-as in het vorige geval worde slechts vervangen door de lijn $\theta = \pi$.

14. Alvorens tot de toepassing over te gaan, zullen wij de oneindig weinig gestoorde stabiele conische beweging meer van nabij beschouwen.

Heeft de kromme der hellings-energie eene *minimum*-ordinaat bij de abscis α, dan kan het lichaam bij de helling α eene stabiele conische beweging hebben.

Onderstellen wij, dat deze oneindig weinig gestoord wordt door een stoot, aangebracht in het verticale vlak van de lichaams-as, dan zal de lijn van energie, die raaklijn was bij de conische beweging, nu snijlijn wezen; de abscissen

$\theta_1 < \alpha$ en $\theta_2 > \alpha$ van de snijpunten zullen zeer weinig van α verschillen.

De laatste van de vergelijkingen (7) kunnen wij nu onder den volgenden vorm schrijven:

$$\theta'^2 = (\theta - \theta_1)(\theta_2 - \theta)\, F(\theta),$$

waar $F(\theta)$ voor alle abscissen tusschen 0 en π eindige positieve waarden heeft.

Met verwaarloozing van alle machten van $\theta - \alpha$ hooger dan de eerste macht, kunnen wij $F(\theta)$ door $-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\theta'^2}{d\theta^2}\right)_{\theta=\alpha}$ vervangen, en schrijven:

$$\theta'^2 = (\theta - \theta_1)(\theta_2 - \theta) \, . - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\theta'^2}{d\theta^2}\right)_\alpha .$$

Hieruit volgt:

$$\pm\, dt = \sqrt{\frac{1}{-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\theta'^2}{d\theta^2}\right)_\alpha}}\; \frac{d\theta}{\sqrt{(\theta - \theta_1)(\theta_2 - \theta)}},$$

welke tusschen de grenzen θ_1 en θ_2 geïntegreerd geeft:

$$T_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{\pi}{\sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\theta'^2}{d\theta^2}\right)_\alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

De overeenkomstige verandering $\Psi_{\theta_1}^{\theta_2}$ van het azimuth zal met denzelfden graad van benadering gevonden worden door

$$\Psi_{\theta_1}^{\theta_2} = T_{\theta_1}^{\theta_2} \times \psi'_\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

waar ψ'_α de azimuthale snelheid der conische beweging is.

HOOFDSTUK III.

De beweging van een omwentelingslichaam om een vast punt van zijne as.

15. In de vergelijkingen (7)—(11) moet nu $\eta = 0$ en $\xi = -l$ genomen worden, als l de afstand is waarop het zwaartepunt *boven* het vaste punt ligt, wanneer de helling van de as nul is.

De vergelijkingen (1) en (7) gaan hierdoor over in

$$\left.\begin{aligned} \theta'^2 &= H - a\cos\theta - \left(\frac{A - B\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2, \\ \psi' &= \frac{A - B\cos\theta}{\sin^2\theta}, \\ \varphi' &= n - \psi'\cos\theta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (16)$$

waarin

$$A = \frac{\lambda}{\varrho^2_x + l^2},\ B = \frac{\mu}{\varrho^2_x + l^2},\ n = \frac{\mu}{\varrho^2_z},\ a = \frac{2gl}{\varrho^2_x + l^2} = \frac{2g}{\Delta} = \tfrac{1}{4}\omega^2$$

is, als Δ de gereduceerde slingerlengte van het lichaam is ten opzichte van het vaste punt en ω de hoeksnelheid, die het lichaam heeft, als het van uit den hoogsten stand gevallen is naar den laagsten.

De constante H vermeerdert met de totale energie.

De vergelijking van de lijn van energie wordt hier vervangen door

$$y = H \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

en die van de kromme der hellings-energie door

$$y = a\cos\theta + \left(\frac{A - B\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \ldots\ldots (18).$$

Beginnen wij met de beschouwing van het

16. *Eerste geval* $\lambda = \mu$.

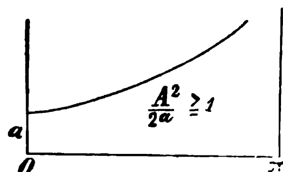
De vergelijking (18) kan nu op de volgende wijze geschreven worden:

$$y = a \cos\theta + A^2 \, tg^2 \tfrac{1}{2}\theta \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (19)$$

Nu is

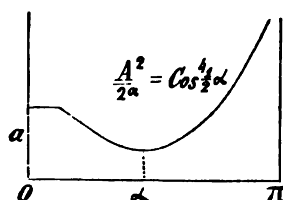
$$\frac{dy}{d\theta} = a \sin\theta \left(\frac{A^2}{2a \cos^4 \frac{1}{2}\theta} - 1\right),$$

zoodat y voor $\dfrac{A^2}{2a} \geqq 1$ de minimum-waarde a heeft voor



$\theta = 0$. De kromme stijgt met toenemenden abscissen en heeft de lijn $\theta = \pi$ tot asymptoot.

Voor $\dfrac{A^2}{2a} = \cos^4 \frac{1}{2}\alpha$ heeft y de maximum-waarde a voor $\theta = 0$, en de minimum-waarde $a(1 - 2\sin^4 \frac{1}{2}\alpha)$ voor $\theta = \alpha$.



De kromme heeft bij de abscis α eene minimum-ordinaat, snijdt de ordinaten-as loodrecht en heeft de lijn $\theta = \pi$ tot asymptoot.

De beteekenis van $\sqrt{\dfrac{A^2}{2a}}$ is duidelijk, als wij die uitdrukking op de volgende wijze schrijven $\dfrac{\lambda}{(\varrho_r^2 + l^2)\,\omega}$; $\sqrt{\dfrac{A^2}{2a}}$ stelt dus de verhouding voor van het moment der hoeveelheid van beweging ten opzichte van de verticaal van 't vaste punt, of, wat hier 't zelfde is, ten opzichte van de lichaams-as, tot het moment van de hoeveelheid van beweging, die het lichaam heeft als het van uit den hoogsten stand naar den laagsten stand is gevallen, genomen ten opzichte van de ophang-as. Noemen wij dit moment het *valmoment* (γ) van het lichaam, dan kunnen wij op de volgende wijze een beeld schetsen van de bewegingen, die het

lichaam zal kunnen hebben, in acht nemende dat $\psi' = \frac{A}{1+\cos\theta}$ niet van teeken verandert.

Wanneer het moment van de hoeveelheid van beweging ten opzichte van de verticaal van 't steunpunt gelijk is aan dat ten opzichte van de lichaams-as, maar grooter dan of gelijk aan het valmoment des lichaams, dan zijn alle bewegingen gestoorde van de eenparige wenteling om de verticaal naar boven gerichte as. Deze schommelt om de verticaal als middenstand, de slingerwijdte groeit aan met de energie, doch de as kan nimmer door de naar beneden gerichte verticaal gaan. Te gelijkertijd draait het slingervlak om de verticaal van het vaste punt altijd in denzelfden zin als waarin de ongestoorde eenparige wenteling plaats greep.

Is het moment van de hoeveelheid van beweging ten opzichte van de verticaal van 't vaste punt gelijk aan dat ten opzichte van de lichaams-as, maar kleiner dan het valmoment des lichaams, en is $\cos^2 \frac{1}{2}\alpha$ de verhouding dier momenten, dan kan het lichaam twee conische bewegingen hebben, eene bij de helling α, die stabiel is, en eene tweede bij de helling 0, *de eenparige wenteling om de verticaal naar boven gerichte as, welke instabiel is. Alle andere bewegingen zijn gestoorde van de stabiele conische beweging. Zoolang de energie van de beweging kleiner blijft dan die, waarmede de eenparige wenteling plaats grijpt, zal de lichaams-as bij hare schommelingen den verticalen stand niet bereiken; is zij er aan gelijk, dan zal de as dien stand asymptotisch naderen; is zij grooter, dan zullen de schommelingen om den verticalen stand als middenstand plaats grijpen. Te gelijkertijd wentelt het schommelvlak om de verticaal van 't vaste punt altijd in den zin, waarin de azimuthale verandering der oorspronkelijke conische beweging plaats had.*

17. Ten einde dit beeld te voltooien, zal nu eene berekening van de bewegings-elementen θ, ψ en φ volgen.

1. $\lambda = \mu = \gamma \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$ of $A = \sqrt{2a} \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$.

1^a^. *De conische beweging.*

De azimuthale verandering ψ' is hier

$$\psi' = \frac{A}{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha} = \sqrt{\tfrac{1}{2}a} = \tfrac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta}},$$

zoodat de tijd τ, waarin de kegelmantel geheel wordt beschreven door de lichaams-as, gegeven wordt door

$$\tau = \frac{2\pi}{\psi'} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

waaruit de merkwaardige eigenschap volgt:

Bij alle conische bewegingen beschrijft de lichaams-as den kegelmantel in een tijdsverloop gelijk aan den slingertijd van het lichaam, als dit onder de werking van zijn gewicht oneindig kleine schommelingen maakt om het vaste punt als as.

1[b]. *De oneindig weinig gestoorde conische beweging.*

Uit de eerste van de vergelijkingen (16), die wij nu op de volgende wijze schrijven:

$$\theta'^2 = H - a\cos\theta - A^2 tg^2\tfrac{1}{2}\theta$$

volgt:

$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\theta'^2}{d\theta^2}\right)_\alpha = \left(\frac{A\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}\right)^2 = 2a\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = \left(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{\frac{g}{\Delta}}\right)^2,$$

zoodat volgens (14) de schommeltijd van de lichaams-as is

$$T = \frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}\sqrt{\frac{\Delta}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

en daar

$$\psi' = \frac{A}{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha} = \sqrt{\tfrac{1}{2}a}$$

is, zal de overeenkomstige verandering van het azimuth zijn

$$\Psi = \frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Hoe geringer dus de helling der oorspronkelijke conische beweging is, des te grooter zijn T en Ψ.

1c. *De eindig gestoorde conische beweging.*

A. *De energie van de beweging kleiner dan die der eenparige wenteling om de verticaal naar boven gerichte as.*

De lijn van energie snijdt de kromme der hellings-energie in twee punten, wier abscissen $\theta_1 < \alpha$ en $\theta_2 > \alpha$ zijn.

De eerste der vergelijkingen (16) wordt nu

$$\theta'^2 (1 + \cos\theta) = - a\cos^2\theta + (H + A^2 - a)\cos\theta + H - A^2,$$

en kan bijgevolg nu ook op de volgende wijze geschreven worden:

$$\theta'^2 (1 + \cos\theta) = a\,(\cos\theta_1 - \cos\theta)\,(\cos\theta - \cos\theta_2).$$

Eene onderlinge vergelijking van de coëfficienten geeft

$$\frac{H - A^2}{a} = - \cos\theta_1 \cos\theta_2.$$

$$\frac{H + A^2}{a} = 1 + \cos\theta_1 + \cos\theta_2,$$

zoodat

$$\frac{A^2}{2a} = \tfrac{1}{4}\,(1 + \cos\theta_1)\,(1 + \cos\theta_2) = \cos^4 \tfrac{1}{2}\alpha$$

is.

Hieruit volgt:

$$\pm\sqrt{a}\,dt = \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{(\cos\theta_1 - \cos\theta)\,(\cos\theta - \cos\theta_2)}}\,d\theta =$$

$$= \frac{-\,d\cos\theta}{\sqrt{(1 - \cos\theta)\,(\cos\theta_1 - \cos\theta)\,(\cos\theta_2 - \cos\theta)}} \;.\;.\;(23)$$

Uit de tweede van (16) volgt

$$\sqrt{a}\,d\psi = \frac{A}{1 + \cos\theta}\sqrt{a}\,dt,$$

bijgevolg is

$$\pm\, d\,\psi = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta_1)(1+\cos\theta_2)}{2}} \times$$

$$\times \frac{-\,d\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sqrt{(1-\cos\theta)(\cos\theta_1-\cos\theta)(\cos\theta_2-\cos\theta)}}. (24)$$

Eindelijk geeft de derde van (16):

$$\varphi' = n - \frac{A\cos\theta}{1+\cos\theta} = n - A + \frac{A}{1+\cos\theta},$$

dus

$$d\,\varphi = (n-A)\,d\,t + d\,\psi\,. \quad \ldots\ldots (25)$$

Stellen wij nu

$$1-\cos\theta = \frac{1-\cos\theta_1}{d\,n^2\,u}, \quad k^2 = \frac{\cos\theta_1-\cos\theta_2}{1-\cos\theta_2},$$

waar u de elliptische integraal van de eerste soort is met k tot modulus, dan is

$$\frac{-\,d\cos\theta}{\sqrt{(1-\cos\theta)(\cos\theta_1-\cos\theta)(\cos\theta-\cos\theta_2)}} = \frac{2\,d\,u}{\sqrt{1-\cos\theta_2}};$$

Verder is

$$\frac{1}{1+\cos\theta} = \frac{1}{1+\cos\theta_1}\left(1+\frac{1-\cos\theta_1}{1+\cos\theta_1}\,\frac{k^2\,s\,n^2\,u}{1-\dfrac{2}{1+\cos\theta_1}\,k^2\,s\,n^2\,u}\right),$$

door dus

$$\frac{2}{1+\cos\theta_1} = s\,n^2\,(i\,\varepsilon + K)$$

te stellen, gaat deze uitdrukking over in

$$\frac{1}{1+\cos\theta} = \frac{1}{1+\cos\theta_1}\left(1+\frac{i\,c\,n\,(i\,\varepsilon+K)}{sn(i\varepsilon+K)\,dn(i\varepsilon+K)}\,\frac{d\,i\,\Pi(u,i\varepsilon+K)}{d\,u}\right).$$

Omdat

$$\frac{i\,cn\,(i\,\varepsilon + K)}{sn\,(i\,\varepsilon + K)\,.\,dn\,(i\,\varepsilon + K)} = \sqrt{\frac{(1 + \cos\theta_1)\,(1 - \cos\theta_2)}{2\,(1 + \cos\theta_2)}}$$

is, gaan nu de vergelijkingen (23), (24), (25) over in

$$\pm\,dt = \frac{2\,du}{\sqrt{a\,(1 - \cos\theta_2)}},$$

$$\pm\,d\psi = \frac{sn\,(i\,\varepsilon + K)\,.\,dn\,(i\,\varepsilon + K)}{i\,cn\,(i\,\varepsilon + K)}\,du + d\,i\,\Pi\,(u, i\,\varepsilon + K),$$

$$\pm\,d\varphi = -\frac{dn(i\varepsilon + K)(1 + cn^2(i\varepsilon + K))}{sn\,(i\,\varepsilon + K)\,.\,i\,cn\,(i\,\varepsilon + K)}\,du + d\,i\,\Pi(u, i\varepsilon + K) + n\,dt.$$

Worden deze geïntegreerd tusschen de grenzen θ_1 en θ_2, zoodat u van 0 tot K verandert, en noemen wij T den schommeltijd van de as, Ψ de overeenkomstige verandering van het azimuth, welke verandering hetzelfde teeken heeft als λ, Φ de overeenkomstige verandering van φ, dan vinden wij, als $i\,\Pi\,(K, i\,\varepsilon + K)$ door hare bekende waarde wordt vervangen:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{K}{\sin\frac{1}{2}\theta_2}\sqrt{\frac{\Delta}{g}} \\ \Psi &= K\left\{Z(\varepsilon, k') + \frac{\pi\,\varepsilon}{2KK'} + \frac{dn\,(i\,\varepsilon + K)}{sn(i\varepsilon + K).icn(i\varepsilon + K)}\right\} \\ \Phi &= K\left\{Z(\varepsilon, k') + \frac{\pi\,\varepsilon}{2KK'} - \frac{dn\,(i\,\varepsilon + K)}{sn(i\varepsilon + K).icn(i\varepsilon + K)}\right\} + nT \end{aligned}\right\}. \quad (26)$$

Worden ze echter geïntegreerd tusschen de grenzen θ_1 en θ, zoodat u verandert van 0 tot u, dan zal de uitkomst met behulp van (26) op de volgende wijze kunnen geschreven worden:

$$\left.\begin{aligned} t &= T \cdot \frac{u}{K} \\ \psi &= \Psi \cdot \frac{u}{K} + \tfrac{1}{2} i\, l \frac{\Theta(u - i\varepsilon - K)}{\Theta(u + i\varepsilon + K)} \\ \varphi &= \Phi \cdot \frac{u}{K} + \tfrac{1}{2} i\, l \frac{\Theta(u - i\varepsilon - K)}{\Theta(u + i\varepsilon + K)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \; (27)$$

Hieruit blijkt, dat het slingervlak van de lichaams-as schommelingen uitvoert, met de periode T, ten opzichte van een verticaal vlak, dat eenparig wentelt met de snelheid $\frac{\Psi}{T}$ om de verticaal van het vaste punt.

Voor de oneindig weinig gestoorde beweging is $k = 0$, zoodat voor $k = 0$ de vergelijkingen (26) over moeten gaan in (21) en (22). Dit blijkt op de volgende wijze:

Voor $k = 0$ is $K = \frac{\pi}{2}$, $K' =$ logarithmisch oneindig groot

$$K \cdot Z(\varepsilon, k') = \tfrac{1}{2} \pi \, sin(\varepsilon, 1) = \tfrac{1}{2} \pi \frac{i\, cn(i\varepsilon + K)}{sn(i\varepsilon + K)} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \pi \, sin \tfrac{1}{2} \alpha ; \frac{dn(i\varepsilon + K)}{sn(i\varepsilon + K) \cdot i\, cn(i\varepsilon + K)} =$$

$$= \sqrt{\frac{(1 + cos\,\theta_1)(1 + cos\,\theta_2)}{2(1 - cos\,\theta_2)}} = \frac{1 + cos\,\alpha}{2\, sin \frac{1}{2} \alpha} = \frac{cos^2 \frac{1}{2} \alpha}{sin \frac{1}{2} \alpha} .$$

Derhalve is

$$T = \frac{\pi}{2\, sin \frac{1}{2} \alpha} \sqrt{\frac{\Delta}{g}}$$

in overeenstemming met (21), en

$$\Psi = \frac{\pi}{2\, sin \frac{1}{2} \alpha}$$

gelijkluidend met (22).

Dat $Z(\varepsilon, k')$ voor $k = 0$ of $k = 1$ gelijk is aan $sn(\varepsilon, 1)$ blijkt op de volgende wijze:

$$Z(\varepsilon, k') = \frac{2\pi}{K'}\left\{\frac{\sin\frac{\pi\varepsilon}{K'}}{e^{\pi\frac{K}{K'}} - e^{-\pi\frac{K}{K'}}} + \frac{\sin 2\frac{\pi\varepsilon}{K'}}{e^{2\pi\frac{K}{K'}} - e^{-2\pi\frac{K}{K'}}} + \dots\right\}$$

welke met eene kleine wijziging ook aldus geschreven kan worden:

$$Z(\varepsilon, k') = \frac{2}{K}\cdot\frac{\pi K}{K'}\left\{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{K}\cdot\frac{\pi K}{K'}}{e^{\pi\frac{K}{K'}} - e^{-\pi\frac{K}{K'}}} + \dots\right\}.$$

Bedenken wij nu, dat K' voor $k = 0$ logarithmisch oneindig groot is, dat dus $\frac{n}{K'}$ voor $n = \infty$ en $k = 0$ ook oneindig groot is, kunnen wij nu schrijven:

$$Z(\varepsilon, 1) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\frac{2\varepsilon}{\pi}\cdot x}{e^x - e^{-x}}\,dx.$$

De waarde van deze integraal is (D. Bierens de Haan, *tables d'intégrales définies, Table* 281)

$$Z(\varepsilon, 1) = \frac{4}{\pi}\left(-\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\pi\frac{e^{\frac{\varepsilon}{\pi}}}{e^{\frac{\varepsilon}{\pi}} + e^{-\frac{\varepsilon}{\pi}}}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{\varepsilon}{\pi}} - e^{-\frac{\varepsilon}{\pi}}}{e^{\frac{\varepsilon}{\pi}} + e^{-\frac{\varepsilon}{\pi}}} = sn(\varepsilon, 1).$$

Hoe meer de energie van de beweging nadert tot die van

de eenparig wentelende beweging om de naar boven gekeerde lichaams-as, des te grooter wordt k, zoodat ook volgens (26) T en Ψ onbepaald aangroeien met de slingerwijdte.

Denkt men zich om het vaste punt als middelpunt een bol geslagen met de eenheid tot straal, en noemen wij het snijpunt van de lichaams-as met den bol de *pool* van 't lichaam, dan zal die pool op den bol eene regelmatig gegolfde kromme beschrijven, die beurtelings de horizontale cirkels met de bolstralen θ_1 en θ_2 aanraakt.

Bij de conische beweging vallen die cirkels samen met den cirkel, welks bolstraal α is; hoe meer de energie toeneemt, hoe kleiner θ_1 en hoe grooter θ_2 wordt, terwijl het verschil Ψ in azimuth tusschen de opvolgende raakpunten steeds grooter wordt (fig. 3).

B. *De energie is gelijk aan die der eenparige wenteling om de verticaal naar boven gerichte lichaams-as.*

In dit geval zal de lichaams as den verticalen stand *asymptotisch* naderen. Dit blijkt ook uit (26). Daar $\theta_1 = 0$ dus $k = 1$ is, zullen zoowel T als Ψ oneindig groot wezen.

De pool van het lichaam zal op den bol eene spiraalbaan met oneindig veel windingen beschrijven om het hoogste punt van den bol (fig. 4).

C. *De energie is grooter dan die der eenparige wenteling om de verticaal naar boven gekeerde lichaams-as.*

Nu zal de lichaams-as om de verticaal als middenstand schommelingen volbrengen.

De lijn van energie snijdt nu de kromme der hellingsenergie slechts in één punt, welks abscis wij θ_2 zullen noemen.

De eerste van de vergelijkingen (16) is nu nog

$$\theta'^2 (1 + \cos\theta) = -a\cos^2\theta + (H + A^2 - a)\cos\theta + H - A^2,$$

het tweede lid moet dus een factor $\cos\theta - \cos\theta_2$ bevatten, maar ook een factor $\nu^2 - \cos\theta$, waar $\nu^2 > 1$ is, omdat het tweede lid voor $\cos\theta = 1$ gelijk $2(H - a)$ dus positief is, en voor $\cos\theta = \infty$ negatief.

Bovenstaande vergelijking kan dus op de volgende wijze geschreven worden;

$$\theta'^2 (1 + \cos\theta) = a(\nu^2 - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta_2).$$

Eene onderlinge vergelijking van de coefficienten geeft

$$\frac{H + A^2}{a} = 1 + \nu^2 + \cos\theta_2,$$

$$\frac{H - A^2}{a} = -\nu^2 \cos\theta_2,$$

bijgevolg is

$$\frac{A^2}{2a} = \tfrac{1}{4}(\nu^2 + 1)(1 + \cos\theta_2).$$

De vergelijkingen (16) kunnen nu op de volgende wijze geschreven worden:

$$\left.\begin{aligned}
\pm \sqrt{a}\,dt &= \frac{-d\cos\theta}{\sqrt{(1-\cos\theta)(\cos\theta-\cos\theta_2)(\nu^2-\cos\theta)}} \\
\pm d\psi &= \sqrt{\frac{(\nu^2+1)(1+\cos\theta_2)}{2}} \times \\
&\times \frac{-d\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sqrt{(1-\cos\theta)(\cos\theta-\cos\theta_2)(\nu^2-\cos\theta)}} \\
d\varphi &= (n - A)\,dt + d\psi.
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Stelt men hierin

$$1 - \cos\theta = (1 - \cos\theta_2)\, sn^2 u,$$

$$k^2 = \frac{1 - \cos\theta_2}{\nu^2 - \cos\theta_2},$$

dan wordt

$$\frac{-d\cos\theta}{\sqrt{(1-\cos\theta)(\cos\theta-\cos\theta_2)(\nu^2-\cos\theta)}} = \frac{2\,du}{\sqrt{\nu^2 - \cos\theta_2}},$$

$$\frac{1}{1+\cos\theta} = \frac{1}{1+\cos\theta_2}\left(1 - \frac{1-\cos\theta_2}{1+\cos\theta_2}\,\frac{sn^2 u}{1 + \frac{1-\cos\theta_2}{1+\cos\theta_2}\, sn^2 u}\right).$$

Door in de laatste uitdrukking

$$\frac{1 - \cos\theta_2}{1 + \cos\theta_2} = - k^2 sn^2 i\varepsilon$$

te stellen, gaat zij over in

$$\frac{1}{1 + \cos\theta} = \frac{1}{1 + \cos\theta_2}\left(1 + \frac{sn\, i\varepsilon}{i\cos i\varepsilon \,.\, dn\, i\varepsilon}\ \frac{d\, i\, \Pi\,(u, i\varepsilon)}{d\,u}\right).$$

Worden nu (28) geintegreerd, in acht nemende dat

$$\sqrt{\frac{(\nu^2 - \cos\theta_2)(1 + \cos\theta_2)}{2\,(\nu^2 + 1)}} = \frac{sn\, i\varepsilon}{i\, cn\, i\varepsilon \,.\, dn\, i\varepsilon}$$

is, tusschen de grenzen 0 en θ_2, zoodat u verandert van 0 tot K, dan vinden wij

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{kK}{\sin\frac{1}{2}\theta_2}\sqrt{\frac{\Delta}{g}} \\ \Psi &= K\left\{Z(\varepsilon,k') + \frac{\pi\varepsilon}{2KK'} + \frac{i\, dn\, i\varepsilon}{sn\, i\varepsilon \,.\, cn\, i\varepsilon}\right\} \\ \Phi &= K\left\{Z(\varepsilon,k') + \frac{\pi\varepsilon}{2KK'} + \frac{i\, dn\, i\varepsilon}{sn\, i\varepsilon.cn\, i\varepsilon} - \frac{2\, i\, cn\, i\varepsilon}{sn\, i\varepsilon.dn\, i\varepsilon}\right\} + nT \end{aligned}\right\} .(29)$$

Worden ze echter geintegreerd tusschen de grenzen 0 en θ, overeenkomende met 0 en u, dan kunnen wij de uitkomst met behulp van (29) op de volgende wijze uitdrukken:

$$\left.\begin{aligned} t &= T\frac{u}{K} \\ \psi &= \Psi\frac{u}{K} + \tfrac{1}{2}\, i\, l\,\frac{\Theta\,(u - i\varepsilon)}{\Theta\,(u + i\varepsilon)} \\ p &= \Phi\frac{u}{K} + \tfrac{1}{2}\, i\, l\,\frac{\Theta\,(u - i\varepsilon)}{\Theta\,(u + i\varepsilon)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (30)$$

Omtrent deze uitkomsten kan dezelfde opmerking gemaakt worden als omtrent die, begrepen in (27), terwijl ook hier ψ en φ het teeken van A moeten hebben.

Geeft de stoot eene vermeerdering van energie, die zeer klein is met betrekking tot die van de eenparige wenteling, dan ligt ν^2 bij 1, dus k^2 bij 1, zoodat T en Ψ beiden zeer groot zijn. Hoe meer de energie die van de eenparige wenteling overtreft, des te kleiner wordt k^2, die voor zeer groote waarde van de energie dicht bij 0 komt. Bijgevolg nemen T en Ψ af met het toenemen der slingerwijdte; T nadert onbepaald tot 0, Ψ tot $\frac{1}{2}\pi \,.\, sn(\varepsilon, 1)$, of omdat $-sn^2(i\varepsilon, 0) = tg^2(\varepsilon, 1) = \infty$ is, tot $\frac{1}{2}\pi$.

De pool van het lichaam zal bij elke schommeling van de as eene kromme beschrijven, die door het hoogste punt van den bol gaat en in de eindpunten raakt aan den horizontalen cirkel met den bolstraal θ_2 (fig. 5).

2. $\lambda = \mu \geqq \gamma$ of $A \geqq \sqrt{2a}$.

In dit geval is elke beweging de gestoorde van de nu *stabiele* eenparige wenteling om de verticaal naar boven gerichte lichaams-as.

Omdat de lijn van energie nu de kromme der hellings-energie slechts in één punt snijdt, evenals in 't vorige geval, en de eerste van de vergelijkingen (16) hier evenzoo geschreven wordt als daar, zullen wij dezelfde formules voor ψ en φ vinden als in 't vorige geval; (29 en (30) gelden ook hier.

Evenwel zullen de gevolgtrekkingen gedeeltelijk anders luiden. Bij kleine vermeerdering van de energie moet hier de slingerwijdte altijd zeer klein zijn, terwijl dan ν^2 alleen dicht bij de eenheid ligt, als λ dicht bij γ is; ν^2 groeit met λ aan. De slingertijd T, die in het vorige geval voor H dicht bij a zeer groot is, is het hier alleen als λ dicht bij γ ligt, en is kleiner naarmate λ het valmoment meer overtreft.

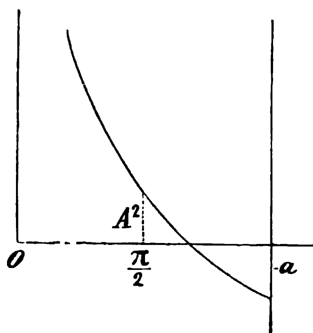
18. *Tweede geval*: $\lambda + \mu = 0$.

De vergelijking (18) van de kromme der hellings-energie kan nu op de volgende wijze geschreven worden:

$$y = a \cos \theta + A^2 \cot^2 \tfrac{1}{2}\theta.$$

Nu is

$$\frac{dy}{d\theta} = -\frac{\cos \frac{1}{2}\theta}{\sin^3 \frac{1}{2}\theta}(A^2 + 2a \sin^4 \tfrac{1}{2}\theta),$$



zoodat de kromme eene minimum-ordinaat $-a$ heeft voor $\theta = \pi$, en daar $\frac{dy}{d\theta}$ negatief is voor alle waarden van θ tusschen 0 en π, zal de kromme dalende wezen voor toenemende abscissen, en de ordinaten-as tot asymptoot hebben.

Het lichaam kan dus slechts ééne conische beweging hebben, nl. de eenparige wenteling om de verticaal naar beneden gerichte as. Alle overige bewegingen zijn gestoorde van deze, waarbij de lichaams-as om de verticaal als middenstand schommelingen zal maken, terwijl de wenteling van het schommelvlak steeds in den zin van de oorspronkelijke wenteling zal plaats grijpen.

De slingerwijdte neemt toe met de energie, doch de lichaams-as zal nimmer de naar boven gerichte verticaal bereiken.

Ter berekening van de bewegings-elementen beschouwen wij eerst

19. *De oneindig weinig gestoorde conische beweging.*

De eerste van (16) wordt hier

$$\theta'^2 = H - a \cos\theta - A^2 \cot^2 \tfrac{1}{2}\theta,$$

zoodat

$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\theta'^2}{d\theta^2}\right)_\pi = \frac{A^2 + 2a}{4}$$

is. Volgens (14) en (15) vinden wij dus voor den slingertijd T en de overeenkomstige verandering Ψ van het azimuth :

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\sqrt{A^2 + 2a}} \\ \Psi &= \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{2a}{A^2}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (31)$$

Voor $A = \lambda = 0$ is $T = \pi \sqrt{\frac{\Delta}{g}}$ en $\Psi = 0$, zoodat wij dan de slingerende beweging van het lichaam onder de werking van zijn gewicht terug vinden, de slingerwijdte oneindig klein zijnde. Hoe grooter λ is, des te kleiner wordt T en des te grooter Ψ. Voor lim. $\lambda = \infty$ is lim. $T = 0$ en lim. $\Psi = \pi$.

20. *De eindig gestoorde conische beweging.*

De lijn van energie snijdt nu de kromme der hellingsenergie in één punt, welks abscis wij door θ_1 zullen voorstellen.

De eerste van (16) wordt nu

$$\theta'^2 (1 - \cos\theta) = a \cos^2\theta - (H + A^2 + a)\cos\theta + H - A^2.$$

Het tweede lid moet dus een factor $\cos\theta_1 - \cos\theta$ hebben, en omdat dat lid negatief is voor $\cos\theta = 1$, doch positief voor $\cos\theta = \infty$, zal het ook een factor $\nu^2 - \cos\theta$ hebben, waar $\nu^2 > 1$ is.

Bovenstaande vergelijking kunnen wij dus ook op de volgende wijze schrijven:

$$\theta'^2 (1 - \cos\theta) = a(\nu^2 - \cos\theta)(\cos\theta_1 - \cos\theta).$$

De coefficienten van deze vergelijkingen onderling vergeleken geeft

$$\frac{H + A^2}{a} = \nu^2 + \cos\theta_1 - 1,$$

$$\frac{H - A^2}{a} = \nu^2 \cos\theta_1,$$

zoodat

$$\frac{2A^2}{a} = (\nu^2 - 1)(1 - \cos\theta_1)$$

is.

De vergelijkingen (16) kunnen nu als volgt geschreven worden:

$$\left.\begin{aligned}
\pm\sqrt{a}\,dt &= \frac{-d\cos\theta}{\sqrt{(1+\cos\theta)(\cos\theta_1-\cos\theta)(\nu^2-\cos\theta)}}\\
\pm d\psi &= \sqrt{\frac{(\nu^2-1)(1-\cos\theta_1)}{2}}\times\\
&\times\frac{-d\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sqrt{(1+\cos\theta)(\cos\theta_1-\cos\theta)(\nu^2-\cos\theta)}}\\
d\varphi &= (n+A)\,dt - d\psi.
\end{aligned}\right\}.(32)$$

Stellen wij hierin

$$\nu^2 - \cos\theta = \frac{\nu^2 - \cos\theta_1}{dn^2 u},$$

$$k^2 = \frac{1+\cos\theta_1}{1+\nu^2},$$

dan wordt

$$\frac{-d\cos\theta}{\sqrt{(1+\cos\theta)(\cos\theta_1-\cos\theta)(\nu^2-\cos\theta)}} = \frac{2\,du}{\sqrt{1+\nu^2}},$$

$$\frac{1}{1-\cos\theta} = \frac{1}{1-\cos\theta_1}\left(1 - \frac{\nu^2-\cos\theta_1}{1-\cos\theta_1}\,\frac{k^2\,sn^2u}{1+\frac{\nu^2-1}{1-\cos\theta_1}k^2\,sn^2u}\right).$$

Stellen we eindelijk in de laatste uitdrukking

$$\frac{\nu^2-1}{1-\cos\theta_1} = -\,sn^2(i\varepsilon),$$

dan gaat ze over in

$$\frac{1}{1-\cos\theta} = \frac{1}{1-\cos\theta_1}\left(1 + \frac{i\,cn\,i\varepsilon}{sn\,i\varepsilon\,.\,dn\,i\varepsilon}\,\frac{d\,i\,\Pi(u, i\varepsilon)}{du}\right).$$

Worden nu (32) geintegreerd tusschen de grenzen θ_1 en π, overeenkomende met o en K voor u, dan vinden wij, als wij voor $i\Pi(K, i\varepsilon)$ hare bekende waarde substitueeren, en de betrekking

$$\frac{i\,cn\,i\varepsilon}{sn\,i\varepsilon\,.\,dn\,i\varepsilon} = \sqrt{\frac{(\nu^2+1)(1-\cos\theta_1)}{2(\nu^2-1)}}$$

in acht nemen:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{2K}{\sqrt{a(1+\nu^2)}} = \frac{k}{\cos\frac{1}{2}\theta_1} K \sqrt{\frac{\Delta}{g}} \\ \Psi &= K\left(Z(\varepsilon, k') + \frac{\pi\varepsilon}{2KK'}\right) \\ \Phi &= n\,T - K\left(Z(\varepsilon, k') + \frac{\pi\varepsilon}{2KK'} - \frac{2k'^2\,sn\,i\varepsilon}{i\,cn\,i\varepsilon\,.\,dn\,i\varepsilon}\right) \end{aligned}\right\} \ldots (33)$$

waar Ψ en Φ hetzelfde teeken als n hebben.

Worden echter (32) geintegreerd tusschen de grenzen θ_1 en θ, dan vinden wij met behulp van (33):

$$\left.\begin{aligned} t &= T\frac{u}{K} \\ \psi &= \Psi\frac{u}{K} + \tfrac{1}{2}\,i\,l\,\frac{\Theta(u-i\varepsilon)}{\Theta(u+i\varepsilon)} \\ \varphi &= \Phi\frac{u}{K} - \tfrac{1}{2}\,i\,l\,\frac{\Theta(u-i\varepsilon)}{\Theta(u+i\varepsilon)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (34)$$

Deelt de stoot slechts eene betrekkelijk geringe hoeveelheid energie aan het lichaam mede, terwijl dit de eenparige wenteling bezit, dan ligt k dicht bij 0. Voor $k = 0$ moeten dus (33) overgaan in (31), wat op de volgende wijze blijkt:

$$T = \frac{2K}{\sqrt{a(1+\nu^2)}} = \frac{\pi}{\sqrt{a\left(2+\frac{A^2}{a}\right)}} = \frac{\pi}{\sqrt{A^2+2a}};$$

$$\Psi = \tfrac{1}{2}\pi\, sn(\varepsilon, 1) = \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{tg^2(\varepsilon,1)}{1+tg^2(\varepsilon,1)}} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{-sn^2 i\varepsilon}{cn^2 i\varepsilon}} = \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{\nu^2-1}{\nu^2+1}} = \frac{\tfrac{1}{2}\pi}{\sqrt{1+\frac{2a}{A^2}}},$$

welke waarden met 2 moeten vermenigvuldigd worden, om T en Ψ voor eene volle slingering te vinden. Alsdan stemmen zij overeen met (31).

Hoe grooter de vermeerdering van de energie is, die de stoot veroorzaakt, des te grooter zal k^2 worden. Met het grooter worden van de slingerwijdte der schommelingen van de lichaams-as groeit ook de slingertijd onbepaald aan, terwijl voor $k^2 = 1$ lim. $\Psi = \varepsilon = \tfrac{1}{2}\pi$ is.

21. *Derde geval:* $\lambda^2 \gtrless \mu^2$.

De vergelijking (18) van de kromme der hellings-energie is

$$y = a \cos\theta + \left(\frac{A - B\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2.$$

De kromme heeft dus de ordinaten-as en de lijn $\theta = \pi$ tot asymptoten. Verder volgt uit

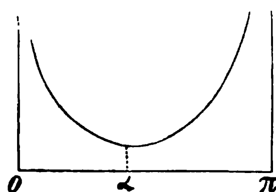
$$\frac{dy}{d\theta} = -a\sin\theta + 2\,\frac{A - B\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{B - A\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

welke vergelijking wij liever op de volgende wijze schrijven;

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{-a}{\sin^3\theta}\left(\cos^4\theta - (2+pq)\cos^2\theta + (p^2+q^2)\cos\theta + (1-pq)\right)$$

waar kortheidshalve $\frac{A}{\sqrt{\tfrac{1}{2}a}} = p$ en $\frac{B}{\sqrt{\tfrac{1}{2}a}} = q$ gesteld zijn, dat $\frac{dy}{d\theta}$ gelijk nul wordt voor $\theta = \alpha < \frac{\pi}{2}$ als $pq > 1$ is, voor $\theta = \frac{\pi}{2}$ als $pq = 1$ is, voor $\theta = \alpha > \frac{\pi}{2}$ als $pq < 1$

is, terwijl de toepassing van het theorema van STURM op deze vergelijking leert, dat $\frac{dy}{d\theta}$ slechts *eenmaal* nul wordt tusschen 0 en π.



De kromme der hellings-energie heeft dus slechts éène minimum-ordinaat.

Het lichaam kan dus slechts éene conische beweging hebben. Alle andere bewegingen zijn gestoorde van deze. De slingerwijdte wordt grooter met de energie, doch de lichaams-as zal nimmer door den verticalen stand gaan. De slingerings-energie verkrijgt de grootste waarde, als de as door de helling van de oorspronkelijke conische beweging gaat.

Daar

$$\psi' = \frac{A - B \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

is, zal voor $A^2 > B^2$ of $\lambda^2 > \mu^2$ de azimuthale verandering gedurende de beweging steeds het teeken van A hebben, dus steeds plaats grijpen in den zin, waarin ze geschiedt bij de oorspronkelijke conische beweging.

Is echter $\lambda^2 < \mu^2$, dan kan ψ' nul worden en van teeken veranderen.

Stellen wij in dit geval

$$\lambda = \mu \cos \beta,$$

dan blijkt vooreerst, dat $\frac{dy}{d\theta}$ voor $\theta = \beta$ negatief is, zoodat $\alpha > \beta$ zal wezen.

Noemen wij nu de abscissen der snijpunten van de lijn van energie met de kromme der hellings-energie $\theta_1 < \alpha$ en $\theta_2 > \alpha$, zoodat θ_1 de kleinste, θ_2 de grootste helling is die de lichaams-as verkrijgt, dan zal ψ'

voor $\theta_1 > \beta$ niet van teeken veranderen;

» $\theta_1 = \beta$ te gelijk met θ' nul worden;

» $\theta_1 < \beta$ nul worden bij de helling β, en gedurende

al den tijd, dien de as noodig heeft om hare helling van β tot θ_1 te verminderen en van θ_1 tot β te vermeerderen, in tegengestelden zin plaats grijpen.

Daar verder

$$\frac{\theta'}{\psi'} = \sin\theta \sqrt{\frac{H - a\cos\theta}{(A - B\cos\theta)^2}\sin^2\theta - 1}$$

voor $\theta = \beta$ oneindig groot is, zal dus de pool van het lichaam eene regelmatige kromme beschrijven, altijd in denzelfden zin, als $\theta_1 > \beta$ is, en beurteling de horizontale cirkels met de spherische stralen θ_1 en θ_2 aanraken (fig. 3). Is $\theta_1 = \beta$, dan zal de pool bogen beschrijven, die in de eindpunten loodrecht staan op den cirkel met den spherischen straal β, terwijl zij in hunne middens geraakt worden door den cirkel met den spherischen straal θ_2 (fig. 6).

Is eindelijk $\theta_1 < \beta$, dan zal de baan van de pool den cirkel met den spherischen straal β loodrecht snijden, en bij elke schommeling van de as eene *lus* vormen, wier midden door den cirkel met den spherischen straal θ_1 wordt geraakt, terwijl de takken geraakt worden door den cirkel met den spherischen straal θ_2.

Het is duidelijk, dat de beweging, waarbij $\theta_1 = \beta$ is, ook tot stand kan gebracht worden door op het lichaam bij de helling θ_1 een koppel van impulsie te laten werken, die het de aswenteling n geeft. Bij de helling $\theta_1 = \beta$ toch heeft het lichaam alleen eene wenteling om de as. Als wij deze beweging van het lichaam aanduiden door het woord *impulsie-beweging*, dan komen de bovengenoemde gevallen $\theta_1 > \beta$, $\theta_1 = \beta$, $\theta_1 < \beta$ respectievelijk overeen met de gevallen, dat de energie van de beweging $\lesseqgtr$ de energie van de impulsie-beweging is.

22. Ter berekening van de bewegings-elementen merken wij op, dat de eerste vergelijking van (16) op de volgende wijze kan geschreven worden:

$$\theta'^2 \sin^2\theta = a\cos^3\theta - (H + B^2)\cos^2\theta + (2AB - a)\cos\theta + H - A^2.$$

Wij weten reeds, dat het tweede lid $\cos\theta_1 - \cos\theta$ en $\cos\theta - \cos\theta_2$ tot factoren moet hebben; daarenboven bezit het nog een factor $\nu^2 - \cos\theta$, waar $\nu^2 > 1$ is, omdat het negatief is voor $\cos\theta = 1$ en positief voor $\cos\theta = \infty$. De vergelijking kan dus vervangen worden door

$$\theta'^2 \sin^2\theta = a(\cos\theta_1 - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta_2)(\nu^2 - \cos\theta).$$

Eene onderlinge vergelijking van de coefficienten geeft:

$$\frac{H + B^2}{a} = \nu^2 + \cos\theta_1 + \cos\theta_2,$$

$$\frac{H - A^2}{a} = -\nu^2 \cos\theta_1 . \cos\theta_2,$$

$$\frac{2AB - a}{a} = \cos\theta_1 . \cos\theta_2 + \nu^2(\cos\theta_1 + \cos\theta_2).$$

Hieruit volgt:

$$\frac{(A + B)^2}{a} = (\nu^2 + 1)(1 + \cos\theta_1)(1 + \cos\theta_2),$$

$$\frac{(A - B)^2}{a} = (\nu^2 - 1)(1 - \cos\theta_1)(1 - \cos\theta_2).$$

De vergelijkingen (16) kunnen nu op de volgende wijze geschreven worden:

$$\left.\begin{aligned} \pm\sqrt{a}\,dt &= \frac{-d\cos\theta}{\sqrt{(\cos\theta_1 - \cos\theta)(\cos\theta - \theta_2)(\nu^2 - \cos\theta)}} \\ \psi' &= \frac{A+B}{2}\frac{1}{1+\cos\theta} + \frac{A-B}{2}\frac{1}{1-\cos\theta} \\ \varphi' &= \frac{A+B}{2}\frac{1}{1+\cos\theta} - \frac{A-B}{2}\frac{1}{1-\cos\theta} + n - B \end{aligned}\right\} \ldots (35)$$

Wordt hierin

$$\nu^2 - \cos\theta = \frac{\nu^2 - \cos\theta_1}{dn^2 u},\ k^2 = \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{\nu^2 - \cos\theta_2}$$

gesteld, dan wordt

$$\frac{-d\cos\theta}{\sqrt{(\cos\theta_1 - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta_2)(\nu^2 - \cos\theta)}} = \frac{2\,du}{\sqrt{\nu^2 - \cos\theta_2}}.$$

Verder is

$$\frac{1}{1+\cos\theta} = \frac{1}{1+\cos\theta_1}\left(1 + \frac{\nu^2 - \cos\theta_1}{1+\cos\theta_1}\,\frac{k^2\,sn^2 u}{1 - \dfrac{\nu^2+1}{1+\cos\theta_1}k^2 sn^2 u}\right),$$

$$\frac{1}{1-\cos\theta} = \frac{1}{1-\cos\theta_1}\left(1 - \frac{\nu^2 - \cos\theta_1}{1-\cos\theta_1}\,\frac{k^2\,sn^2 u}{1 + \dfrac{\nu^2-1}{1-\cos\theta_1}k^2 sn^2 u}\right).$$

Stellen wij dus

$$\frac{\nu^2+1}{1+\cos\theta_1} = sn^2(i\varepsilon + K) \text{ en } \frac{\nu^2-1}{1-\cos\theta_1} = -sn^2\, i\eta$$

dan gaan deze uitdrukkingen over in

$$\frac{1}{1+\cos\theta} = \frac{1}{1+\cos\theta_1}\left(1 + \frac{i\,cn(i\varepsilon+K)}{sn(i\varepsilon+K)\,.\,dn(i\varepsilon+K)}\,\frac{d\,i\Pi(u, i\varepsilon+K)}{du}\right),$$

$$\frac{1}{1-\cos\theta} = \frac{1}{1-\cos\theta_1}\left(1 + \frac{i\,cn\,i\eta}{sn\,i\eta\,.\,dn\,i\eta}\,\frac{d\,i\,\Pi(u, i\eta)}{du}\right).$$

De vergelijkingen (35) kunnen nu op de volgende wijze geschreven worden

$$\left.\begin{aligned}
&\pm\, d\,t = \frac{2\,d\,u}{\sqrt{a\,(\nu^2 - \cos\theta_2)}}\,,\\[2ex]
&d\,\psi = \frac{A + B}{\sqrt{a\,(\nu^2 - \cos\theta_2)\,(1 + \cos\theta_1)^2}} \times\\
&\times\left(d\,u + \frac{i\,cn\,(i\,\varepsilon + K)}{sn\,(i\,\varepsilon + K)\,.\,dn\,(i\varepsilon + K)}\,d\,i\,\Pi\,(u, i\varepsilon + K)\right)\\
&+\frac{A - B}{\sqrt{a(\nu^2 - \cos\theta_2)(1 - \cos\theta_1)^2}}\left(du + \frac{i\,c\,n\,i\,\eta}{sni\eta.dni\eta}\,di\Pi(u, i\eta)\right)\\[2ex]
&d\,\varphi = (n - B)\,d\,t + \frac{A + B}{\sqrt{a\,(\nu^2 - \cos\theta_2)\,(1 + \cos\theta_1)^2}} \times\\
&\times\left(d\,u + \frac{i\,\cos\,(i\,\varepsilon + K)}{s\,n\,(i\,\varepsilon + K)\,.\,d\,n\,(i\varepsilon + K)}\,d\,i\,\Pi\,(u, i\,\varepsilon + K)\right)\\
&-\frac{A - B}{\sqrt{a(\nu^2 - \cos\theta_2)(1 - \cos\theta_1)^2}}\left(du + \frac{i\,c\,n\,i\,\eta}{sni\eta.dni\eta}\,di\Pi(u, i\eta)\right)
\end{aligned}\right\}(36)$$

Omdat voor $\lambda^2 > \mu^2$ $A + B$ en $A - B$ hetzelfde teeken hebben, en voor $\lambda^2 < \mu^2$ daarentegen tegengesteld teeken, moeten wij bij de integratie van (36) op deze twee gevallen letten.

23. *De oneindig weinig gestoorde conische beweging.*

Uit

$$\theta'^2 \sin^2\theta = a\,(\nu^2 - \cos\theta)\,(\cos\theta_1 - \cos\theta)\,(\cos\theta - \cos\theta_2)$$

volgt

$$-\,\tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\theta'^2}{d\,\theta^2}\right)_\alpha = a\,(\nu^2 - \cos\alpha)\,,$$

zoodat volgens (14) de schommeltijd T van de lichaams-as gegeven wordt door

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{a\,(\nu^2 - \cos\alpha)}}\; \ldots\ldots\ldots (37)$$

Verder volgt uit

$$\psi' = \frac{A+B}{2}\frac{1}{1+\cos\theta} + \frac{A-B}{2}\frac{1}{1+\cos\theta}$$

met inachtneming van de uitdrukkingen van $A+B$ en $A-B$:

$$\psi'_x = \tfrac{1}{2}\sqrt{a}\,\{\sqrt{\nu^2+1} \pm \sqrt{\nu^2-1}\}$$

waar het bovenste teeken moet genomen worden voor $\lambda^2 > \mu^2$, het onderste voor $\lambda^2 < \mu^2$. Bijgevolg is volgens (15):

$$\Psi = \tfrac{1}{2}\pi\frac{\sqrt{\nu^2+1} \pm \sqrt{\nu^2-1}}{\sqrt{\nu^2-\cos\alpha}}. \quad \ldots \quad (38)$$

24. *De eindig gestoorde beweging.*
Eerste geval: $\lambda^2 > \mu^2$.

De uitdrukkingen $A+B$ en $A-B$ hebben nu beiden het teeken van A of λ.

Derhalve is

$$\frac{A+B}{\sqrt{a(\nu^2-\cos\theta_2)(1+\cos\theta_1)^2}} = \pm\sqrt{\frac{(\nu^2+1)(1+\cos\theta_2)}{(\nu^2-\cos\theta_2)(1+\cos\theta_1)}} =$$
$$= \pm\frac{sn\,(i\varepsilon+K)\,.\,dn\,(i\varepsilon+K)}{i\,cn\,(i\varepsilon+K)},$$

$$\frac{A-B}{\sqrt{a(\nu^2-\cos\theta_2)(1-\cos\theta_1)^2}} = \pm\sqrt{\frac{(\nu^2-1)(1-\cos\theta_2)}{(\nu^2-\cos\theta_2)(1-\cos\theta_1)}} =$$
$$= \pm\frac{sn\,i\eta\,.\,dn\,i\eta}{i\,cn\,i\eta},$$

waar het bovenste teeken geldt voor $A > 0$, het onderste voor $A < 0$.

Hieruit volgt:

$$B = \pm\sqrt{a\frac{\nu^2-\cos\theta_2}{4}}\left((1+\cos\theta_1)\frac{sn\,(i\varepsilon+K)\,dn\,(i\varepsilon+K)}{i\,cn\,(i\varepsilon+K)} - \right.$$
$$\left. -(1-\cos\theta_1)\frac{sn\,i\eta\,.\,dn\,i\eta}{i\,cn\,i\eta}\right).$$

De vergelijkingen (36) zullen hiermede tot integralen opleveren, als wij t beginnen te tellen bij $\theta = \theta_1$:

$$t = \frac{2u}{\sqrt{a(\nu^2 - \cos\theta_2)}},$$

$$\pm \psi = \left(\frac{sn(i\varepsilon + K) \,.\, dn(i\varepsilon + K)}{i\,cn(i\varepsilon + K)} + \frac{sn\,i\eta \,.\, dn\,i\eta}{i\,cn\,i\eta}\right) u + \\ + i\Pi(u, i\varepsilon + K) + i\Pi(u, i\eta)$$

$$\pm d\varphi = -\cos\theta_1 \left(\frac{sn(i\varepsilon + K) \,.\, dn(i\varepsilon + K)}{i\,cn(i\varepsilon + K)} + \frac{sn\,i\eta \,.\, dn\,i\eta}{t\,cn\,i\eta}\right) u + \\ \pm nt + i\Pi(u, i\varepsilon + K) - i\Pi(u, i\eta)$$

waar het bovenste teeken geldt voor $\lambda > 0$, het onderste voor $\lambda < 0$.

Voor $u = K$ vinden wij voor den slingertijd T van de as en de overeenkomstige waarden Ψ en Φ van ψ en φ:

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{2K}{\sqrt{a(\nu^2 - \cos\theta_2)}} \\ \pm \Psi &= K\left\{Z(\varepsilon, k') + Z(\eta, k') + \pi\frac{\varepsilon + \eta}{2KK'} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{dn(i\varepsilon + K)}{sn(i\varepsilon + K) \,.\, i\,cn(i\varepsilon + K)}\right\} \\ \pm \Phi &= \pm(n - B)\,T + K\left\{Z(\varepsilon, k') - Z(\eta, k') + \pi\frac{\varepsilon - \eta}{2KK'} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{dn(i\varepsilon + K)}{sn(i\varepsilon + K) \,.\, i\,cn(i\varepsilon + K)}\right\} \end{aligned}\right\} \ldots 39)$$

zoodat wij nu de vergelijkingen van de bewegings-elementen met behulp van (39) op de volgende wijze kunnen schrijven:

$$\left.\begin{aligned} t &= T\frac{u}{K}, \\ \psi &= \Psi\frac{u}{K} + \tfrac{1}{2}\,i\,l\,\frac{\Theta(u - i\varepsilon - K) \,.\, \Theta(u - i\eta)}{\Theta(u + i\varepsilon + K) \,.\, \Theta(u + i\eta)}, \\ \varphi &= \Phi\frac{u}{K} + \tfrac{1}{2}\,i\,l\,\frac{\Theta(u - i\varepsilon - K) \,.\, \Theta(u + i\eta)}{\Theta(u + i\varepsilon + K) \,.\, \Theta(u - i\eta)}. \end{aligned}\right\} .(40).$$

Deze vergelijkingen stemmen overeen met (11) en (21) van Dr. C. LOTTNER.

25. *Tweede geval*: $\lambda^2 < \mu^2$.

Nu hebben $A + B$ en $A - B$ een tegengesteld teeken; dat van de eerste uitdrukking is hetzelfde als dat van B.

Voor B moet nu genomen worden:

$$B = \pm \sqrt{a\frac{\nu^2 - \cos\theta_2}{4}} \left((1 + \cos\theta_1)\frac{sn(i\varepsilon + K) \, . \, dn(i\varepsilon + K)}{i\, cn\,(i\varepsilon + K)} + \right.$$

$$\left. + \, (1 - \cos\theta_1)\frac{sn\, i\,\eta \, . \, dn\, i\,\eta}{i\, cn\, i\,\varepsilon} \right)$$

De integratie van (36) geeft nu

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{2u}{\sqrt{a(\nu_2 - \cos\theta_2)}}, \\ \pm \psi &= \left(\frac{sn(i\varepsilon + K) . dn(i\varepsilon + K)}{i\,cn\,(i\varepsilon + K)} - \frac{sn i\eta . dn i\eta}{i\,cn\,i\,\eta} \right) u + \\ &+ i\,\Pi\,(u, i\,\varepsilon + K) - i\,\Pi\,(u, i\,\eta), \\ \pm \varphi &= -\cos\theta_1 \left(\frac{sn(i\varepsilon + K) . dn(i\varepsilon + K)}{i\,cn\,(i\varepsilon + K)} - \frac{sn i\eta . dn i\eta}{i\,cn\,i\,\eta} \right) u + \\ &\pm n\,t + i\,\Pi\,(u, i\,\varepsilon + K) + i\,\Pi\,(u, i\,\eta), \end{aligned} \right\} (41)$$

waar nu het bovenste teeken geldt voor $B > 0$, het onderste voor $B < 0$.

Wordt hierin $u = K$ gesteld, dan vinden wij voor den schommeltijd van de as en de overeenkomstige waarden van ψ en φ:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{2K}{\sqrt{a(\nu^2 - \cos\theta_1)}}, \\ \pm \Psi &= K \left\{ Z(\varepsilon, k') - Z(\eta, k') + \pi\frac{\varepsilon - \eta}{2KK'} + \right. \\ &\left. + \frac{dn\,(i\,\varepsilon + K)}{sn\,(i\,\varepsilon + K) \, . \, i\,cn\,(i\,\varepsilon + K)} \right\}, \\ \pm \Phi &= \pm (n - B)\,T + K \left\{ Z(\varepsilon, k') + Z(\eta, k') + \pi\frac{\varepsilon + \eta}{2KK'} + \right. \\ &\left. + \frac{dn\,(i\,\varepsilon + K)}{sn\,(i\,\varepsilon + K) \, . \, i\,cn\,(i\,\varepsilon + K)} \right\}, \end{aligned} \right\} . (42)$$

zoodat nu (39) kunnen voorgesteld worden als volgt:

$$\left.\begin{aligned} t &= T\frac{u}{K}, \\ \psi &= \Psi\frac{u}{K} + \tfrac{1}{2} i\, l\, \frac{\Theta(u - i\varepsilon - K)\,.\,\Theta(u + i\eta)}{\Theta(u + i\varepsilon + K)\,.\,\Theta(u - i\eta)}, \\ \varphi &= \Phi\frac{u}{K} + \tfrac{1}{2} i\, l\, \frac{\Theta(u - i\varepsilon - K)\,.\,\Theta(u - i\eta)}{\Theta(u + i\varepsilon + K)\,.\,\Theta(u + i\eta)}. \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

26. Een paar opmerkingen mogen hier nog volgen.
De waarden van T en Ψ

$$T = \frac{2K}{\sqrt{a(\nu^2 - \cos\theta_1)}}$$

$$\Psi = K\left\{Z(\varepsilon,k') \pm Z(\eta,k') + \pi\frac{\varepsilon \pm \eta}{2KK'} + \frac{dn(i\varepsilon + K)}{icn(i\varepsilon + K)\; sn(i\varepsilon + K)}\right\}$$

bij de *eindig* gestoorde beweging gevonden moeten eerstens voor $k = 0$ overgaan in (37) en (38). Dit blijkt onmiddellijk voor T; voor Ψ op de volgende wijze.

Voor $k = 0$ is

$$\frac{dn(i\varepsilon + K)}{i\,cn(i\varepsilon + K)\,.\,sn(i\varepsilon + K)} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sqrt{\nu^2 + 1)(\nu^2 - \cos\alpha)}},$$

$$Z(\varepsilon, k') = sn(\varepsilon, 1) = \sqrt{\frac{\nu^2 - \cos\alpha}{\nu^2 + 1}},$$

$$Z(\eta, k') = sn(\eta, 1) = \sqrt{\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 - \cos\alpha}},$$

zoodat Ψ overgaat in

$$\Psi = \tfrac{1}{2}\pi\left\{\frac{1 + \cos\alpha}{\sqrt{(\nu^2 + 1)(\nu^2 - \cos\alpha)}} + \sqrt{\frac{\nu^2 - \cos\alpha}{\nu^2 + 1}} \pm \sqrt{\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 - \cos\alpha}}\right\} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{\sqrt{\nu^2 + 1} \pm \sqrt{\nu^2 - 1}}{\sqrt{\nu^2 - \cos\alpha}},$$

overeenkomstig (38).

Ten tweede moeten de vergelijkingen (41) overgaan in de door Dr. P. VAN GEER gevondenen formules, ingeval wij onderstellen, dat $\theta_1 = \beta$ is, dus $\psi' = 0$ voor $\theta = \theta_1$.

Is $\psi' = 0$ voor $\theta = \theta_1$, dan moet

$$\frac{A+B}{2(1+\cos\theta_1)} + \frac{A-B}{2(1-\cos\theta_1)} = 0$$

zijn. Nu is in ons geval

$$\frac{A+B}{2(1+\cos\theta_1)} = \pm\sqrt{a\frac{(\nu^2+1)(1+\cos\theta_2)}{4(1+\cos\theta_1)}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\nu^2-\cos\theta_2}{4}\, a\frac{s\,n(i\varepsilon+K)\,.\,d\,n(i\varepsilon+K)}{i\cos(i\varepsilon+K)}};$$

$$\frac{A-B}{2(1-\cos\theta_1)} = \mp\sqrt{a\frac{(\nu^2-1)(1-\cos\theta_2)}{4(1-\cos\theta_1)}} =$$

$$= \mp\sqrt{\frac{\nu^2-\cos\theta_2}{4}\, a\frac{s\,n\,i\,\eta\,.\,d\,n\,i\,\eta}{i\,c\,n\,i\,\eta}}.$$

waar het bovenste teeken geldt voor $B > 0$, het onderste voor $B < 0$.

Hieruit volgt

$$\frac{A+B}{2(1+\cos\theta_1)} + \frac{A-B}{2(1-\cos\theta_1)} =$$

$$= \pm\sqrt{a\frac{\nu^2-\cos\theta_2}{4}}\left(\frac{sn(i\varepsilon+K)\,.\,dn(i\varepsilon+K)}{i\,cn(i\varepsilon+K)} - \frac{sn\,i\eta\,.\,dn\,i\eta}{i\,cn\,i\,\eta}\right)$$

zoodat nu

$$\frac{sn(i\varepsilon+K)\,.\,dn(i\varepsilon+K)}{i\,cn(i\varepsilon+K)} = \frac{sn\,i\,\eta\,.\,dn\,i\,\eta}{i\,cn\,i\,\eta}$$

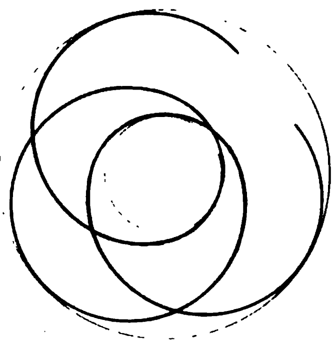


Fig: 3.

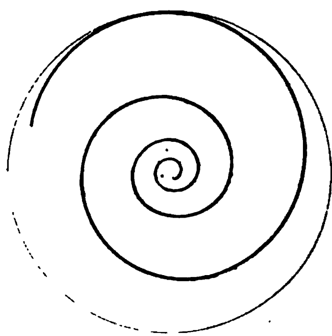


Fig: 4.

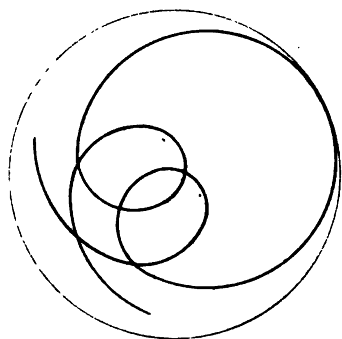


Fig: 5.

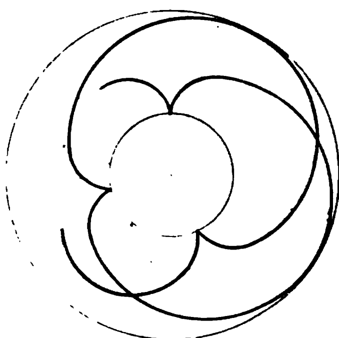


Fig: 6.

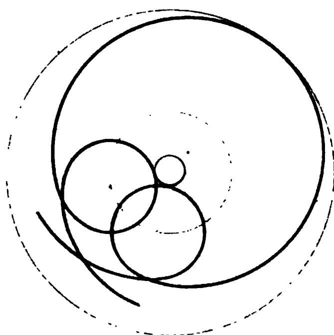


Fig: 7.

Lith. Gebr. Keurnetirger, Amst.

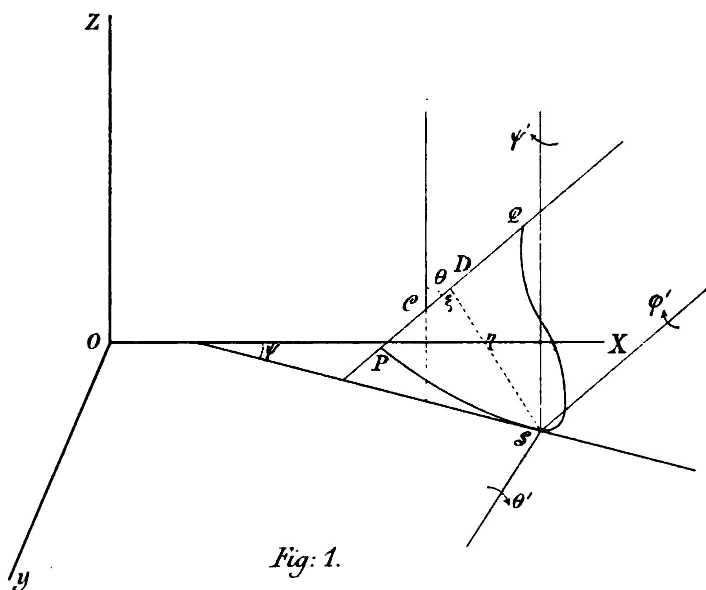

Z
O
X
y
ψ
P
C
θ
D
ξ
η
Q
S
ψ'
φ'
θ'

Fig: 1.

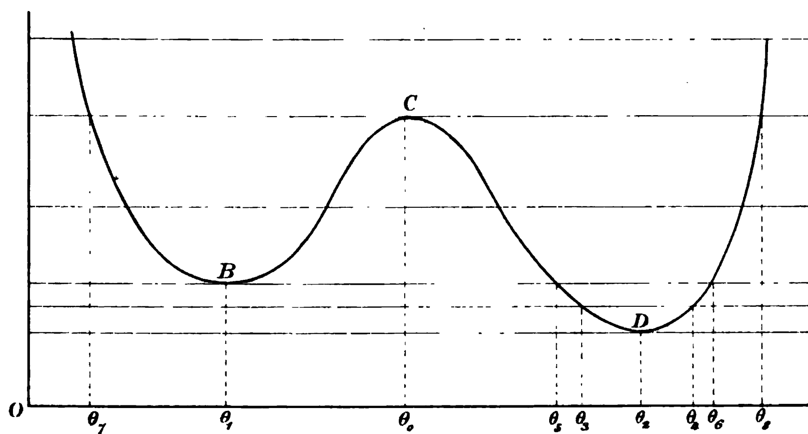

O
B
C
D
θ_7
θ_1
θ_0
θ_5
θ_3
θ_2
θ_4
θ_6
θ_8

Fig: 2.

is, en de tweede en de derde van (41) resp. overgaan in

$$\pm\,\psi = i\,\Pi\,(u, i\,\varepsilon + K) - i\,\Pi\,(u, i\,\eta),$$

$$\pm\,\varphi = i\,\Pi\,(u, i\,\varepsilon + K) + i\,\Pi\,(u, i\,\eta) \pm nt,$$

overeenstemmende met (57) en (58) in de verhandeling van Dr. P. VAN GEER.

OVER DEN INVLOED

VAN HET

LICHT OP DE KIEMING DER SPOREN VAN HEMILEIA VASTATRIX Berk. en Br.,

DOOR

W. BURCK,

Corresp. Lid van de Koninkl. Akad. v. Wet.

Bij mijn onderzoek naar de oorzaken der koffiebladziekte en de middelen ter bestrijding daarvan, is het mij gebleken, dat de sporen van Hemileia vastatrix in een droppel luchthoudend water tot kieming konden worden gebracht, en in overeenstemming met Marshall Ward meende ik derhalve gerechtigd te zijn, zuurstof en water te beschouwen als de eenige voorwaarden voor de kieming dezer sporen.

Bij vele mijner kiemproeven bleef evenwel de kieming achterwege, zonder dat het mij duidelijk werd, aan welke omstandigheden dit moest worden toegeschreven.

Een nader onderzoek heeft mij thans de oorzaak van het veelvuldig mislukken mijner proeven doen kennen; het is mij namelijk gebleken, dat de kieming der sporen afhankelijk is van de intensiteit van het licht, waaraan de kiemproeven zijn blootgesteld.

Het is niet de eerste maal dat de aandacht wordt gevestigd op den invloed, dien het licht vermag uit te oefenen op de kieming der sporen. Vooral in het laatste jaar werd die zaak herhaaldelijk ter sprake gebracht met betrekking

tot de sporen van verschillende micro-organismen en werden reeds eenige onderzoekingen daarover bekend gemaakt, waarvan de resultaten zijn bijeengebracht door Duclaux en Roux in de *Annales de l'Institut Pasteur.*

Een korte uiteenzetting van hetgeen omtrent dit onderwerp bekend is, moge aan de omschrijving van mijn eigen onderzoek vooraf gaan.

Het was een reeds lang bekend feit, dat er in de lucht veel meer doode dan levende micro-organismen worden aangetroffen. Herhaaldelijk is hierop door Pasteur, Miquel en anderen de aandacht gevestigd geworden.

Downes en Blunt nu waren de eersten, die in 1877 en 1878 eenig licht hierover deden opgaan en aantoonden, dat er geen ontwikkeling van »micro-organismen" plaats vond in buizen met suikerhoudende vloeistof, die bij de tegenwoordigheid van lucht aan het zonlicht werden blootgesteld.

Dit feit is thans door andere onderzoekers, zooals Arloing, Duclaux, Strauss, Roux en anderen bevestigd geworden. Allen kwamen bij hun onderzoek tot het besluit, dat de ontwikkeling van microben bij eene min of meer sterke en langdurige blootstelling aan het zonlicht werd tegengegaan en dat deze invloed van het licht zich alleen liet gevoelen bij de tegenwoordigheid van zuurstof.

Verder liepen echter de meeningen van deze geleerden uiteen. Terwijl toch Downes en Blunt van oordeel waren, dat de kiemen gedood werden en de vloeistof niets van hare voedende kracht verloor, meende Roux, dat het zonlicht aan de zuurstof der lucht een meerdere energie, een hooger oxydeerend vermogen meêdeelde, die de voedingsvloeistof, en wel waarschijnlijk de koolwaterstofverbindingen daaruit, ongeschikt maakten om de kieming en de voeding der bacteriën te onderhouden.

Uit de proeven, door Roux genomen om dit feit in 't licht te stellen, bleek dat zuivere bouillon, die 3 à 4 uur lang aan het zonlicht was blootgesteld geweest, het vermogen niet meer had om daarin overgebachte sporen te doen kiemen. Werden dergelijke buizen met dezelfde voedings-

vloeistof, waarin sporen waren uitgezaaid, in 't zonlicht gebracht, dan ontwikkelden zich de kiemen niet meer na 2 uur. Toch waren deze geenszins gedood, want toen zij, na 7 uur aan 't licht te zijn blootgesteld geweest, uit de vloeistof genomen en overgebracht werden in dezelfde vloeistof, die niet in 't licht had gestaan, gaven zij nog schoone kulturen.

De proeven van Roux zijn zeker overtuigend.

Men mag echter niet uit het oog verliezen, dat Roux zijne proeven nam met Bacillus anthracis en dat deze waarschijnlijk veel meer wêerstand biedt aan de werking van het zonlicht dan de »micro-organismen" waarmede Downes en Blunt proeven hebben genomen.

Ook de voedingsvloeistof van laatstgenoemden (vloeistof van Pasteur en Cohn) was niet dezelfde als die, welke door Roux werd gebruikt. Dit maakt, dat de proeven moeilijk met elkander kunnen vergeleken worden.

Houden wij hierbij in 't oog, dat reeds Duclaux heeft aangetoond, dat de verschillende soorten van coccus veel minder weêrstand bieden aan de werking van het zonlicht dan de sporen van Bacillus anthracis en dat in het algemeen het weêrstandbiedend vermogen afhankelijk is van de soort, en voor dezelfde soort van de natuur der voedingsvloeistof, dan is het niet te gewaagd te vooronderstellen, dat zoowel Downes en Blunt als Roux zeer juiste conclusiën hebben getrokken uit hunne waarnemingen.

Bij de proeven van Downes en Blunt was derhalve de verandering, die de vloeistof onder de gezamenlijke werking van zonlicht en lucht onderging, onmerkbaar in zooverre hare voedende eigenschappen behouden bleven, terwijl daarentegen de »micro-organismen" zelven werden gedood.

De voedingsvloeistof, door Roux bij zijne proeven gebruikt, onderging daarentegen vrij spoedig een zeer merkbare omzetting, terwijl de sporen van Bacillus anthracis vele dagen achtereen aan het licht konden worden blootgesteld, zonder haar kiemvermogen te verliezen.

Dat ook, buiten de voedingsvloeistof om, het zonlicht eene doodelijke werking op de sporen kan uitoefenen, was boven-

dien reeds door Duclaux meêgedeeld. Na een maand in drogen staat aan 't licht te zijn blootgesteld, werden de sporen ongeschikt om zich verder te ontwikkelen.

De resultaten van mijn eigen onderzoek kunnen, naar ik meen, er toe bijdragen om eenig meerder licht te doen opgaan over deze belangrijke zaak, vooral omdat de sporen van Hemileia vastatrix reeds in gedestilleerd water tot kieming kunnen worden gebracht en er derhalve geèn rekening behoeft te worden gehouden met veranderingen, die een voedingsvloeistof kan ondergaan onder de gelijktijdige inwerking van zuurstof en licht, en voorts omdat deze sporen, in vergelijking met die der bovengenoemde bacteriën, buitengewoon gevoelig zijn ten opzichte van het licht.

Wanneer de sporen van Hemileia vastatrix, uitgezaaid in een droppel gedestilleerd en luchthoudend water, worden blootgesteld aan het licht, dan gaan zij niet tot kieming over. Dit licht behoeft geen direct zonlicht te zijn; zelfs bij de zeer geringe intensiteit van het diffuse licht in het achterste gedeelte van het laboratorium, op geruimen afstand van het venster, gelukte het mij nimmer de sporen tot kieming te brengen. Worden deze echter in het duister gebracht, dan ziet men reeds na 2 à $2^1/_2$ uur de kiembuis te voorschijn treden om na weinige uren een vrij uitgestrekt mycelium te vormen. Volkomen duisternis is voor de kieming niet noodzakelijk; de kieming begint, wanneer slechts de lichtintensiteit tot een zeker minimum gedaald is.

Bij nader onderzoek blijkt, dat niet alleen de kieming der sporen door het licht tijdelijk wordt tegengehouden, zoodat zij eerst later begint, maar dat de sporen inderdaad haar kiemvermogen verliezen en zij, na de blootstelling aan het licht in een donkere kamer overgebracht, niet meer tot de ontwikkeling der kiembuis te brengen zijn

Het verlies van het kiemvermogen of de dood der sporen heeft reeds betrekkelijk spoedig plaats. Bij vele mijner proeven, waarbij de sporen geplaatst waren op een paar meter afstand van het venster, bleek, dat na $1^1/_4$ uur reeds de meeste sporen niet meer tot kieming konden

worden opgewekt, terwijl na $1^3/_4$ uur alle sporen waren gedood.

De tijd, noodig om de sporen te dooden, is afhankelijk van de intensiteit van het licht; op geringeren afstand van het venster, werden de sporen reeds binnen het uur gedood; bij een geringere intensiteit, b. v. bij een bewolkten hemel, is een langere blootstelling aan het licht een vereischte.

Bij deze proeven werd een aantal voorwerpglaasjes, waarop de sporen in een vrij liggenden droppel luchthoudend water waren uitgezaaid, in een met waterdamp verzadigde glazen kamer aan het diffuse daglicht blootgesteld.

Elk kwartier werd één der voorwerpglaasjes overgebracht naar een dergelijke vochtige kamer, die zorgvuldig van het licht was afgesloten.

Den volgenden dag bleek dan bij het onderzoek, dat de sporen, die langer dan 5—7 kwartier aan het licht waren blootgesteld geweest, niet meer tot kieming waren overgegaan.

Er moet hier nog uitdrukkelijk worden vermeld, dat deze nadeelige werking van het licht dan alleen op de sporen wordt uitgeoefend, als deze gelegenheid hebben gehad om water op te nemen. In drogen toestand zijn de sporen zelfs tegen eene langdurige inwerking van het directe zonlicht volkomen bestand.

Afgeplukte koffiebladen met sporen-afsnoerende mycelia kunnen uren achtereen aan den invloed van het sterke zonlicht worden blootgesteld, tot zij geheel zijn uitgedroogd, zonder dat de sporen hierbij haar kiemvermogen verliezen.

Het is derhalve de door opneming van water turgesceerende spore, die door het licht gedood wordt.

Reeds vroeger heb ik er op gewezen, dat vochtige lucht niet in staat is de kieming op te wekken; dat sporen uren achtereen in een met waterdamp verzadigde ruimte kunnen gehouden worden, zonder hare kiembuizen te voorschijn te brengen, en dat ook nimmer, zelfs niet in de vochtigste dagen van den regenmousson, de sporen in gekiemden staat op de afsnoerende mycelia worden aangetroffen. De sporen

moeten 2 à $2^1/_2$ uur lang bij zeer geringe intensiteit van het licht in een droppel water hebben gelegen, alvorens te kunnen kiemen. Dat voorts voor de kieming tegenwoordigheid van zuurstof noodzakelijk is, blijkt reeds uit het feit, dat ondergedompelde sporen zelden kiemen en dat dit nog zeldzamer wordt opgemerkt, wanneer het water door voorafgegane verhitting luchtvrij is gemaakt.

De voorwaarden waarop de sporen van Hemileia vastatrix kiemen, zijn derhalve: water in vloeibaren vorm, zuurstof en min of meer volkomen duisternis.

Het is een zeer opmerkelijk feit, dat het licht, hetwelk in staat is de sporen der Hemileia in korten tijd te dooden, daarop in het geheel geen merkbaren invloed meer oefent, zoodra zij tot kieming zijn overgegaan, en even min op het reeds ontwikkelde mycelium. Worden de sporen in een donkere ruimte tot kieming opgewekt en daarna overgebracht in het licht, dan blijven de kiembuizen zich ontwikkelen en voortgroeien, zonder ook maar in het allerminste blijken te geven van onder de inwerking van het licht te lijden.

Het klinkt zeker zeer vreemd, dat de spore, die tegen vele reagentiën en tegen uitdroging veel meer weêrstand biedt dan de kiembuis, zich tegenover het licht zoo geheel anders gedraagt.

Het laat zich dan ook hooren, dat, toen Arloing tot hetzelfde resultaat gekomen was bij zijn onderzoek naar den invloed van het licht op de sporen van Bacillus, men getracht heeft tot een verklaring te komen van hetgeen men een anomalie meende te zijn. Arloing had namelijk aangetoond, dat 2 uren voldoende waren om allen groei van de sporen van een Bacillus te onderdrukken, terwijl de Bacillus in vegetatieven toestand 27—30 uren aan het licht moest worden blootgesteld om hetzelfde doel te bereiken. Nocard en Strauss meenden dit feit te mogen verklaren door aan te nemen, dat de spore bij de temperatuur, waaraan de proef was blootgesteld, juist begon te kiemen en dat de zeer jeugdige Bacillus veel gevoeliger was voor de inwerking van het zonlicht dan de volwassen bacterie, zoodat de kiemende

spore kon worden gedood en de bacterie zelve niet onder den invloed van het licht behoefde te lijden.

Om dit te bewijzen, bracht STRAUSS de sporen in gedestilleerd water, waarin geen kieming mogelijk was, en zag hij ook werkelijk dat zij, uren achtereen aan het licht blootgesteld, niet werden gedood.

Hiertegenover echter bewees ARLOING, dat de sporen wel degelijk gedood werden, wanneer de proeven door ijs werden afgekoeld, ver beneden de temperatuur, die kieming toelaat.

Eindelijk toonde ROUX door een proef aan, dat de verandering, die de voedingsvloeistof ondergaat door haar bloot te stellen aan het zonlicht, wel voldoende is om de ontkieming der sporen tegen te gaan, maar nochthans in staat de reeds gevormde bacillen te voeden.

Hoe dit ook zij, zeker is het, dat bij Hemileia vastatrix, waar de kieming in gedestilleerd water kan worden opgewekt, het licht geen invloed uitoefent op de kiemende spore of op de daaruit ontwikkelde kiembuis.

Aannemend, dat de dood der sporen veroorzaakt wordt door de zuurstof der lucht, die onder den invloed van het licht een hooger oxydeerend vermogen verkrijgt, meen ik, dat de verklaring van het laatstgenoemde feit gezocht moet worden in de omstandigheid, dat de oliehoudende reservestoffen van de spore zich gemakkelijker laten oxydeeren dan de verbindingen, die ten tijde der kieming uit dit reservevoedsel ontstaan zijn; een veronderstelling, die niet te gewaagd is, nu DUCLAUX heeft aangetoond, hoe gemakkelijk zich deze plantaardige vetten met zuurstof verbinden *).

Het licht zou derhalve juist dezelfde werking uitoefenen op de sporen van Hemileia vastatrix, als een temperatuursverhooging tot 70°, volgens ROUX, uitoefent op de sporen van Bacillus anthracis. Ook hier zou het de zuurstof zijn der lucht, die bij deze temperatuur zich met de vetlichamen der spore verbindt en den dood der sporen veroorzaakt †).

---

*) DUCLAUX. Sur la migration des matières grasses. *Ann. de l'Inst. Pasteur*. Aug. 1887.

†) ROUX. De l'action de la chaleur et de l'air sur les spores de la bactéridie du charbon. *Annal. de l'Inst. Pasteur*. Août. 1887.

Het scheen mij toe, dat het niet van belang ontbloot was, tevens door een proef uit te maken of deze nadeelige werking van het zonlicht moest worden toegeschreven aan het licht, dan wel aan sommige stralen van eene bepaalde golflengte.

Ook deze vraag was gemakkelijk op te lossen met zulk een snel kiemend en uiterst gevoelig materiaal voor proefnemingen.

Aan ARLOING, die den invloed der 7 verschillende kleuren op de sporen der bacillen bestudeerde, gelukte het niet, tot een bepaalde conclusie te geraken.

Het is mij bij Hemileia gebleken, dat de nadeelige werking van het zonlicht op de kieming der sporen uitsluitend moet worden toegeschreven aan de blauwe helft van 't spectrum.

Als de lichtstralen genoodzaakt worden hun weg door een koperoxydammoniak-oplossing te nemen, alvorens tot de sporen te geraken, dan is kieming niet mogelijk; de sporen worden gedood. Als evenwel het licht een geconcentreerde oplossing van bichromas kalicus is doorgegaan, zoodat het een groot deel zijner actinische stralen verloren heeft, alvorens op de sporen te kunnen inwerken, gaan zij kiemen alsof zij in volkomen duisternis waren gebracht.

Bij de bichromas kalicus-oplossing dient men echter in het oog te houden, dat deze niet alle actinische stralen absorbeert, vooral niet indien de intensiteit van het daglicht vrij groot is, en meermalen ziet men dan ook, als men geen voldoende voorzorgsmaatregelen genomen heeft, dat de sporen niet tot ontwikkeling komen.

Naarmate de intensiteit van het licht sterker is, moet de dikte der vloeistofmassa grooter genomen worden. Het eenvoudigst laat zich dit regelen door een proef met photographisch papier. Dit gebruikend, zag ik, dat telken male als de sporen in de roode kamer niet tot kieming overgingen, er dan nog actinisch licht werd doorgelaten van genoegzame intensiteit om het papier te kleuren.

Het chloorzilver-albumine-papier leent zich hiertoe beter dan het broomzilver-gelatine-papier. Dit laatste is te ge-

voelig en moeilijk is het de hoeveelheid vloeistof zoo te regelen, dat dit papier in 't geheel niet meer gekleurd wordt.

Als nu de intensiteit van de blauwe helft van het doorgelaten licht in die mate verzwakt is, dat het chloorzilveralbumine-papier in de roode kamer niet meer wordt aangedaan, dan ook kiemen de sporen in dit roode licht even goed als in het donker.

Een nader bewijs voor de stelling, dat de nadeelige werking, die het zonlicht uitoefent op de sporen van Hemileia vastatrix, uitsluitend moet worden toegeschreven aan de blauwe helft van het spectrum, is gelegen in het feit, dat de sporen. ook in het sterkste petroleum-licht, even goed en even snel kiemen als in volslagen duisternis. De actinische stralen van het petroleum-licht hebben een te geringe intensiteit om een nadeeligen invloed op de sporen te kunnen uitoefenen.

Buitenzorg, Juni 1888.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 27 October 1888.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, HUBRECHT, BEHRENS, GRINWIS, MULDER, HOEK, MARTIN, VAN DORP, RIJKE, KORTEWEG, MAC GILLAVRY, FRANCHIMONT, DE VRIES, HOFFMANN, ZAAIJER, ZEEMAN, BIERENS DE HAAN, FORSTER, RAUWENHOFF, SCHOLS, SCHOUTE, KAPTEYN, STOKVIS, LORENTZ, A. C. OUDEMANS JR., BUYS BALLOT, VAN DIESEN, MICHAËLIS, DIBBITS, PEKELHARING, ENGELMANN, J. A. C. OUDEMANS, PLACE, HOOGEWERFF en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. G. F. WESTERMAN, Directeur van het koninklijk zoölogisch Genootschap: Natura Artis Magistra te Amsterdam, 1 October 1888; 2°. G. J. W. BREMER, Secretaris van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, 7 October 1888; 3°. H. HEINEN, Bibliothecaris van het provinciaal Genootschap van Kunsten en Wetenschappen te 's Hertogenbosch, 4 October 1888; 4°. F. KRAUSS, Bibliothecaris van het Verein für vater-

ländische Naturkunde te Stuttgart, 19 Mei 1888; 5⁰. den Bibliothecaris der Academia Romana te Bucharest, 5 October 1888; 6⁰. Bonola, Secretaris der Société Khédiviale de Géographie te Caïro, 18 October 1888; 7⁰. E. Burgess, Secretaris der Boston Society of natural History te Boston, 14 Februari 1888; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1⁰. G. C. W. Bohnensieg, Conservator van Teyler's Stichting te Haarlem, October 1888; 2⁰. Förstemann, Archivaris der kön. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften te Leipzig, 20 April 1888; 3⁰. den Secretaris der Gesellschaft für bildende Kunst und Alterthümer te Emden, 15 Augustus 1888; 4⁰. E. Burgess, Secretaris der Boston Society of natural History te Boston, 27 Februari 1888; 5⁰. den Bibliothecaris van den State Board of Agriculture of Michigan, April 1888; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— De Heeren Bierens de Haan en van den Berg zijn nog niet gereed met hun rapport over de verhandeling van den Heer Dr. Jan de Vries. Eene nieuwe verhandeling van denzelfden auteur: »Over eene groep van regelmatige configuraties", inmiddels ter plaatsing in de werken der Akademie bij den Secretaris ingekomen, wordt door den Voorzitter om advies in handen gesteld derzelfde Commissie.

— De Heer Behrens spreekt over eene geologische excursie, door hem in den Eifel gedaan, om aldaar gesteenten te verzamelen, tot hiertoe niet onderzocht.

Bij deze gelegenheid hebben ook de vulkanische meren, de Eifeler »Maare", zijne aandacht getrokken. Deze zijn, zijns inziens, niet door instorting van uitgedoofde vulkanen ontstaan. Ware dit zoo, dan zou men de koppen der afgeknapte lagen moeten kunnen zien, en meren met oevers van bazaltlava moeten vinden, beantwoordend aan de talrijke bazaltische vulkanen van den Eifel.

De spreker deelt vervolgens de uitkomsten mede van proeven, door hem genomen met het uitblazen van kuilen in verschillende losse materialen, door openingen, op verschillende diepten daarin aangebracht. Het is hem bij deze proeven gebleken:

1°. dat in fijne en lichte materialen, b. v. fijn poeder van puimsteen en tras, steeds trechtervormige, naar onder nagenoeg cilindrische kolken ontstaan, besloten in vrij hooge en steile kegelvormige opstortingen;

2°. dat bijmenging van grover en zwaarder materiaal de wijdte der kuilen doet toenemen, terwijl de diepte afneemt en de bodem vlak wordt;

3°. dat de bijmenging van zulk zwaar materiaal tot ondermijning in de diepte en daarop volgende instorting aanleiding kan geven;

4°. dat de bijmenging van betrekkelijk groote brokken en scherven aanleiding geeft tot *opheffing*, en tot eene *schifting*, die ten gevolge heeft, dat het lichtste materiaal — puimsteen — aan de oppervlakte komt en dat hoofdzakelijk dit lichtste materiaal weggeslingerd wordt. De kuil wordt hierbij zeer wijd en ondiep, de rand steil, zijne ophooging onbeduidend.

De Heer Behrens meende op grond van een en ander te mogen aannemen, dat de Eifeler meren als niet voltooide vulkanen moeten opgevat worden, en dat zij gevormd zijn geworden door het murw worden en het lang voortgezette uitblazen van het sedimentaire gesteente, waarbij dan slechts weinig lava aan de oppervlakte gebracht werd.

Ten slotte werden modellen vertoond, verkregen door het inpersen van gipsmortel in kegelvormige hoopen van zand en puin. Deze modellen moesten bewijzen, dat centrale uitholingen in vulkanische kegels en centrale opvullingen met eruptieve gesteenten, die von Hochstetter tot uitsmelting meende te moeten terugbrengen, op meer eenvoudige wijze, nl. door zijdelingsche uitspreiding en omkorsting van lavakolommen kunnen verklaard worden. Al naar de mate van vloeibaarheid der ingeperste specie en de geaardheid van den zand- of puinhoop, konden peervormige, cilindri-

sche en veelvuldig vertakte kernen, met of zonder krateropeningen, verkregen worden.

— Voor de Verslagen en Mededeelingen worden aangeboden, door den Heer GRINWIS een opstel, getiteld: »De energie van den bolvormigen condensator", en door den Heer SCHOLS, uit naam van den Heer VAN DEN BERG, diens: »Eenige formulen voor de berekening van de Bernoulliaansche en van de tangenten-coëfficiënten".

— Voor de Boekerij der Akademie worden aangeboden:

1. door den Heer MARTIN, diens »Aanteekeningen bij eene geognostische overzichtskaart van Suriname";

2. door den Heer BIERENS DE HAAN, uit naam van het wiskundig Genootschap: »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven": »Register naar eene wetenschappelijke verdeeling op de werken van het wiskundig Genootschap: Een onvermoeide arbeid komt alles te boven".

3. door den Heer DE VRIES, uit naam van den Heer Dr. RITZEMA BOS te Wageningen, diens: *a.* L'anguillule de la tige et les maladies des plantes dues à ce Nématode; *b.* Landbouwdierkunde; *c.* De dierlijke parasieten van den mensch en de huisdieren; en nog enkele kleinere brochuren over zoölogische onderwerpen.

— Eene verhandeling van den Heer J. CARDINAAL, leeraar aan 's Rijks H. B. S. te Tilburg: »Meetkundige theorie der scheeve oppervlakken der vierde orde" wordt in handen gesteld der Heeren SCHOUTE en BIERENS DE HAAN, om daarover, zoo mogelijk, rapport uit te brengen in de volgende Vergadering.

— Daar er verder niets te verhandelen is, wordt de Vergadering gesloten.

DE ENERGIE

VAN DEN

BOLVORMIGEN CONDENSATOR.

DOOR

C. H. C. GRINWIS.

1. De potentieele electrische energie van een stelsel geleiders heeft tot waarde

$$W = \tfrac{1}{2} \Sigma M V \; , \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (1)$$

waarbij het somteeken geldt voor de producten der electrische massa's M met de overeenkomstige potentiaalwaarden V voor iederen geleider.

Laat men de bewegelijke geleiders, wier ladingen onveranderlijk worden ondersteld, aan zichzelve over, zoo geven zij aan de electrische werkingen, die tusschen hen bestaan, gevolg; de arbeid dier krachten is positief en de energie van het stelsel vermindert.

Is A de arbeid der electrische krachten, zoo zal, ingevolge het beginsel van behoud van arbeidsvermogen,

$$d W + d A = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots \; (2)$$

Uit (1) volgt,

$$d W = \tfrac{1}{2} \Sigma M d V + \tfrac{1}{2} \Sigma V d M ,$$

doch daar de ladingen constant blijven, vervalt de laatste term en wordt

$$d\,W = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,M\,d\,V \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Daar dan eene positieve waarde van $d\,A$, volgens (2) eene negatieve waarde van $d\,W$ met zich brengt, de energie dus afneemt, wordt volgens (3) ook $d\,V$ negatief; de verplaatsing der geleiders vermindert hunne potentiaalwaarden.

2. Zijn voor twee geleiders de electrische ladingen M_1 en M_2, de totale potentialen over die geleiders V_1 en V_2, zoo bestaan tusschen deze *vier* grootheden de betrekkingen,

$$V_1 = p_1\,M_1 + p^1\,M_2 \qquad V_2 = p^1\,M_1 + p_2\,M_2 \;.\;.\; (4)$$

waarin p_1 p^1 en p_2 de potentiaalcoëfficiënten van het stelsel aanduiden; zooals bekend, zijn het positieve grootheden van de afmeting L^{-1}, terwijl $p^1 < p_1$ en $< p_2$ is.

Uit (4) volgen voor M_1 en M_2 twee andere betrekkingen van den vorm

$$M_1 = q_1\,V_1 + q^1\,V_2 \qquad M_2 = q^1\,V_1 + q_2\,V_2 . \;.\;.\; (5$$

De factoren q_1 en q_2 worden de coëfficiënten van capaciteit, q^1 de inductiecoëfficiënt der beide geleiders op elkander genoemd.

Substitueeren wij de waarden van M_1 en M_2 uit (5) in (4), zoo volgen twee identische vergelijkingen in V_1 en V_2, waaruit voor de 6 coëfficiënten p en q de volgende drie onafhankelijke betrekkingen ontstaan:

$$p_1 q_1 + p^1 q^1 = 1 \quad p^1 q^1 + p_2 q_2 = 1 \quad p_1 q^1 + p^1 q_2 = 0 \,.\,. (6)$$

zoodat de 3 coëfficiënten q uit de 3 coëfficiënten p kunnen worden afgeleid en omgekeerd.

Voor een bolvormigen condensator met concentrische geleidende schil als buitenoppervlak, volgt (zie onze bijdrage »Over den invloed van geleiders op de verdeeling der electrische energie”. Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 3de Reeks, Deel II, blz. 31—32), als a de straal van den bol, b en b^1 de stralen van de daarom geplaatste schil aanduiden:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{b^1}, \quad p^1 = \frac{1}{b^1}, \quad p_2 = \frac{1}{b^1} \\ \text{dus, in gevolge vergel. (6),} \\ q_1 = \frac{a\,b}{b-a}, \quad q^1 = -\frac{a\,b}{b-a}, \quad q_2 = b^1 + \frac{a\,b}{b-a} \end{array}\right\} \ldots \ldots (7)$$

3. Bij dezen condensator onderscheiden wij, als de massa M_1 constant is, twee gevallen:

1e Wanneer de tweede geleider (de schil) geïsoleerd en neutraal is, dus $M_2 = 0$, zal

$$V'_1 = p_1\,M_1 = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{b^1}\right) M_1;$$

stond de kern alleen, zonder schil, zoo ware bij dezelfde lading M_1

$$\overline{V} = \frac{M_1}{a},$$

derhalve

$$V_1' = \left(1 - \frac{a}{b} + \frac{a}{b'}\right) \overline{V} = f\,\overline{V},$$

waarin $f < 1$. De schil vermindert dus de potentiaalwaarde der kern.

2e. Als de schil is afgeleid (met den grond verbonden), volgt

$$V_2 = p'\,M_1 + p_2\,M_2 = 0;$$

dus

$$M_2 = -\frac{p'}{p_2}\,M_1$$

en de potentiaal der kern wordt in dit geval

$$V_1'' = p_1\,M_1 + p'\,M_2 = \left(\frac{p_1\,p_2 - p'^2}{p_2}\right) M_1 = \frac{b-a}{a\,b}\,M_1$$

of

$$V_1'' = \left(1 - \frac{a}{b}\right)\frac{M_1}{a} = \left(1 - \frac{a}{b}\right)\overline{V} = g\,V$$

waarin

$$g < f < 1,$$

zoodat

$$V_1'' < V_1' < V;$$

de potentiaal der kern wordt bij constante lading door de tegenwoordigheid der neutrale schil verminderd en die vermindering neemt toe, wanneer de schil daarna met den grond verbonden wordt.

4. Voor de potentiaal vonden wij, bij het aanbrengen en daarna afleiden van de schil, steeds kleinere waarden; hetzelfde geldt voor de electrische energie van het stelsel.

Daar dit stelsel uit *twee* geleiders bestaat, volgt uit (1) en (4)

$$W = \tfrac{1}{2}(M_1 V_1 + M_2 V_2) = \tfrac{1}{2}(p_1 M_1^2 + 2\,p^1 M_1 M_2 + p_2 M_2^2)$$

dus voor den condensator, ingevolge de in (7) gegeven waarden,

$$W = \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) M_1^2 + \frac{2}{b'} M_1 M_2 + \frac{1}{b'} M_2^2\right\}.$$

Is de schil niet aanwezig, zoo is

$$\overline{W} = \frac{M_1^2}{2a}.$$

Is de schil neutraal en geïsoleerd, dan $M_2 = 0$ en

$$W'_1 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) M_1^2 = \left(1 - \frac{a}{b} + \frac{a}{b'}\right)\overline{W} = f\,\overline{W}, \text{ waar}$$

$$f < 1.$$

Is de schil afgeleid, dan geeft (4) voor $V_2 = 0$

$$M_2 = -\frac{p^1}{p_2} M_1,$$

dus, daar wegens (7) $p^1 = p_2$,

$$M_2 = - M_1;$$

de energie van den condensator wordt dan

$$W_1'' = \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) M_1^2\right\} = \left(1 - \frac{a}{b}\right) \overline{W} = g \overline{W}$$

De energie van den condensator wordt derhalve door de tegenwoordigheid der neutrale schil verminderd; die vermindering neemt toe, wanneer de schil daarna wordt afgeleid.

Dezelfde regel geldt dus voor de energie als voor de potentiaal der kern en wel zijn beide grootheden steeds evenredig aan elkander.

5 Nemen wij thans aan, dat de potentiaal V_1 der kern *constant* gehouden wordt en onderzoeken wij de verandering der lading M_1 voor de beide gevallen 1e dat de schil geïsoleerd en zonder lading is, 2e dat de schil met den grond is verbonden.

Wij hebben dan:

1e. Als de schil *neutraal* (zonder lading) en *geïsoleerd* is,

$$M_2 = q^1 V_1 + q_2 V_2 = 0 \qquad V_2 = - \frac{q^1}{q_2} V_1$$

$$M_1 = q_1 V_1 + q^1 V_2 = \left(\frac{q_1 q_2 - q^{12}}{q_2}\right) V_1$$

dus wegens (7),

$$M_1 = \frac{a b b'}{b b' - a b' + a b} V_1.$$

Zonder schil is bij dezelfde waarde V_1 de massa $\overline{M}$ bepaald door

$$V_1 = \frac{\overline{M_1}}{a},$$

dus wordt

$$M_1 = \frac{b b'}{b b' - a b' + a b} \overline{M}_1 = \frac{\overline{M_1}}{f},$$

waarin weder

$$f = 1 - \frac{a}{b} + \frac{a}{b'}$$

dus

$$M_1 > \overline{M}_1 ;$$

de massa op de kern is door toevoeging der neutrale schil toegenomen en wel met een bedrag

$$\Delta_1 \overline{M}_1 = \frac{a\,(b' - b)}{b\,b' - a\,(b' - b)} \overline{M}_1$$

$$= \frac{a}{b\left(\frac{b'}{b' - b}\right) - a} \overline{M}_1$$

2e. Als de schil is *afgeleid* (met den grond verbonden) dan

$$V_2 = 0 \quad M_1 = q_1\, V_1 = \frac{a\,b}{b - a}\, V_1 = \frac{b}{b - a} \overline{M}_1$$

$$M_1 = \frac{1}{1 - \frac{a}{b}} \overline{M}_1 = \frac{\overline{M}_1}{g} ,$$

waarin weder

$$g = 1 - \frac{a}{b} ;$$

dus

$$g < f < 1 ,$$

zoodat de massa weder is toegenomen en die toename bedraagt meer dan toen de geïsoleerde schil werd aangebracht.

Immers die toename is voor de afgeleide schil

$$\Delta_2 \overline{M}_1 = \frac{a}{b - a} \overline{M}_1$$

en blijkbaar is

$$\Delta_2 \overline{M}_1 > \Delta_1 \overline{M}_1 .$$

6. Onderzoeken wij thans bij constante potentiaal de waarde der energie van het stelsel, uitgedrukt door

$$W_2 = \tfrac{1}{2}(q_1 V_1^2 + 2 q^1 V_1 V_2 + q_2 V_2^2).$$

Is alleen de kern aanwezig, zoo is

$$\overline{W} = \tfrac{1}{2} p_1 M_1^2,$$

daar nu

$$\overline{M}_1 = \overline{V}_1 a$$

en terwijl in dit geval

$$p_1 = \frac{1}{a},$$

zal

$$\overline{W} = \tfrac{1}{2} a V_1^2.$$

Onderscheiden wij verder ieder der beide gevallen, dat de schil geïsoleerd, zonder lading en met den grond verbonden is.

1e. *Schil geïsoleerd en zonder lading.*

$$M_1 = q_1 V_1 + q^1 V_2, \quad M_2 = q^1 V_1 + q_2 V_2$$

$$M_2 = 0 \text{ dus } V_2 = -\frac{q^1}{q_2} V_1$$

en de energie wordt

$$W'_2 = \tfrac{1}{2}\left(q_1 V_1^2 - \frac{2 q'^2}{q_2} V_1^2 + \frac{q'^2}{q_2} V_1^2\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} V_1^2 \left(\frac{q_1 q_2 - q'^2}{q_2}\right) = \tfrac{1}{2} V_1^2 \left(\frac{a b b'}{ab + bb' - ab'}\right)$$

$$= \frac{b b'}{ab + bb' - ab'} \overline{W'} = \frac{1}{1 - \frac{a}{b} + \frac{a}{b'}} \overline{W},$$

zoodat

$$W'_2 = \frac{1}{f} \overline{W}$$

derhalve daar

$$f < 1, \quad W'_2 > \overline{W},$$

terwijl voor de vermeerdering van W volgt

$$\Delta_1 \overline{W} = \frac{a(b'-b)}{ab + bb' - ab'} \overline{W} = \frac{a}{b \dfrac{b'}{b'-b} - a} \overline{W}.$$

2e. *Schil met den grond verbonden.*
In dit geval is

$$V_2 = 0,$$

derhalve

$$W''_2 = \tfrac{1}{2} q_1 V_1^2 = \frac{ab}{2(b-a)} V_1^2 = \frac{b}{b-a} W,$$

zoodat

$$W''_2 = \frac{1}{g} \overline{W}$$

dus

$$W''_2 > \overline{W}$$

en voor de vermeerdering der energie volgt in dit geval

$$\Delta_2 \overline{W} = \frac{a}{b-a} \overline{W},$$

zoodat

$$\Delta_2 \overline{W} > \Delta_1 \overline{W} \quad \text{en} \quad W''_2 > W'_2 > \overline{W}_1,$$

terwijl

$$\frac{1}{g} > \frac{1}{f} > 1;$$

wanneer dus de schil met den grond verbonden is en de kern op standvastige potentiaal wordt gehouden, heeft de energie van het stelsel hare maximumwaarde.

7. Vergelijken wij de grootste en kleinste waarden van W met de middenwaarde (waarbij de kern alleen aanwezig is), dus met

$$\bar{W} = \frac{M_1^2}{2a} = \tfrac{1}{2}\, a\, V_1^2 = C\,,$$

zoo geeft het boven gevondene voor

de kleinste waarde, $W''_1 = A = \frac{b-a}{b}\, C = g\, C$

de grootste waarde, $W''_2 = B = \frac{b}{b-a}\, C = \frac{1}{g}\, C$

hieruit volgt, $A\,B = C^2$, zoodat de electrische energie van den kern, wanneer de schil verwijderd is, middenevenredig is tot de minimum en maximum waarde der energie van het stelsel; in het eerste geval bij constante lading van den kern, in het tweede geval, wanneer die kern eene constante potentiaal heeft. — Die minimum en maximum waarden treden beiden op, wanneer de schil met den grond is verbonden.

Utrecht, October 1888.

EENIGE FORMULEN VOOR DE BEREKENING

VAN DE

BERNOULLIAANSCHE EN VAN DE TANGENTEN-COËFFICIËNTEN.

DOOR

F. J. VAN DEN BERG.

Evenals in mijne vroegere, in de Verslagen en Mededeelingen, Afdeeling Natuurkunde, 2e Reeks, Deel XVI, 1e Stuk, 1881, blz. 74—176, opgenomen bijdrage »Over periodieke terugloopende betrekkingen tusschen de coëfficiënten in de ontwikkeling van functiën; meer in het bijzonder tusschen de Bernoulliaansche en ook tusschen eenige daarmede verwante coëfficiënten", ga ik ook in het onderstaande uit van de bepaling der Bernoulliaansche en der tangentencoëfficiënten als coëfficiënten in de ontwikkeling van twee der meest eenvoudige goniometrische functiën. In aansluiting namelijk aan blz. 82—83, 84—85 en 154—155 van die bijdrage stel ik de beide ontwikkelingen

$$-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}=\sum_{0}^{\infty}{}_q\frac{B_{2q-1}}{(2q)!}x^{2q-1}\quad\text{en}\quad tg\frac{x}{2}=\sum_{0}^{\infty}{}_q\frac{T_{2q-1}}{(2q)!}x^{2q-1}$$

op den voorgrond, waarin weder, omdat de gebezigde boog niet x zelf, maar $\frac{x}{2}$ is, B_{2q-1} den q^{den} Bernoulliaanschen of verkleinden cotangenten coëfficiënt en T_{2q-1} den q^{den} verkleinden tangenten-coëfficiënt beteekent, zijnde ook nu slechts

voor de regelmaat en de beknoptheid der formulen de op zich zelf eigenlijk overbodige notatiën $B_{-1} = -1$ en $T_{-1} = 0$ als vooropstaande of 0[de] coëfficiënten ingevoerd, terwijl overigens ook in het verdere het teeken $p!$ steeds in plaats van het gedurig product $1 . 2 . 3 \ldots p$ staat, zoodat blijkens $p! = \frac{(p+1)!}{p+1}$ aan het symbool $0!$ de waarde 1 is te hechten. Al dadelijk geeft nu de formule

$$cot \frac{x}{2} - 2 \, cot \, x = cot \frac{x}{2} - \frac{cot^2 \frac{x}{2} - 1}{cot \frac{x}{2}} = tg \frac{x}{2},$$

door in haar eerste en haar derde lid, uitgedrukt in de coëfficiënten B en T, de coëfficiënten van den algemeenen term x^{2q-1} onderling gelijk te stellen, de betrekking $2(2^{2q}-1) B_{2q-1} = T_{2q-1}$; en deze doet alzoo iedere formule voor de Bernoulliaansche coëfficiënten tevens als eene zoodanige voor de tangenten-coëfficiënten kennen, en omgekeerd. Deze betrekking eens en vooral gevonden zijnde, zullen wij ons dan ook in het volgende, alwaar gewoonlijk de formulen in T een meer beknopten vorm hebben, in den regel tot deze formulen bepalen, zonder ze nogmaals neêr te schrijven in den gewijzigden vorm dien zij verkrijgen door voor iederen T de waarde uitgedrukt in den overeenkomstigen B in te vullen.

Vooreerst heeft men nu, overgaande van goniometrische tot exponentiale functiën en daarbij als gewoonlijk door e de Neperiaansche logarithmen-basis en door i de onbestaanbare eenheid verstaande,

$$i \, tg \frac{x}{2} = \frac{2 \, i \, sin \frac{x}{2}}{2 \, cos \frac{x}{2}} = \frac{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} + e^{-\frac{ix}{2}}} = 1 - \frac{2}{e^{ix} + 1},$$

en dus, vervangende x door $-ix$ en gelijktijdig de bovenstaande tangenten-ontwikkeling toepassende,

$$-i\,tg\,\frac{ix}{2}=-i\sum_{0}^{\infty}{}_{q}\,\frac{T_{2q-1}}{(2q)!}(ix)^{2q-1}=\sum_{0}^{\infty}{}_{q}(-)^{q-1}\frac{T_{2q-1}}{(2q)!}x^{2q-1}=$$

$$=1-\frac{2}{e^{x}+1}.$$

Denkt men zich hierin het laatste lid volgens de reeks van MACLAURIN ontwikkeld, dan komt onmiddellijk door gelijkstelling van den coëfficiënt van x^{2q-1} aan den gelijknamigen van het voorlaatste lid:

$$(-)^{q-1}\frac{T_{2q-1}}{(2q)!}=\frac{1}{(2q-1)!}\cdot\frac{d^{2q-1}\left(1-\dfrac{2}{e^{x}+1}\right)}{d\,x^{2q-1}}_{(x=0)}=$$

$$=-\frac{2}{(2q-1)!}\cdot\frac{d^{2q-1}\left(\dfrac{1}{e^{x}+1}\right)}{d\,x^{2q-1}}_{(x=0)},$$

hetgeen onder den vorm

$$B_{2q-1}=\frac{T_{2q-1}}{2(2^{2q}-1)}=(-)^{q}\frac{2q}{2^{2q}-1}\cdot\frac{d^{2q-1}\left(\dfrac{1}{e^{x}+1}\right)}{d\,x^{2q-1}}_{(x=0)}$$

naar behooren dezelfde differentiaal-uitdrukking voor den q^{den} Bernoulliaanschen coëfficiënt geeft als onder anderen bij R. LOBATTO, Lessen over de differentiaal- en integraalrekening, 2e Deel, 1e Afdeeling, 1852, blz. 374—376, en bij S. F. LACROIX, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, 2e Ed., Tome 3, 1819, blz. 107—114, uit andere gronden volgens LAPLACE is afgeleid. Aldaar wordt dan verder uiteengezet hoe LAPLACE, door het $(2q-1)^{e}$ differentiaalquotient van de functie $\frac{1}{e^{x}+1}$ op te maken eensdeels onder den vorm eener eindige breuk met $(e^{x}+1)^{2q}$ tot noemer en met onbepaalde coëfficiënten voor de $2q-1$ eerste magten van e^{x} in den teller, ten andere onder den vorm eener oneindige reeks komende door eerst die functie $\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

zelve volgens de negatieve magten van e^x te ontwikkelen, tot zijne formule voor de regtstreeksche of onafhankelijke berekening van een willekeurigen Bernoulliaanschen coëfficiënt geraakt is. Deze formule, die zich, weder in T- in plaats van in B-vorm, en gebruik makende van dubbele Σ-teekens en van de gewone notatie voor de binomiaal-coëfficiënten, aanvankelijk aldus laat schrijven:

$$(-)^{q-1}\frac{2^{2q-2}}{q}T_{2q-1}=\sum_{1}^{2q-1}{}_{n}(-)^{n-1}\sum_{0}^{n-1}{}_{r}(-)^{r}\binom{2q}{r}(n-r)^{2q-1},$$

levert het groote voordeel op dat zij zich in het tweede lid tot slechts het halve aantal onder het eerste Σ-teeken staande termen laat terugbrengen: immers, op grond dat de $(2q-1)^e$ magten van de natuurlijke getallen eene rekenkundige reeks van de $(2q-1)^e$ orde vormen en dus hunne $(2q)^e$ verschillen allen gelijk nul zijn, heeft men

$$\sum_{0}^{2q}{}_{r}(-)^{r}\binom{2q}{r}(n-r)^{2q-1}=0$$

of, omdat hierin de term voor $r=n$ van zelf gelijk nul is,

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{r}(-)^{r}\binom{2q}{r}(n-r)^{2q-1}+\sum_{n+1}^{2q}{}_{r}(-)^{r}\binom{2q}{r}(n-r)^{2q-1}=0,$$

waaruit volgt, vervangende in den tweeden Σ-term den willekeurigen veranderlijken aanwijzer r door $2q-r$ en daarbij op $\binom{2q}{2q-r}=\binom{2q}{r}$ lettende,

$$(-)^{n-1}\sum_{0}^{n-1}{}_{r}(-)^{r}\binom{2q}{r}(n-r)^{2q-1}=$$

$$=(-)^{2q-n-1}\sum_{0}^{2q-n-1}{}_{r}(-)^{r}\binom{2q}{r}(2q-n-r)^{2q-1};$$

en het blijkt alzoo dat in gezegde formule telkens elke

twee evenver uit het midden verwijderde termen, in n en $2q-n$ namelijk, onderling gelijk zijn, dat dus ook de middelste term, voor $n=q$, op zich zelf staat, en dat bijgevolg LAPLACE zijne formule teregt heeft kunnen inkorten tot wat weder in T- en in Σ-vorm luidt:

$$(-)^{q-1}\frac{2^{2q-2}}{q}T_{2q-1}=2\sum_{1}^{q-1}{}_n(-)^{n-1}\sum_{0}^{n-1}{}_r(-)^r\binom{2q}{r}(n-r)^{2q-1}+$$

$$+(-)^{q-1}\sum_{0}^{q-1}{}_r(-)^r\binom{2q}{r}(q-r)^{2q-1}. \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Maar ook zonder een beroep te doen op de reeks van MACLAURIN kan men de bovenstaande onderlinge gelijkheid der twee voor $-i\,tg\,\frac{ix}{2}$ verkregen waarden bij voorbeeld als volgt onder anderen vorm verder ontwikkelen. Men heeft

$$\sum_{0}^{\infty}{}_q(-)^{q-1}\frac{T_{2q-1}}{(2q)!}x^{2q-1}=1-\frac{2}{e^x+1}=1-\frac{1}{1+\frac{e^x-1}{2}}=$$

$$=-\sum_{1}^{\infty}{}_n(-\tfrac{1}{2})^n(e^x-1)^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

En hierin laat zich nu substitueren

$$(e^x-1)^n=\sum_{0}^{n}{}_r(-)^r\binom{n}{r}e^{(n-r)x}=\sum_{0}^{n}{}_r(-)^r\binom{n}{r}\sum_{0}^{\infty}{}_s\frac{((n-r)x)^s}{s!},$$

welke substitutie vooreerst wegens het ontbreken van alle even magten van x in het eerste lid der vorenstaande gelijkheid aanleiding geeft tot de opmerking dat in de uitkomst de coëfficiënt van elken term x^s voor $s=2q$ gelijk nul moet zijn, dat is

$$\sum_{1}^{2q}{}_n(-\tfrac{1}{2})^n\sum_{0}^{n-1}{}_r(-)^r\binom{n}{r}(n-r)^{2q}=0,$$

(waarin namelijk voor r de bovengrens n door $n-1$ ver-

vangen mogt worden omdat voor $r = n$ de term $(n-r)^{2q}$ verdwijnt, terwijl voor n de bovengrens van ∞ tot $2\,q$ mogt verminderd worden omdat volgens het zoo even reeds herinnerde de $(2\,q + 1)^e$, en ook alle hoogere, verschillen van de reeks der $(2\,q)^e$ magten van zelf gelijk nul worden). Maar ten andere geeft diezelfde substitutie door onderlinge gelijkstelling, voor $s = 2\,q - 1$, van de coëfficiënten van x^{2q-1}, en met inachtneming van eene overeenkomstige grensverlaging, en na vermenigvuldiging met $2^{2q-1}.(2\,q-1)!$, de formule:

$$\left.\begin{aligned} &(-)^{q-1}\,\frac{2^{2q-2}}{q}\,T_{2q-1} = \\ &= \sum_1^{2q-1}{}_n (-)^{n-1}\,2^{2q-n-1} \sum_0^{n-1}{}_r (-)^r \binom{n}{r} (n-r)^{2q-1} = \\ &= \sum_1^{2q-1}{}_n (-)^{n-1} 2^{2q-n-1}.n \sum_0^{n-1}{}_r (-)^r \binom{n-1}{r} (n-r)^{2q-2}, \end{aligned}\right\} ..(2)$$

waarin namelijk als vereenvoudigde vorm het laatste lid mogt worden bijgeschreven op grond van

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n}{n-r}\cdot\frac{(n-1)!}{r!\,(n-r-1)!} = \frac{n}{n-r}\binom{n-1}{r}.$$

In plaats van, zooals hier geschied is, in het tweede of het derde lid voor ieder der $2\,q-1$ waarden van n den in de ontwikkeling van $(e^x-1)^n$ voorkomenden coëfficiënt van den term x^{2q-1} zelfstandig in $\sum_r$-vorm uit te drukken, kan men deze coëfficiënten voor de opvolgende n ook geschikt door eene terugloopende formule uit elkander afleiden. Uitgaande namelijk van dézen vorm van ontwikkeling:

$$\frac{(e^x-1)^n}{n!} = \sum_n^{\infty}{}_s P_{n.s}\,\frac{x^s}{s!},$$

waarin men wegens $e^x - 1 = x +$ enz. de veranderlijke s werkelijk eerst bij n als benedengrens behoeft te doen aanvangen, en opmerkende dat

$$\frac{d\,\frac{(e^x-1)^n}{n!}}{dx}=\frac{(e^x-1)^{n-1}}{(n-1)!}e^x=n\frac{(e^x-1)^n}{n!}+\frac{(e^x-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

is, verkrijgt men door substitutie hierin:

$$\sum_n^\infty{}_s P_{n.s}\frac{x^{s-1}}{(s-1)!}=n\sum_n^\infty{}_s P_{n.s}\frac{x^s}{s!}+\sum_{n-1}^\infty{}_s P_{n-1.s}\frac{x^s}{s!};$$

en na dus, ten einde de coëfficiënten van x^{s-1} in beide leden onderling gelijk te kunnen stellen, in het tweede lid de willekeurige veranderlijke s door $s-1$ vervangen te hebben, geeft deze gelijkstelling de algemeene herleidingsformule

$$P_{n.s}=n\,P_{n.s-1}+P_{n-1.s-1}$$

voor de coëfficiënten P. In aanmerking nemende dat voor $n=1$ alle $P_{1.s}=1$ bekend zijn, en evenzeer voor $s=n$ alle $P_{n.n}=1$, vult men door deze formule gemakkelijk de volgende

Tabel der coëfficiënten $P_{n.s}$ van $\frac{x^s}{s!}$ in $\frac{(e^x-1)^n}{n!}$

	$\frac{x^1}{1!}$	$\frac{x^2}{2!}$	$\frac{x^3}{3!}$	$\frac{x^4}{4!}$	$\frac{x^5}{5!}$	$\frac{x^6}{6!}$	$\frac{x^7}{7!}$	enz.
$n=1$	1	1	1	1	1	1	1	
$n=2$		1	3	7	15	31	63	
$n=3$			1	6	25	90	301	
$n=4$				1	10	65	350	
$n=5$					1	15	140	
$n=6$						1	21	
$n=7$							1	
enz.								

in, waarvan alzoo de beteekenis is dat men voor eenige waarde van n de ontwikkeling van $\frac{(e^t-1)^n}{n!}$ verkrijgt door de som te nemen der producten van de coëfficiënten voorkomende in de door deze n aangewezen rij met de daarboven staande termen aan het hoofd der tabel. (In het voorbijgaan zij hier herinnerd dat de coëfficiënten der tabel dezelfde zijn die voorkomen in de formulen voor de eindige differentiën der opvolgende orden van eene willekeurige functie uitgedrukt in de differentiaal-quotienten dier functie: immers voor $y = f(x)$ in verband met $y + \Delta y = f(x + h)$ geeft het theorema van TAYLOR, wanneer men daarop eene symbolische schrijfwijze toepast,

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = \sum_1^\infty s \frac{h^s}{s!} \frac{d^s y}{dx^s} = \left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right) y,$$

en dus de herhaling van dezelfde bewerking in het algemeen

$$\Delta^n y = \left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right)^n y,$$

zoodat ook te dezer zake, zij het symbolisch, eene uitdrukking van denzelfden vorm $(e^t-1)^n$ als zoo even optreedt. De vorenstaande tabel komt dan ook werkelijk te voorschijn indien men de onder anderen bij LOBATTO op blz. 335 uit zijne herleidingsformule

$$p_r^{(n)} = n\left(p_{r-1}^{(n-1)} + p_{r-1}^{(n)}\right)$$

opgemaakte tabel der coëfficiënten p voor de gezegde differentiën vereenvoudigt door de opvolgende rijen te deelen door hare eerste termen $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$, enz., hetgeen nederkomt op den overgang van zijne tot onze coëfficiënten volgens $p_r^{(n)} = n!\, P_{n,s}$ en den daaruit dadelijk en naar behooren voortvloeijenden overgang van zijne herleidingsformule in p tot de onze in P. Ter zake van vorenstaande tabel vond ik overigens nog aangehaald LACROIX, blz. 124 en 300, en L. EULER, Differentialrechnung, 2er Theil, 1790, blz. 59—63).

De substitutie nu in de formule (α) van de op deze wijze in de coëfficiënten P uitgedrukte $(e^x-1)^n$ geeft

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{q}\,(-)^{q-1}\,\frac{T_{2q-1}}{(2q)!}\,x^{2q-1} = -\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\,(-\tfrac{1}{2})^{n}\,n!\sum_{n}^{\infty}{}_{s}\,P_{n,s}\,\frac{x^{s}}{s!},$$

waarbij wij niet op nieuw stilstaan bij het noodwendig verdwijnen van den volledigen coëfficiënt van iedere even magt van x in het tweede lid, maar daarentegen door onderlinge gelijkstelling der coëfficiënten van de algemeene oneven magt x^{2q-1} in beide leden, na dezelfde grensverlaging voor n en dezelfde vermenigvuldiging met $2^{2q-1}.(2q-1)!$ als bij (2), besluiten tot:

$$(-)^{q-1}\,\frac{2^{2q-2}}{q}\,T_{2q-1} = \sum_{1}^{2q-1}{}_{n}\,(-)^{n-1}\,2^{2q-n-1}\,n!\,P_{n.2q-1}\,..\,(2')$$

En deze formule, die in wezenlijkheid slechts een andere, terugloopende, vorm van den zelfstandigen vorm (2) is, behoeft aan de vorenstaande tabel dus telkens slechts de gezamenlijke coëfficiënten P eener zelfde kolom van oneven rangorde $2q-1$ te ontleenen: voor de hier te maken toepassing zijn de even kolommen allen overbodig, en dit geeft dan ook aanleiding tot het regtstreeks zamenstellen voor ons doel van de tabel in zamengedrongen vorm, met behoud namelijk van alle rijen maar alleen van de oneven kolommen. Daartoe dient in plaats van de bovenstaande van s op $s-1$ terugloopende herleidingsformule voor P eene andere te komen, die telkens van s op $s-2$ verspringt; en zulk eene verkrijgt men door het toenmaals gevonden eerste differentiaal-quotient van $\dfrac{(e^x-1)^n}{n!}$ nogmaals te differentiëren en in de uitkomst dit quotient zelf, zoowel voor n als voor $n-1$, te substitueren, hetgeen geeft

$$\frac{d^2\,\dfrac{(e^x-1)^n}{n!}}{dx^2} = n\,\frac{d\,\dfrac{(e^x-1)^n}{n!}}{dx} + \frac{d\,\dfrac{(e^x-1)^{n-1}}{(n-1)!}}{dx} =$$

$$= n^2\,\frac{(e^x-1)^n}{n!} + (2n-1)\,\frac{(e^x-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(e^x-1)^{n-2}}{(n-2)!},$$

dat is

$$\sum_{n}^{\infty} {}_s P_{n.s} \frac{x^{s-2}}{(s-2)!} = n^2 \sum_{n}^{\infty} {}_s P_{n.s} \frac{x^s}{s!} + (2n-1) \sum_{n-1}^{\infty} {}_s P_{n-1.s} \frac{x^s}{s!} + $$
$$+ \sum_{n-2}^{\infty} {}_s P_{n-2.s} \frac{x^s}{s!},$$

waaruit, na vervanging in het tweede lid van s door $s-2$, de bedoelde formule

$$P_{n.s} = n^2 P_{n.s-2} + (2n-1) P_{n-1.s-2} + P_{n-2.s-2}$$

komt. Deze formule die, ware het noodig, even goed voor het zamenstel der uitsluitend even als voor dat der oneven kolommen zou kunnen dienen, strekt alzoo tot grondslag van de volgende in ons geval toereikende

Tabel der coëfficiënten $P_{n.s}$ van de oneven termen $\frac{x^s}{s!}$ in $\frac{(e^x-1)^n}{n!}$.

	$\frac{x^1}{1!}$	$\frac{x^3}{3!}$	$\frac{x^5}{5!}$	$\frac{x^7}{7!}$	$\frac{x^9}{9!}$	enz.
$n=1$	1	1	1	1	1	
$n=2$		3	15	63	255	
$n=3$		1	25	301	3025	
$n=4$			10	350	7770	
$n=5$			1	140	6951	
$n=6$				21	2646	
$n=7$				1	462	
$n=8$					36	
$n=9$					1	
enz.						

Hiermede afstappende van hetgeen voor ons doel uit de ontwikkeling van (α) voortvloeit, gaan wij over tot het opmaken van andere, meer eenvoudige, formulen voor de onafhankelijke berekening van de tangenten- en dus ook van de Bernoulliaansche coëfficiënten. Wij beginnen daarbij, ten einde zoo straks een herhaald gebruik van de uitkomsten te kunnen maken, met een onderzoek naar de ontwikkeling, zoowel in zelfstandigen als in terugloopenden vorm, eener willekeurige magt van den sinus uitgedrukt in de magten van den boog. Hiertoe kan als uitgangspunt de formule

$$(2\,i\,sin\,x)^n = (e^{ix} - e^{-ix})^n = \sum_0^n{}_r\,(-)^r \binom{n}{r} (e^{ix})^{n-r}\,(e^{-ix})^r =$$

$$= \sum_0^n{}_r (-)^r \binom{n}{r} e^{(n-2r)ix} = \sum_0^n{}_r\,(-)^r \binom{n}{r} \sum_0^\infty{}_s \frac{((n-2r)ix)^s}{s!}$$

dienen. Maar omdat $\frac{sin\,x}{x}$ en dus ook $\left(\frac{sin\,x}{x}\right)^n$ slechts de positieve even magten van x bevat, kunnen in het laatste lid geene andere magten dan van den vorm x^{n+2s} voorkomen. Vervangende dus aldaar s door $n + 2\,s$, keerende de volgorde der beide sommatiën om, en deelende door i^n, verkrijgt men vooreerst

$$(2\,sin\,x)^n = \sum_0^\infty{}_s\,(-)^s \frac{x^{n+2s}}{(n+2\,s)!} \sum_0^n{}_r\,(-)^r \binom{n}{r} (n-2\,r)^{n+2s},$$

in welke formule echter de onder het tweede Σ-teeken staande termen tot slechts het halve aantal zijn terug te brengen omdat steeds

$$(-)^r \binom{n}{r} (n-2\,r)^{n+2s} = (-)^{n-r} \binom{n}{n-r} (n-2(n-r))^{n+2s}$$

is, dat is elke twee evenver uit het midden verwijderde termen, in r en $n-r$, onderling gelijk; zoodat men, deelende

door 2, en ingeval van even n opmerkende dat dan de middelste term, voor $r = \frac{n}{2}$, van zelf gelijk nul is, en dat dan tevens overal $n - 2r = 2\left(\frac{n}{2} - r\right)$ kan geschreven worden, verkrijgt:

$$2^{n-1} \sin^n x = \left\{ \begin{array}{l} \text{(voor oneven } n) \\ \sum_0^\infty {}_s (-)^s \frac{x^{n+2s}}{(n+2s)!} \sum_0^{\frac{n-1}{2}} {}_r (-)^r \binom{n}{r} (n-2r)^{n-2s}, \\ \text{(voor even } n) \\ \sum_0^\infty {}_s (-)^s \frac{(2x)^{n+2s}}{(n+2s)!} \sum_0^{\frac{n}{2}-1} {}_r (-)^r \binom{n}{r} \left(\frac{n}{2} - r\right)^{n+2s}. \end{array} \right\} \ldots (\beta)$$

Thans de ontwikkeling derzelfde functie $\sin^n x$ volgens teruglоopende coëfficiënten. Stel daartoe

$$\frac{\sin^n x}{n!} = \sum_0^\infty {}_s (-)^s \, Q_{n.n+2s} \frac{x^{n+2s}}{(n+2s)!}, \quad \ldots \ldots (\beta')$$

dan make men gebruik van

$$\frac{d^2 \frac{\sin^n x}{n!}}{dx^2} = \frac{d \frac{\sin^{n-1} x \cos x}{(n-1)!}}{dx} = \frac{-\sin^n x + (n-1) \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x)}{(n-1)!} =$$

$$= -n^2 \frac{\sin^n x}{n!} + \frac{\sin^{n-2} x}{(n-2)!},$$

dat is bij substitutie

$$\sum_0^\infty {}_s (-)^s Q_{n.n+2s} \frac{x^{n+2s-2}}{(n+2s-2)!} = -n^2 \sum_0^\infty {}_s (-)^s Q_{n.n+2s} \frac{x^{n+2s}}{(n+2s)!} +$$

$$+ \sum_0^\infty {}_s (-)^s \, Q_{n-2\, n+2s-2} \frac{x^{n+2s-2}}{(n+2s-2)!}.$$

Vervangt men hier, ten einde de coëfficiënten van x^{n+2s-2} in beide leden gelijk te kunnen stellen, in den eersten term van het tweede lid den veranderlijken aanwijzer s door $s-1$, dan geeft deze gelijkstelling de herleidingsformule

$$Q_{n.n+2s} = n^2\, Q_{n.n+2s-2} + Q_{n-2.n+2s-2}$$

voor de coëfficiënten Q. Ofschoon dus deze formule in verband met (β') even goed voor even als voor oneven waarden van n geldt, is echter voor even n de invoering van verkleinde getallencoëfficiënten Q' mogelijk en bij de toepassing verkieslijk. Stel namelijk dat in dat geval ieder dezer nieuwe coëfficiënten Q' met den gelijknamigen oorspronkelijken coëfficiënt Q zamenhangt volgens $Q_{n.n+2s} = 2^{2s}\, Q'_{n.n+2s}$ (waarin dus telkens de exponent van 2 gelijk is aan het verschil der beide aanwijzers van Q of Q'), dan kan men vooreerst de formule (β') bij vermenigvuldiging met 2^n schrijven onder den vorm

$$\frac{(2\sin x)^n}{n!} = \sum_0^\infty{}_s (-)^s\, Q'_{n\ n+2s} \frac{(2x)^{n+2s}}{(n+2s)!} \quad .\ .\ (\beta'')$$

en ten andere de daarin alsnu voorkomende coëfficiënten Q' uitrekenen door de herleidingsformule

$$Q'_{n\ n+2s} = \left(\frac{n}{2}\right)^2 Q'_{n.n+2s-2} + Q'_{n-2.n+2s-2}$$

komende door de drie termen van de evengevonden formule in Q opvolgend te deelen door de drie, ieder aan 2^{2s} gelijke, waarden $2^{(n+2s)-n}$, $2^2.2^{(n+2s-2)-n}$ en $2^{(n+2s-2)-(n-2)}$. In aansluiting nu aan de twee omschreven, oneven en even, stelsels, en in aanmerking nemende eensdeels dat in (β'') voor $n=1$ wegens

$$\frac{\sin^1 x}{1!} = \sum_0^\infty{}_s (-)^s \frac{x^{1+2s}}{(1+2s)!}$$

alle $Q_{1.1+2s} = 1$ en voor $s = 0$ alle $Q_{n.n} = 1$ bekend zijn, anderdeels dat in (β'') voor $n = 2$ wegens

$$\frac{(2 \sin x)^2}{2!} = 1 - \cos 2x = \sum_0^\infty (-)^s \frac{(2x)^{2+2s}}{(2+2s)!}$$

alle $Q'_{2.2+2s} = 1$ en voor $s = 0$ alle $Q'_{n.n} = 1$ evenzeer bekend zijn, verkrijgt men zonder moeite de beide onderstaande afzonderlijk voor oneven en voor even n dienstige tabellen:

Tabel der coëfficiënten $Q_{n.n+2s}$ van $\frac{x^{n+2s}}{(n+2s)!}$ in $(-)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin^n x}{n!}$ (voor oneven n).

	$\frac{x^1}{1!}$	$-\frac{x^3}{3!}$	$\frac{x^5}{5!}$	$-\frac{x^7}{7!}$	$\frac{x^9}{9!}$	$-\frac{x^{11}}{11!}$	enz.
$n = 1$	1	1	1	1	1	1	
$n = 3$		1	10	91	820	7381	
$n = 5$			1	35	966	24970	
$n = 7$				1	84	5082	
$n = 9$					1	165	
$n = 11$						1	
enz.							

Tabel der coëfficiënten $Q'_{n.n+2s}$ van $\frac{(2x)^{n+2s}}{(n+2s)!}$ in $(-)^{\frac{n}{2}-1}\frac{(2\sin x)^n}{n!}$ (voor even n).

	$\frac{(2x)^2}{2!}$	$-\frac{(2x)^4}{4!}$	$\frac{(2x)^6}{6!}$	$-\frac{(2x)^8}{8!}$	$\frac{(2x)^{10}}{10!}$	$-\frac{(2x)^{12}}{12!}$	enz.
$n = 2$	1	1	1	1	1	1	
$n = 4$		1	5	21	85	341	
$n = 6$			1	14	147	1408	
$n = 8$				1	30	627	
$n = 10$					1	55	
$n = 12$						1	
enz.							

in ieder van welke tabellen, evenals in de allereerste tabel, de ontwikkeling der aan het hoofd vermelde functie voor eenige waarde van n weder komt als algebraïsche som der producten van de door deze n aangewezen coëfficiëntenrij met de daarboven geplaatste termen in x.

Wat nu het gebruik betreft, dat wij van de voor $\sin^n x$ gevonden formulen (β), (β') en (β'') voor ons doel wenschen te maken, merken wij in de eerste plaats op dat men — in dit geval liever dan van $tg\frac{x}{2}$ — dadelijk van

$$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x(1-\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty}{}_n \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6......(2n)} \sin^{2n+1} x$$

zelf de ontwikkeling volgens de opklimmende oneven magten van $\sin x$ voor zich heeft; en daarbij blijkt voor den door $n = 0$ aangeduiden term niet alleen aan den noemer $2.4.6...(2n) = 2^n \,.\, n!$ van de vooropstaande breuk, krach-

tens het in den aanhef gezegde, maar evenzeer aan den onder den vorm $\frac{(-1).1.3.5\ldots(2n-1)}{-1}$ te beschouwen teller, en dus ook aan de breuk zelve, de eenheid tot waarde te moeten worden toegekend. Vult men nu in het eerste lid de waarde uitgedrukt in de tangenten-coëfficiënten in, en in het laatste lid voor de algemeene oneven magt van *sin x* de waarde die bij vervanging van n door $2n+1$ hetzij uit de eerste formule (β) hetzij uit de formule (β') komt, dan beschikt men over de dubbele gelijkheid

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{q}\frac{T_{2q-1}}{(2q)!}(2x)^{2q-1}=\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\left\{\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)}\cdot\frac{1}{2^{2n}}\right.$$

$$\left.\sum_{0}^{\infty}{}_{s}(-)^{s}\frac{x^{2n+2s+1}}{(2n+2s+1)!}\sum_{0}^{n}{}_{r}(-)^{r}\binom{2n+1}{r}(2n-2r+1)^{2n+2s+1}\right\}=$$

$$=\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\left\{\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)}\cdot(2n+1)!\right.$$

$$\left.\sum_{0}^{\infty}{}_{s}(-)^{s}\,Q_{2n+1\,.\,2n+2s+1}\frac{x^{2n+2s+1}}{(2n+2s+1)!}\right\}.$$

En nu is niets anders noodig dan, na in het tweede en het derde lid, om aldaar dezelfde magt x^{2q-1} als in het eerste lid op den voorgrond te kunnen brengen, $s=q-n-1$ genomen te hebben, de coëfficiënten van deze magt in de drie leden onderling gelijk te stellen, ten einde na vermenigvuldiging met $(-)^{q-1}(2q-1)!$ te kunnen besluiten tot déze dubbele formule, de eerste onafhankelijk, de tweede in de terugloopende coëfficiënten Q, voor den willekeurigen tangenten-coëfficiënt:

$$(-)^{q-1}\frac{2^{2q-2}}{q}T_{2q-1}=\sum_{0}^{q-1}{}_{n}\left\{(-)^{n}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)}\cdot\frac{1}{2^{2n}}\right.$$

$$\left.\sum_{0}^{n}{}_{r}(-)^{r}\binom{2n+1}{r}(2n-2r+1)^{2q-1}\right\}\;\ldots\;(3)$$

$$=\sum_{0}^{q-1}{}_{n}(-)^n\,(1.3.5\ldots(2n-1))^2(2n+1)\,Q_{2n+1.2q-1}\,;\,..(3')$$

zijnde hierin weder voor n de bovengrens van ∞ tot $q-1$ verlaagd kunnen worden, omdat in (3) het $(2n+1)^e$ verschil van de reeks der $(2q-1)^e$ magten van de opvolgende oneven getallen voor iedere $2n+1>2q-1$ van zelf verdwijnt, of, wat hetzelfde zegt, omdat de in (3′) aan eene zelfde kolom van de voorlaatste tabel te ontleenen coëfficiënten $Q_{2n+1.2q-1}$ blijkbaar komen te ontbreken zoodra ook hier $2n+1>2q-1$ zou zijn.

Ook de ontwikkeling

$$tg x=\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}=\frac{1-(1-\sin^2 2x)^{\frac{1}{2}}}{\sin 2x}=\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}\sin^{2n+1}2x$$

volgens de opklimmende oneven magten van $\sin 2x$ in plaats van $\sin x$ zelf kan geschikt tot een paar nagenoeg gelijkvormige formulen voor den algemeenen tangenten-coëfficiënt dienen. Past men hier namelijk geheel dezelfde bewerking toe, maar bovendien eene deeling door 2^{2q-2}, dan vindt men:

$$(-)^{q-1}\frac{T_{2q-1}}{q}=\sum_{0}^{q-1}{}_{n}\left\{(-)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}.\frac{1}{2^{2n-1}}\right.$$

$$\left.\sum_{0}^{n}{}_{r}(-)^r\binom{2n+1}{r}(2n-2r+1)^{2q-1}\right\}\,\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$=\sum_{0}^{q-1}{}_{n}(-)^n\frac{(1.3.5\ldots(2n-1))^2(2n+1)}{n+1}\,Q_{2n+1.2q-1}\,..(4')$$

En in plaats van de tangens zelf, kan men, en wat eenvoudigheid van uitkomst betreft nog met wel zoo goed gevolg, haar differentiaalquotient tot uitgang van berekening doen strekken: zelfs heeft men hier niet alleen weder geschikte ontwikkelingen in $\sin x$ zelf en in $\sin 2x$, maar bovendien in $\sin\frac{x}{2}$. Men kan toch schrijven — wat den tweeden

regel betreft door de laatst gevonden ontwikkeling van $tg\,x$ zelf te substitueren —

$$\frac{d\,tg\,x}{d\,x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{1-\sin^2 x}=\sum_0^\infty{}_n \sin^{2n} x \\[2ex] 2\,\dfrac{tg\,x}{\sin 2\,x}=2\sum_0^\infty{}_n \dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}\sin^{2n} 2\,x \\[2ex] \left(1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)^{-2}=\sum_0^\infty{}_n (n+1)2^n \sin^{2n}\dfrac{x}{2}\end{array}\right.$$

en heeft dus hier telkens met de opvolgende even magten van den sinus van x, of van $2\,x$, of van $\frac{x}{2}$, te doen. Alzoo geeft bij voorbeeld de eerste regel, door nu bij vervanging van n door $2n$ hetzij de tweede formule (β), hetzij de formule (β'') toe te passen — daarbij evenwel lettende dat de toepasselijkheid van beide deze formulen zelve eerst bij $n=2$, en dus na de gezegde vervanging eerst bij $n=1$ begint, en dat alzoo de noodzakelijkheid ontstaat in ieder der drie voor $\frac{d\,tg\,x}{d\,x}$ verkregen ontwikkelingen telkens den term voor $n=0$, dat is de eenheid, afzonderlijk op den voorgrond te brengen —

$$\sum_0^\infty{}_q \frac{2(2q-1)\,T_{2q-1}}{(2q)!}(2\,x)^{2q-2}=$$

$$=1+\sum_1^\infty{}_n\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_0^\infty{}_s(-)^s\frac{(2\,x)^{2n+2s}}{(2n+2s)!}\sum_0^{n-1}{}_r(-)^r\binom{2n}{r}(n-r)^{2n+2s}=$$

$$=1+\sum_1^\infty{}_n\frac{(2\,n)!}{2^{2n}}\sum_0^\infty{}_s(-)^s\,Q'_{2n.2n+2s}\frac{(2\,x)^{2n+2s}}{(2\,n+2\,s)!}.$$

En neemt men hier, ter onderlinge gelijkstelling der coëfficiënten van $(2\,x)^{2q-2}$, thans in het tweede en het derde

lid weder $s = q - n - 1$, dan verkrijgt men na vermenigvuldiging met $(-)^{q-1}(2q-2)!$ het stel:

$$(-)^{q-1}\frac{T_{2q-1}}{q} = \sum_{1}^{q-1}{}_{n}(-)^{n}\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{0}^{n-1}{}_{r}(-)^{r}\binom{2n}{r}(n-r)^{2q-2} \quad \ldots (5)$$

$$= \sum_{1}^{q-1}{}_{n}(-)^{n}\frac{(2n)!}{2^{2n}}Q'_{2n.2q-2}, \quad \ldots\ldots\ldots (5')$$

waarin ook nu, om reden als zoo even, voor n de bovengrens ∞ door $q-1$ vervangen mogt worden.

Op dezelfde wijze geeft de tweede regel aanleiding tot de dubbele formule:

$$(-)^{q-1}\frac{T_{2q-1}}{q} =$$

$$= \sum_{1}^{q-1}{}_{n}(-)^{n}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}2^{2(q-n)}\sum_{0}^{n-1}{}_{r}(-)^{r}\binom{2n}{r}(n-r)^{2q-2} \quad \ldots (6)$$

$$= \sum_{1}^{q-1}{}_{n}(-)^{n}\frac{(1.3.5\ldots(2n-1))^{2}}{2n+2}2^{2q-2n-1}Q'_{2n.2q-2} \quad \ldots (6')$$

En de derde regel tot de dubbele formule:

$$(-)^{q-1}\frac{2^{2q-2}}{q}T_{2q-1} = \sum_{1}^{q-1}{}_{n}(-)^{n}\frac{n+1}{2^{n-1}}\sum_{0}^{n-1}{}_{r}(-)^{r}\binom{2n}{r}(n-r)^{2q-2} \quad \ldots (7)$$

$$= \sum_{1}^{q-1}{}_{n}(-)^{n}\frac{(n+1)(2n)!}{2^{n}}Q'_{2n.2q-2} \quad \ldots (7')$$

Eenigzins meer zamengestelde formulen verkrijgt men door van het tweede differentiaalquotient van $tg\,x$ uit te gaan, hetgeen hier doelmatig onder den dubbelen vorm

$$\frac{d^2 tg x}{dx^2}=\frac{2 sin x}{cos^3 x}=\left\{\begin{array}{l} 2 sin x (1-sin^2 x)^{-\frac{3}{2}}=2\sum_0^\infty{}_n \frac{1.3.5...(2n+1)}{2.4.6.....(2n)} sin^{2n+1} x \\ 2^2\frac{(1-cos 2x)^2}{sin^3 2x}=2^2\frac{2-sin^2 2x-2(1-sin^2 2x)^{\frac{1}{2}}}{sin^3 2x}= \\ =2^3\sum_0^\infty{}_n \frac{1.3.5...(2n+1)}{2.4.6...(2n+4)} sin^{2n+1} 2x \end{array}\right.$$

kan geschieden, zoodat in beide deze gevallen de eerste formule (β) en de formule (β') voor de oneven sinusmagten weder aan de orde zijn. Men heeft nu, dezelfde handelwijze als tot nog toe volgende, déze bewerkingen: de twee evengenoemde formulen, na vervanging van n door $2n+1$ en in het tweede geval bovendien van x door $2x$, te substitueren; op te merken dat, al begint, evenals in de te vinden uitkomsten, in het in

$$\sum_0^\infty{}_q \frac{2^2(2q-1)(2q-2)\,T_{2q-1}}{(2q)!}(2x)^{2q-3}$$

overgaande eerste lid de feitelijke toepassing eerst bij $q=2$, het niet eens noodig is voor de ondergrens aldaar 2 in plaats van 0 te schrijven, wijl voor $q=0$ de factor T_{-1} en voor $q=1$ de factor $2q-2$ toch van zelf gelijk nul worden; voorts ten behoeve der gelijkstelling van de coëfficiënten van x^{2q-3} of van $(2x)^{2q-3}$ thans $s=q-n-2$ te nemen; eindelijk met $(-)^{q-1}(2q-3)!$ te vermenigvuldigen en voor n de thans geoorloofde verlaging der bovengrens van ∞ tot $q-2$ toe te passen. De uitkomsten zijn: in het eerste geval het stel

$$(-)^{q-1}\frac{2^{2q-2}}{q}T_{2q-1}=\sum_0^{q-2}{}_n\left\{(-)^{n-1}\frac{1.3.5...(2n+1)}{2.4.6.....(2n)}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}\right.$$

$$\left.\sum_0^n{}_r(-)^r\binom{2n+1}{r}(2n-2r+1)^{2q-3}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (8)$$

$$=2\sum_0^{q-2}{}_n(-)^{n-1}(1.3.5...(2n+1))^2\,Q_{2n+1\,.\,2q-3}, \quad .\ .\ (8')$$

en in het tweede geval het stel

$$(-)^{q-1}\,\frac{T_{2q-1}}{q}=\sum_0^{q-2}{}_n\left\{(-)^{n-1}\,\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+4)}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}\right.$$

$$\left.\sum_0^{n}{}_r(-)^r\binom{2n+1}{r}(2n-2r+1)^{2q-3}\right\}\ldots\ldots\ldots(9)$$

$$=2^3\sum_0^{q-2}{}_n(-)^{n-1}\frac{(1.3.5\ldots(2n+1))^2}{(2n+2)(2n+4)}\,Q_{2n+1.2q-3}.\ldots(9')$$

Wilde men in denzelfden trant met de hoogere differentiaalquotienten van $tg\,x$ voortgaan, dan zou men als volgt, om daarvoor de ontwikkelingen volgens de magten van $sin\,x$ te verkrijgen, weder geschikt van herleidingsformulen gebruik kunnen maken, die bovendien nagenoeg onveranderd voor de ontwikkeling volgens $sin\,2\,x$, en voor oneven differentiaalquotienten ook nog voor die volgens $sin\,\frac{x}{2}$ zouden kunnen dienen. Stel dat in het algemeen voor zekere p reeds gevonden is

$$\frac{d^p\,tg\,x}{d\,x^p}=\sum_0^{\infty}{}_n N_{p.n}\,sin^{2n+\alpha}\,x,$$

waarin de coëfficiënt $N_{p.n}$ dus eene bekende functie van den rangwijzer n is, terwijl voor oneven p steeds $\alpha=0$ en voor even p steeds $\alpha=1$ zal blijken te zijn, dan komt door tweemaal te differentiëren: $\frac{d^{p+2}\,tg\,x}{d\,x^{p+2}}$, dat is

$$\sum_0^{\infty}{}_n N_{p+2.n}\,sin^{2n+\alpha}\,x=\frac{d\sum_0^{\infty}{}_n(2n+\alpha)\,N_{p.n}\,sin^{2n+\alpha-1}\,x\cos x}{dx}=$$

$$=\sum_0^{\infty}{}_n(2n+\alpha)N_{p.n}\{(2n+\alpha-1)sin^{2n+\alpha-2}x(1-sin^2x)-sin^{2n+\alpha}x\}=$$

$$=\sum_0^{\infty}{}_n(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)\,N_{p.n}\,sin^{2n+\alpha-2}\,x-$$

$$-\sum_0^{\infty}{}_n(2n+\alpha)^2\,N_{p.n}\,sin^{2n+\alpha}\,x,$$

en dus door, in den eersten term van het laatste lid n vervangende door $n+1$, de coëfficiënten van $sin^{2n+\alpha} x$ in de beide uiterste leden gelijk te stellen:

$$N_{p+2.n} = (2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2) N_{p.n+1} - (2n+\alpha)^2 N_{p.n}.$$

Of afzonderlijk: voor oneven p, bij vervanging door $2p+1$,

$$N_{2p+3.n} = (2n+1)(2n+2) N_{2p+1.n+1} - (2n)^2 N_{2p+1.n};$$

en voor even p, bij vervanging door $2p$,

$$N_{2p+2.n} = (2n+2)(2n+3) N_{2p.n+1} - (2n+1)^2 N_{2p.n},$$

terwijl men in dit laatste geval nog doelmatig volgens

$$N_{2p.n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)} N'_{2p.n}$$

eenvoudiger functiën N' kan invoeren, waarvoor dan

$$N'_{2p+2.n} = (2n+1)\{(2n+3) N'_{2p.n+1} - (2n+1) N'_{2p.n}\}$$

wordt. Men heeft alzoo in het algemeen de twee typen

$$\frac{d^{2p+1}\, tg\, x}{dx^{2p+1}} = \sum_{0}^{\infty}{}_{n}\, N_{2p+1.n} \sin^{2n} x$$

en

$$\frac{d^{2p}\, tg\, x}{dx^{2p}} = \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)} N'_{2p.n} \sin^{2n+1} x,$$

en verkrijgt hiervoor, uitgaande voor $p=0$ van de boven voor $tg\, x$ zelf en voor $\frac{d\, tg\, x}{dx}$ opgemaakte ontwikkelingen volgens $sin\, x$, dat is van $N'_{0.n} = 1$ voor de tweede en van $N_{1.n} = 1$ voor de eerste type, en verder beurtelings de evengevonden herleidingsformulen voor de functiën $N'_{2p+2.n}$ en $N_{2p+3.n}$ toepassende:

$N'_{2.n} = 2(2n+1)$ (in overeenstemming naar behooren met de boven reeds regtstreeks voor $\frac{d^2\, tg\, x}{dx^2}$ berekende waarde),

$$N_{3.n} = 2(3n+1),\quad N'_{4.n} = 16(2n+1)(n+1),$$
$$N_{5.n} = 4(15n^2+15n+4),\quad N'_{6.n} = 16(2n+1)(12n^2+28n+17),$$
$$N_{7.n} = 8(105n^3+210n^2+147n+34),\ \text{enz.}$$

Deze functiën blijken dus al spoedig zamengesteld te worden en ieder voor zich geene in het oog loopende wet te volgen; en juist daardoor zou het voordeel, dat bij aanwending der klimmende differentiaalquotienten van $tg\,x$ de komende formulen voor den algemeenen tangenten-coëfficiënt steeds uit minder termen in n zouden bestaan en bovendien in ieder dezer termen steeds lager magten zouden bevatten, meer dan te niet gedaan worden. Wij gaan dan ook op dezen weg niet verder voort, behoudens alleen de vermelding dat uit het betrekkelijk nog eenvoudige derde quotient, namelijk

$$\frac{d^3\,tg\,x}{d\,x^3} = \sum_0^\infty {}_n N_{3.n}\, sin^{2n}\, x = 2\sum_0^\infty {}_n (3n+1)\, sin^{2n}\, x,$$

wanneer men daarop dezelfde handelwijze als voor de vorigen toepast, te voorschijn komt het stel formulen (waarvan de toepassing nu echter eerst met $q = 3$ begint):

$$(-)^{q-1}\frac{T_{2q-1}}{q} = \sum_1^{q-2} {}_n (-)^{n-1}\frac{3n+1}{2^{2n}}\sum_0^{n-1} {}_r (-)^r \binom{2n}{r}(n-r)^{2q-4} \ldots (10)$$

$$= \sum_1^{q-2} {}_n (-)^{n-1}\frac{(3n+1)(2n)!}{2^{2n+1}}\, Q'_{2n.2q-4} \ldots (10')$$

Zooals zich na het vorenstaande wel verwachten laat, bestaan de uit integratie in plaats van differentiatie af te leiden formulen weder uit meer termen in n. Ook ten deze zullen wij ons bekorten, en alleen de dubbele uitgangsformule:

$$\int tg\,x\,dx = -Nep.log.cos\,x = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}Nep.log.(1-sin^2 x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_1^\infty {}_n \frac{sin^{2n} x}{n} \\ -Nep.log.\left(1-2sin^2\dfrac{x}{2}\right) = \displaystyle\sum_1^\infty {}_n \frac{2^n}{n} sin^{2n}\frac{x}{2} \end{cases}$$

en het daaruit voortkomende dubbele stel:

$$(-)^{q-1}\frac{T_{2q-1}}{q}=\sum_{1}^{q}{}_{n}(-)^{n-1}\frac{1}{n.2^{2n-2}}\sum_{0}^{n-1}{}_{r}(-)^{r}\binom{2n}{r}(n-r)^{2q}\,..(11)$$

$$=\sum_{1}^{q}{}_{n}(-)^{n-1}\frac{(2n)!}{n.2^{2n-1}}Q'_{2n.2q}\;\ldots\ldots\ldots\;(11')$$

en

$$(-)^{q-1}\frac{2^{2q-2}}{q}T_{2q-1}=\sum_{1}^{q}{}_{n}(-)^{n-1}\frac{1}{n.2^{n-1}}\sum_{0}^{n-1}{}_{r}(-)^{r}\binom{2n}{r}(n-r)^{2q}\,..(12)$$

$$=\sum_{1}^{q}{}_{n}(-)^{n-1}\frac{(2n)!}{n\,.\,2^{n}}Q'_{2n.2q}\;\ldots\ldots\;(12')$$

neêrschrijven.

Om door een bepaald voorbeeld de meerdere of mindere eenvoudigheid van alle voor de tangenten-coëfficiënten verkregen formulen duidelijk in het oog te doen vallen, plaatsen wij ten besluite van deze afdeeling de voluit geschreven vormen bijeen die zij ieder voor zich voor $q=4$, dat is voor den vierden coëfficiënt T_7, opleveren. Men verkrijgt daarvoor opvolgend:

door de formule van Laplace:

$$-\frac{2^6}{4}T_7=2\left\{1-\left(2^7-\binom{8}{1}\right)+\left(3^7-\binom{8}{1}2^7+\binom{8}{2}\right)\right\}-$$
$$-\left(4^7-\binom{8}{1}3^7+\binom{8}{2}2^7-\binom{8}{3}\right)\;\ldots\ldots\;(1)$$

en verder:

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{2^6}{4}T_7=2^6-2^5\left(2^7-\binom{2}{1}\right)+2^4\left(3^7-\binom{3}{1}2^7+\right.\\ \left.+\binom{3}{2}\right)-2^3\left(4^7-\binom{4}{1}3^7+\binom{4}{2}2^7-\binom{4}{3}\right)+2^2\left(5^7-\binom{5}{1}4^7+\right.\\ \left.+\binom{5}{2}3^7-\binom{5}{3}2^7+\binom{5}{4}\right)-2\left(6^7-\binom{6}{1}5^7+\binom{6}{2}4^7-\binom{6}{3}3^7+\right.\end{array}\right\}..(2)$$

$$\left.\begin{aligned}
&+\binom{6}{4}2^7-\binom{6}{5}\Big)+\Big(7^7-\binom{7}{1}6^7+\binom{7}{2}5^7-\binom{7}{3}4^7+\\
&+\binom{7}{4}3^7-\binom{7}{5}2^7+\binom{7}{6}\Big)\Big)=\\
&=2^6.1-2^5.2(2^6-1)+2^4.3\left(3^6-\binom{2}{1}2^6+1\right)-\\
&-2^3.4\left(4^6-\binom{3}{1}3^6+\binom{3}{2}2^6-1\right)+2^2.5\Big(5^6-\binom{4}{1}4^6+\\
&+\binom{4}{2}3^6-\binom{4}{3}2^6+1\Big)-2.6\Big(6^6-\binom{5}{1}5^6+\binom{5}{2}4^6-\binom{5}{3}3^6+\\
&+\binom{5}{4}2^6-1\Big)+1.7\Big(7^6-\binom{6}{1}6^6+\binom{6}{2}5^6-\binom{6}{3}4^6+\\
&+\binom{6}{4}3^6-\binom{6}{5}2^6+1\Big)
\end{aligned}\right\}\ldots(2)$$

$$\begin{aligned}
&=2^6.1!1-2^5.2!63+2^4.3!301-2^3.4!350+\\
&\quad+2^2.5!140-2.6!21+1.7!1\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{2^6}{4}T_7 &= 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{3^7-\binom{3}{1}}{2^2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{5^7-\binom{5}{1}3^7+\binom{5}{2}}{2^4}-\\
&\quad-\frac{1}{2}\frac{.3.5}{4.6}\cdot\frac{7^7-\binom{7}{1}5^7+\binom{7}{2}3^7-\binom{7}{3}}{2^6}\ \ldots\ (3)
\end{aligned}$$

$$=1.1-1^2.3.91+(1.3)^2.5.35-(1.3.5)^2.7.1\,..\,(3')$$

$$\begin{aligned}
-\frac{T_7}{4} &= \frac{1}{2}.2-\frac{1}{2.4}\cdot\frac{3^7-\binom{3}{1}}{2}+\frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{5^7-\binom{5}{1}3^7+\binom{5}{2}}{2^3}-\\
&\quad-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{7^7-\binom{7}{1}5^7+\binom{7}{2}3^7-\binom{7}{3}}{2^5}\ \ldots\ (4)
\end{aligned}$$

$$=1.1-\frac{1^2.3}{2}.91+\frac{(1.3)^2.5}{3}.35-\frac{(1.3.5)^2.7}{4}.1\,..\,(4')$$

$$-\frac{T_7}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{2^6 - \binom{4}{1}}{2^3} - \frac{3^6 - \binom{6}{1}2^6 + \binom{6}{2}}{2^5} \ldots \ldots (5)$$

$$= -\frac{2!}{2^2}.1 + \frac{4!}{2^4}.5 - \frac{6!}{2^6}.1 \ldots\ldots\ldots\ldots (5')$$

$$-\frac{T_7}{4} = -\frac{1}{2.4}2^6 + \frac{1.3}{2.4.6}2^4\left(2^6 - \binom{4}{1}\right) -$$

$$-\frac{1.3.5}{2.4\,6.8}2^2\left(3^6 - \binom{6}{1}2^6 + \binom{6}{2}\right) \ldots\ldots (6)$$

$$= -\frac{1^2}{4}2^5.1 + \frac{(1.3)^2}{6}2^3.5 - \frac{(1.3.5)^2}{8}2.1 \ldots (6')$$

$$-\frac{2^6}{4}T_7 = -2 + 3.\frac{2^6 - \binom{4}{1}}{2} - 4.\frac{3^6 - \binom{6}{1}2^6 + \binom{6}{2}}{2^2} \ldots (7)$$

$$= -\frac{2.2!}{2}.1 + \frac{3.4!}{2^2}.5 - \frac{4.6!}{2^3}.1 \ldots\ldots\ldots (7')$$

$$-\frac{2^6}{4}T_7 = -2 + \frac{1.3}{2}.\frac{3^5 - \binom{3}{1}}{2} - \frac{1.3.5}{2.4}.\frac{5^5 - \binom{5}{1}3^5 + \binom{5}{2}}{2^3} \ldots (8)$$

$$= 2\{-1^2.1 + (1.3)^2.10 - (1.3.5)^2.1\} \ldots\ldots (8')$$

$$-\frac{T_7}{4} = -\frac{1}{2.4}2^2 + \frac{1.3}{2.4.6}\left(3^5 - \binom{3}{1}\right) -$$

$$-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}.\frac{5^5 - \binom{5}{1}3^5 + \binom{5}{2}}{2^2} \ldots\ldots (9)$$

$$= 2^2\left\{-\frac{1^2}{2.4}.1 + \frac{(1.3)^2}{4.6}.10 - \frac{(1.3.5)^2}{6.8}.1\right\} \ldots (9')$$

$$-\frac{T_7}{4}=\frac{4}{2^2}-7.\frac{2^4-\binom{4}{1}}{2^4}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$=\frac{4.2!}{2^3}.\mathbf{1}-\frac{7.4!}{2^5}.\mathbf{1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10')$$

$$-\frac{T_7}{4}=\frac{1}{1}-\frac{2^8-\binom{4}{1}}{2.2^2}+\frac{3^8-\binom{6}{1}2^8+\binom{6}{2}}{3.2^4}-$$

$$-\frac{4^8-\binom{8}{1}3^8+\binom{8}{2}2^8-\binom{8}{3}}{4.2^6}\ldots\ldots \quad (11)$$

$$=\frac{2!}{1.2}.\mathbf{1}-\frac{4!}{2.2^3}.\mathbf{21}+\frac{6!}{3.2^5}.\mathbf{14}-\frac{8!}{4.2^7}.\mathbf{1}..(11')$$

$$-\frac{2^6}{4}T_7=\frac{1}{1}-\frac{2^8-\binom{4}{1}}{2.2}+\frac{3^8-\binom{6}{1}2^8+\binom{6}{2}}{3.2^2}-$$

$$-\frac{4^8-\binom{8}{1}3^8+\binom{8}{2}2^8-\binom{8}{3}}{4.2^3}\ldots\ldots \quad (12)$$

$$=\frac{2!}{1.2}.\mathbf{1}-\frac{4!}{2.2^2}.\mathbf{21}+\frac{6!}{3.2^3}.\mathbf{14}-\frac{8!}{4.2^4}.\mathbf{1}..(12')$$

Terwijl alle formulen van dit overzigt — waarin de zooals gezegd telkens gezamenlijke aan eene zelfde kolom van onze tweede of derde of vierde tabel ontleende coëfficiënten P of Q of Q' ter onderscheiding vetter gedrukt zijn — werkelijk in de gemeenschappelijke uitkomst $T_7 = 17$ zamenvallen, ziet men hoezeer de dubbele formule (10) (10′) het van alle overigen wint én in minder aantal termen of coëfficiënten Q' én in lagere in die termen voorkomende magten. Toch neemt dit niet weg dat, wanneer de bedoeling is eenige opvolgende tangenten-coëfficiënten, te begin-

nen met den eersten, feitelijk uit te rekenen, dit wel in den regel eenvoudiger dan door de hier behandelde zelfstandige formulen zal gelukken bij voorbeeld door periodieke terugloopende formulen zooals ik in mijne vroegere bijdrage ontwikkelde. Steunende op blz. 125 van die bijdrage haal ik daarvan als enkele beknopte voorbeelden voor de periode 3 aan (wat dit betreft in Bernoulliaanschen in plaats van in tangenten-vorm):

$$\binom{15}{0} B_{-1} - \binom{15}{6} B_5 + \binom{15}{12} B_{11} = -\frac{15}{3},$$
$$\binom{17}{2} B_1 - \binom{17}{8} B_7 + \binom{17}{14} B_{13} = \frac{17}{3},$$
$$\binom{19}{4} B_3 - \binom{19}{10} B_9 + \binom{19}{16} B_{15} = \frac{1}{2}.\frac{19}{3},$$

die dus opvolgend kunnen dienen om, nadat langs denzelfden weg eerst B_{-1} of B_1 of B_3, en daarna B_5 of B_7 of B_9 berekend zijn, thans ook B_{11} of B_{13} of B_{15} te bepalen.

Op blz. 113—116 van mijne vroegere bijdrage gaf ik ook eene afleiding van de beide door M. A. Stern gevonden afgebroken terugloopende betrekkingen tusschen de Bernoulliaansche coëfficiënten. Thans ga ik hier evenzeer dergelijke afgebroken — dat wil zeggen, niet over alle, maar slechts over eenige onmiddellijk voorafgaande coëfficiënten terugloopende — betrekkingen, ofschoon van eenigzins anderen vorm, ontwikkelen; deze zullen dan ook blijken, eenvoudiger weder dan in de Bernoulliaansche, in de tangenten-coëfficiënten te worden uitgedrukt, of liever nog in andere coëfficiënten die met deze laatsten onmiddellijk zamenhangen. Als uitgangspunt van berekening zal hiertoe eene formule voor eene willekeurige magt van $tg\frac{x}{2}$ in func-

tie van de differentiaalquotienten dezer tangens worden opgemaakt.

Stellende kortheidshalve $t = tg\,\frac{x}{2}$, heeft men voor de eerste differentiaalquotienten, uitgedrukt in t zelf,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{t^2+1}{2},$$

dus

$$\frac{d^2t}{dx^2} = t\frac{dt}{dx} = \frac{t^3+t}{2},\ \frac{d^3t}{dx^3} = \frac{3t^2+1}{2}\frac{dt}{dx} = \frac{3t^4+4t^2+1}{4},$$

enz., waaruit bij omkeering volgt

$$0!\,t = t,\ 1!\,t^2 = 2\frac{dt}{dx} - 1,\ 2!\,t^3 = 2\left(2\frac{d^2t}{dx^2} - t\right),$$

$$3!\,t^4 = 2\left(4\frac{d^3t}{dx^3} - 8\frac{dt}{dx} + 3\right),\ \text{enz.};$$

en het blijkt al spoedig dat men wel geregtigd is in het algemeen de beide vormen

$$(p-1)!\,t^p = \left\{\begin{array}{l} \text{(voor oneven } p) \\ \sum_0^{\frac{p-1}{2}} {}_r\, (-)^r A_{p.2r} \frac{d^{p-2r-1}t}{dx^{p-2r-1}}, \\ \text{(voor even } p) \\ \sum_0^{\frac{p}{2}-1} {}_r\, (-)^r A_{p.2r} \frac{d^{p-2r-1}t}{dx^{p-2r-1}} + (-)^{\frac{p}{2}} A_{p.p} \end{array}\right\} \ldots(\gamma)$$

op te stellen, die men voor de nu volgende terugloopende bepaling der coëfficiënten A zelfs zonder bezwaar onder den eersten vorm kan zamenvatten, mits dan voor even p de bovengrens aldaar door $\frac{p}{2}$ vervangende en er bovendien

op bedacht blijvende dat in dat geval in den laatsten, door $r = \frac{p}{2}$ bepaalden, term, in plaats van $\frac{d^{p-2r-1}t}{dx^{p-2r-1}}$, wat zou worden $\frac{d^{-1}t}{dx^{-1}}$, dat is $\int t\,dx$, als uitzondering op den regel moet gelezen worden de eenheid. Onder dien gemeenschappelijken eersten vorm dan komt door het dubbel van het differentiaalquotient naar x te nemen:

$$p!\,t^{p-1}(t^2+1),$$

dat is

$$p!\,t^{p+1} + (p-1)p\,\{(p-2)!\,t^{p-1}\},$$

dat is

$$\sum_{0}^{\frac{p+1}{2}\text{ of }\frac{p}{2}} r\,(-)^r A_{p+1.2r}\frac{d^{p-2r}t}{dx^{p-2r}} + (p-1)p\sum_{0}^{\frac{p-1}{2}\text{ of }\frac{p}{2}-1} r\,(-)^r A_{p-1.2r}\frac{d^{p-2r-2}t}{dx^{p-2r-2}} =$$

$$= 2\sum_{0}^{\frac{p-1}{2}\text{ of }\frac{p}{2}} r\,(-)^r A_{p.2r}\frac{d^{p-2r}t}{dx^{p-2r}},$$

waaruit men, na in den tweeden term van het eerste lid den veranderlijken aanwijzer r vervangen te hebben door $r-1$ en dus dien term zelf door

$$-(p-1)p\sum_{1}^{\frac{p+1}{2}\text{ of }\frac{p}{2}} r\,(-)^r A_{p-1.2r-2}\frac{d^{p-2r}t}{dx^{p-2r}},$$

vindt, door alsdan de coëfficiënten van $\frac{d^{p-2r}t}{dx^{p-2r}}$ in beide leden gelijk te stellen, de algemeene herleidingsformule

$$A_{p+1.2r} = 2\,A_{p.2r} + (p-1)p\,A_{p-1.2r-2}$$

voor de coëfficiënten A. Echter valt — de evengezegde vervanging van den tweeden term in het oog blijvende houden — bij het toepassen van deze formule het volgende

wel op te merken: 1°. (zoowel voor oneven als voor even p) Voor $r = 0$ geldt, wegens het ontbreken van dezen term in den nieuwen tweeden term, $A_{p+1.0} = 2\, A_{p.0}$. 2°. (voor oneven p) Voor $r = 1$ tot en met $\frac{p-1}{2}$ geldt de algemeene formule; voor $r = \frac{p+1}{2}$ geldt, wegens het ontbreken van dezen term in het tweede lid, $A_{p+1.p+1} = (p-1)\, p\, A_{p-1.p-1}$. 3°. (voor even p) Voor $r = 1$ tot en met $\frac{p}{2} - 1$ geldt de algemeene formule; voor $r = \frac{p}{2}$ zou zij eveneens schijnen te gelden, maar juist dan moet de bijbehoorende term in het tweede lid, dat is het dubbel van het differentiaalquotient van den laatsten term in (γ), die volgens het evengezegde niet is $(-)^{\frac{p}{2}} A_{p.p} \frac{d^{-1} t}{d x^{-1}}$, maar alleen de standvastige $(-)^{\frac{p}{2}} A_{p.p}$, door nul vervangen worden, zoodat nu als uitzonderingsformule geldt $A_{p+1.p} = (p-1)\, p\, A_{p-1.p-2}$. Dit een en ander strekt tot grondslag van de volgende

Tabel der coëfficiënten $A_{p.2r}$ van $(-)^r \frac{d^{p-2r-1} t}{d x^{p-2r-1}}$ in $(p-1)!\, t^p$.

$p = 1$	(2; 1.2) {1}
$p = 2$	(2; 2.3) {2, (1)}
$p = 3$	(2; 3.4) {2 (2, 1)}
$p = 4$	(2; 4.5) {2 (4, 8, (3))}
$p = 5$	(2; 5.6) {8 (2, 10, 3)}
$p = 6$	(2; 6.7) {8 (4, 40, 46, (15))}
$p = 7$	(2; 7.8) {16 (4, 70, 196, 45)}
$p = 8$	(2; 8.9) {16 (8, 224, 1232, 1056, (315))}
$p = 9$	(2; 9.10) {128 (2, 84, 798, 1636, 315)}
enz.	

waarin namelijk telkens de tusschen { } geplaatste coëffi-

ciëntenrij voor $(p-1)!\,t^p$ — zijnde de met $p=3$ te beginnen gemeenschappelijke factor 2, 2, 8, 8, 16, 16, 128, enz. dezer rij telkens daarbinnen op den voorgrond gebragt — gevonden is door de overeenkomstige coëfficiëntenrij voor $(p-2)!\,t^{p-1}$ op den voorgaanden regel (met weglating evenwel, telkens als p oneven is, van den laatsten coëfficiënt daarvan, die om die reden tusschen ( ) geplaatst is) te vermenigvuldigen met den eersten der beide vóór dien regel bijgeschreven factoren, namelijk 2, en de overeenkomstige coëfficiëntenrij voor $(p-3)!\,t^{p-2}$ op den laatstvoorgaanden regel (steeds zonder uitzondering in haar geheel) met den tweeden der beide factoren vóór dien regel, namelijk $(p-2)(p-1)$, en door dan deze laatste uitkomst, ééne plaats naar regts verspringende, op te tellen bij de eerste. Zoo heeft men bij voorbeeld voor $p=6$ de coëfficiëntenrij in

$$5!\,t^6 = 8\left(4\frac{d^5\,t}{d\,x^5} - 40\frac{d^3\,t}{d\,x^3} + 46\frac{d\,t}{d\,x} - 15\right)$$

door

$$\{8\,(4,40,46,15)\} = 2\,\{8\,(2,10,3)\} + 4.5\,\{2\,(0,4,8,3)\}$$

te nemen, zijnde hier in den laatsten term de nul voorgevoegd ter aanduiding van de evenbedoelde verspringing; daarentegen voor $p=7$ de coëfficiëntenrij in

$$6!\,t^7 = 16\left(4\frac{d^6\,t}{d\,x^6} - 70\frac{d^4\,t}{d\,x^4} + 196\frac{d^2\,t}{d\,x^2} - 45\,t\right)$$

door

$$\{16\ (4,\ 70,\ 196,\ 45)\} = 2\ \{8\ (4,\ 40,\ 46,\ \not{15})\} +$$
$$+\ 5.6\ \{8\ (0,\ 2,\ 10,\ 3)\}$$

te nemen, alwaar nu de niet in rekening mogende komen coëfficiënt 15 is doorgestreept, terwijl in den laatsten term weder als zoo even eene nul is voorgevoegd.

Hiermede de voorgenomen ontwikkeling zelve van $(p-1)!\,t^p$ volgens (γ) genoegzaam toegelicht achtende, maken wij

daarvan voor ons doel nu verder als volgt gebruik. Wij voeren in plaats van de tangenten-coëfficiënten T liever andere coëfficiënten T' in, daarmede telkens op de eenvoudige wijze $T'_{2q-1} = \frac{T_{2q-1}}{2q}$ zamenhangende; daardoor laat zich schrijven

$$t = tg\frac{x}{2} = \sum_0^\infty {}_q \frac{T_{2q-1}}{(2q)!} x^{2q-1} = \sum_1^\infty {}_q \frac{T'_{2q-1}}{(2q-1)!} x^{2q-1},$$

waarin namelijk tegelijkertijd de vooropstaande, door $q = 0$ bepaalde, term, die toch op zich zelf gelijk nul is, is weggelaten. Hieruit volgt in het algemeen

$$\frac{d^{p-2r-1}\, t}{d\, x^{p-2r-1}} = \sum^\infty {}_q \frac{T'_{2q-1}}{(2q-p+2r)!} x^{2q-p+2r},$$

waarin telkens de ondergrens voor q bepaald wordt doordien dit differentiaalquotient blijkbaar geene negatieve magten van x kan bevatten, zoodat

$$2q - p + 2r \geqq 0 = \begin{cases} (\text{voor oneven } p)\ 2s+1 \\ (\text{voor even } p)\ 2s \end{cases}$$

moet zijn en men alzoo ook kan schrijven

$$\frac{d^{p-2r-1}\, t}{d\, x^{p-2r-1}} = \begin{cases} (\text{voor oneven } p) \sum_0^\infty {}_s \frac{T'_{p-2r+2s}}{(2s+1)!} x^{2s+1} \\ (\text{voor even } p) \quad \sum_0^\infty {}_s \frac{T'_{p-2r+2s-1}}{(2s)!} x^{2s} \end{cases}.$$

Deze waarden substituerende in het tweede lid van (γ), en tevens het eerste lid regtstreeks ontwikkelende in x volgens

$$(p-1)!\left(tg\frac{x}{2}\right)^p = (p-1)!\left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + \text{enz.}\right)^p =$$
$$= (p-1)!\left(\frac{x^p}{2^p} + p\frac{x^{p-1}}{2^{p-1}}\cdot\frac{x^3}{24} + \text{enz.}\right),$$

(waarin wij de meer zamengestelde hoogere termen niet verder uitwerken), verkrijgen wij:

$$\frac{(p-1)!}{2^p}x^p + \frac{p!}{3.2^{p+2}}x^{p+2} + \text{enz.} = \begin{cases} (\text{voor oneven } p) \sum_0^{\frac{p-1}{2}}{}_r \left\{(-)^r A_{p.2r} \sum_0^{\infty}{}_s \frac{T'_{p-2r+2s}}{(2s+1)!} x^{2s+1}\right\}, \\ (\text{voor even } p) \sum_0^{\frac{p}{2}-1}{}_r \left\{(-)^r A_{p.2r} \sum_0^{\infty}{}_s \frac{T'_{p-2r+2s-1}}{(2s)!} x^{2s}\right\} + (-)^{\frac{p}{2}} A_{p.p}. \end{cases}$$

En stelt men nu in het tweede lid de coëfficiënten van alle, in het eerste lid ontbrekende, lagere magten dan x^p gelijk nul, en de coëfficiënten van x^p zelf, van x^{p+2}, enz., gelijk aan die in het eerste lid, dan heeft men de afgebroken terugloopende betrekkingen, die wij ons voorstelden tusschen de coëfficiënten T' op te maken, namelijk vooreerst:

$$(\text{voor oneven } p) \sum_0^{\frac{p-1}{2}}{}_r (-)^r A_{p.2r}\, T'_{p-2r+2s} = 0 \left(\text{voor } s=0 \text{ tot } \tfrac{p-3}{2}\right),$$

$$(\text{voor even } p) \sum_0^{\frac{p}{2}-1}{}_r (-)^r A_{p.2r}\, T'_{p-2r-1} + (-)^{\frac{p}{2}} A_{p.p} = 0$$

$$\text{en} \sum_0^{\frac{p}{2}-1}{}_r (-)^r A_{p.2r}\, T'_{p-2r+2s-1} = 0 \left(\text{voor } s=1 \text{ tot } \tfrac{p}{2}-1\right),$$

en verder:

(voor oneven en voor even p)

$$\sum_{0}^{\frac{p-1}{2} \text{ of } \frac{p}{2}-1} {}_r (-)^r A_{p.2r} T'_{2p-2r-1} = \frac{(p-1)!\,p!}{2^p},$$

$$\sum_{0}^{\frac{p-1}{2} \text{ of } \frac{p}{2}-1} {}_r (-)^r A_{p.2r} T'_{2p-2r+1} = \frac{p!\,(p+2)!}{3.2^{p+2}}$$

enz.

Bij voorbeeld voor $p = 6$ geldt het stelsel:

$$4\,T'_5 - 40\,T'_3 + 46\,T'_1 - 15 = 0$$
$$4\,T'_7 - 40\,T'_5 + 46\,T'_3 = 0$$
$$4\,T'_9 - 40\,T'_7 + 46\,T'_5 = 0$$
$$8\,(4\,T'_{11} - 40\,T'_9 + 46\,T'_7) = \frac{5!\,6!}{2^6}$$
$$8\,(4\,T'_{13} - 40\,T'_{11} + 46\,T'_9) = \frac{6!\,8!}{3.2^8}$$

enz.

En voor $p = 7$ het stelsel:

$$4\,T'_7 - 70\,T'_5 + 196\,T'_3 - 45\,T'_1 = 0$$
$$4\,T'_9 - 70\,T'_7 + 196\,T'_5 - 45\,T'_3 = 0$$
$$4\,T'_{11} - 70\,T'_9 + 196\,T'_7 - 45\,T'_5 = 0$$
$$16\,(4\,T'_{13} - 70\,T'_{11} + 196\,T'_9 - 45\,T'_7) = \frac{6!\,7!}{2^7}$$
$$16\,(4\,T'_{15} - 70\,T'_{13} + 196\,T'_{11} - 45\,T'_9) = \frac{7!\,9!}{3.2^9}$$

enz.

Deze afgebroken betrekkingen onderscheiden zich in hoofdzaak hierin van die volgens STERN, dat telkens dezelfde getallencoëfficiënten A — voor $p = 6$ namelijk 8 (4, 40, 46, (15)), voor $p = 7$ evenzeer 16 (4, 70, 196, 45), enz. — van toepassing blijven op de verschillende groepen van $\frac{p+1}{2}$ of $\frac{p}{2}$ opvolgende coëfficiënten T'. En daar bovendien het aantal $\frac{p-1}{2}$ of $\frac{p}{2}$ onderling onafhankelijke ver-

houdingen dezer getallencoëfficiënten telkens juist gelijk is aan het aantal van diegene der betrekkingen waarin zij voorkomen, wier tweede lid gelijk nul is, zijn dan ook deze hier regtstreeks opgemaakte getallencoëfficiënten A de eenige mogelijke die eene dergelijke gemeenschappelijke toepassing bij de verschillende groepen van opvolgende T' kunnen vinden. Bij STERN daarentegen treden in het algemeen bij iedere andere groep van opvolgende Bernoulliaansche coëfficiënten ook andere getallencoëfficiënten op. Hiertegenover staat echter, dat deze in den regel kleiner waarden hebben dan in ons geval de overeenkomstige getallencoëfficiënten A. Om dit te doen uitkomen brengen wij het volgende stelsel van meest eenvoudige afgebroken betrekkingen — ten minste indien men zich tot diegenen bepaalt die nul tot tweede lid hebben — ter berekening der opvolgende coëfficiënten T' uit elkander, namelijk:

$$2\,T'_1 - 1 = 0,$$
$$2\,T'_3 - T'_1 = 0,$$
$$4(T'_5 - 2\,T'_3) = 0,$$
$$2\,T'_7 - 10\,T'_5 + 3\,T'_3 = 0,$$
$$2(2\,T'_9 - 20\,T'_7 + 23\,T'_5) = 0,$$
$$4\,T'_{11} - 70\,T'_9 + 196\,T'_7 - 45\,T'_5 = 0,$$
$$8(T'_{13} - 28\,T'_{11} + 154\,T'_9 - 132\,T'_7) = 0,$$
$$2\,T'_{15} - 84\,T'_{13} + 798\,T'_{11} - 1636\,T'_9 + 315\,T'_7 = 0,$$

enz.,

in vergelijking met het overeenkomstige stelsel dat men uit de beide betrekkingen van STERN verkrijgt wanneer men deze toepast op het geval waarin zij ieder het geringste aantal termen bevatten. Dit geval is dát waarin men in die betrekkingen (zie mijne vroegere bijdrage, blz. 115 onder en 116 midden) neemt $k = q$, waardoor zij worden

$$\sum_{1}^{q} r\,(-)^{r-1}\left\{\binom{q+2}{2r} - \binom{q}{2r}\right\} B_{2q-2r+1} = \begin{cases} (\text{voor } q = 1)\ \frac{1}{2} \\ (\text{voor } q > 1)\ 0 \end{cases}$$

en

$$\sum_{1}^{q} r\,(-)^{r-1}\left\{\binom{q+1}{2r-1} + \binom{q}{2r-1}\right\} B_{2q-2r+1} = \begin{cases} (\text{voor } q = 1)\ \frac{1}{2} \\ (\text{voor } q > 1)\ 0 \end{cases}$$

en bijgevolg, omdat zoowel

$$\binom{q+2}{2r} - \binom{q}{2r} =$$

$$= \frac{q!}{(2r)!(q-2r+2)!}\{(q+1)(q+2)-((q+1)-2r)((q+2)-2r)\} =$$

$$= (2q-2r+3)\frac{q!}{(2r-1)!(q-2r+2)!}$$

als ook

$$\binom{q+1}{2r-1} + \binom{q}{2r-1} =$$

$$= \frac{q!}{(2r-1)!(q-2r+2)!}\{(q+1)+(q-2r+2)\} =$$

$$= (2q-2r+3)\frac{q!}{(2r-1)!(q-2r+2)!}$$

is, zamenvallen, als men nog r door $r+1$ vervangt, in den gemeenschappelijken vorm

$$\sum_{0}^{\frac{q-1}{2}\text{ of }\frac{q}{2}} {}_r (-)^r \frac{2q-2r+1}{2r+1}\binom{q}{2r} B_{2q-2r-1} = \begin{Bmatrix} (\text{voor } q=1)\ \frac{1}{2} \\ (\text{voor } q>1)\ 0 \end{Bmatrix},$$

zijnde hierin tegelijkertijd voor r de bovengrens verlaagd tot het bedrag voortvloeijende uit het nul worden van den binomiaalcoëfficiënt $\binom{q}{2r}$ zoodra $2r > q$ zou zijn. En deze vorm geeft nu, door achtervolgens $q = 1, 2, 3$, enz. te nemen, het bedoelde stelsel:

$$\begin{aligned}
&3B_1 = \frac{1}{2},\\
&5B_3 - B_1 = 0,\\
&7B_5 - 5B_3 = 0,\\
&9B_7 - 14B_5 + B_3 = 0,\\
&11B_9 - 30B_7 + 7B_5 = 0,\\
&13B_{11} - 55B_9 + 27B_7 - B_5 = 0,\\
&15B_{13} - 91B_{11} + 77B_9 - 9B_7 = 0,\\
&17B_{15} - 140B_{13} + 182B_{11} - 44B_9 + B_7 = 0,
\end{aligned}$$

enz.

Wij hebben dit laatste stelsel te meer nedergeschreven om er op te wijzen dat daarin de getallencoëfficiënten van een zelfden Bernoulliaanschen coëfficiënt in de opvolgende regels op eenvoudige wijze telkens uit elkander zijn af te leiden, zoodat men voor het stelsel in zijn geheel die getallen gemakkelijk in evenwijdige schuine volgorden zou invullen. Immers de coëfficiënt van den $(r+1)^{en}$ term in den q^{den} regel, dat is (afgezien van het teeken) juist de coëfficiënt van den algemeenen term $B_{2q-2r-1}$, bleek zoo even te bedragen $(2q-2r+1)\dfrac{q!}{(2r+1)!\,(q-2r)!}$; en vermeerdert men nu hierin gelijktijdig q en r met de eenheid, dan blijkt de coëfficiënt van denzelfden schuin daaronder geplaatsten term $B_{2q-2r-1}$ in den volgenden regel gelijk $(2q-2r+1)\dfrac{(q+1)!}{(2r+3)!(q-2r-1)!}$ en dus $\dfrac{(q+1)(q-2r)}{(2r+2)(2r+3)}$-maal zoo groot te zijn. De opvolgende door $(q, r=0)$, $(q+1, r=1)$, $(q+2, r=2)$, enz., $(2q-1, r=q-1)$, $(2q, r=q)$ bij wijze van regthoekige coördinaten aangeduide getallencoëfficiënten van denzelfden Bernoulliaanschen coëfficiënt B_{2q-1} in de $q+1$ opvolgende regels waarin deze voorkomt moeten dus ieder voor zich met

$$\frac{(q+1)q}{2.3},\ \frac{(q+2)(q-1)}{4.5},\ \frac{(q+3)(q-2)}{6.7},\ \text{enz.},\ \frac{(2q)(1)}{(2q)(2q+1)}=\frac{1}{2q+1}$$

en nul vermenigvuldigd worden om telkens den naastvolgenden getallencoëfficiënt op te leveren. Zoo heeft men bij voorbeeld voor $q=4$, dat is voor de vijf opvolgende coëfficiënten 9, 30, 27, 9, 1 waarmede B_7 is aangedaan:

$$9)\times\frac{5.4}{2.3}=30)\times\frac{6.3}{4.5}=27)\times\frac{7.2}{6.7}=9)\times\frac{8.1}{8.9}=1)\times\frac{9.0}{10.11}=0.$$

Tot besluit van dit opstel deel ik hier voor de eerste Bernoulliaansche coëfficiënten nog eenige uitdrukkingen mede, waardoor zij op betrekkelijk eenvoudige wijze afhangen

van min of meer regelmatige algebraïsche sommen van zekere binomiaalcoëfficiënten. Behalve voor enkele der allereersten is het mij echter niet gelukt den wezenlijken grondslag, waarop dergelijke analogiën zouden berusten, op te sporen: ik geef ze dus als slechts bij toeval of bij tasting gevonden. Regelmatigheidshalve de eerste leden in eene tamelijk in het oog loopende volgorde brengende, zijn de bedoelde uitdrukkingen de onderstaande:

$$2^1.3\, B_1 = \binom{3}{0},$$

$$2^3.5.6\, B_3 = -\binom{6}{1} + \binom{6}{3} - \binom{6}{5},$$

$$2^5.7.8.9\, B_5 = 2^3 \left\{ -\binom{9}{2} + \binom{9}{6} \right\},$$

$$2^7.9.10.11.12\, B_7 = 2^6 \left\{ -\binom{12}{2} + \binom{12}{6} - \binom{12}{10} \right\} \text{ of ook}$$

$$= \frac{2^8.11}{3^3} \left\{ \binom{12}{0} - \binom{12}{3} + \binom{12}{6} - \binom{12}{9} + \binom{12}{12} \right\},$$

$$2^9.11.12.13.14.15\, B_9 = 2^9.3 \left\{ -\binom{15}{3} + \binom{15}{6} + \binom{15}{9} - \binom{15}{12} \right\},$$

$$2^{11}.13.14.15.16.17.18 B_{11} = 2^{14}.3^2 \left\{ -\binom{18}{3} + \binom{18}{9} - \binom{18}{15} \right\},$$

$$2^{13}.15.16.17.18.19.20.21\, B_{13} = 2^{10}.3^3.5^2.17 \left\{ -\binom{21}{3} - \right.$$

$$\left. -\binom{21}{6} + \binom{21}{9} + \binom{21}{12} - \binom{21}{15} - \binom{21}{18} \right\}.$$

Voor B_{15} heb ik iets dergelijks niet anders kunnen verkrijgen dan met bijvoeging nog van 2 als factor bij sommige termen, namelijk:

$$2^{15}.17.18.19.20.21.22.23.24\, B_{15} = \frac{2^{18}.3^3.7.11.19}{5} \left\{ \right.$$

$$\left\{ -\binom{24}{3} + 2\binom{24}{6} - \binom{24}{9} + 2\binom{24}{12} - \binom{24}{15} + 2\binom{24}{18} - \binom{24}{21} \right\}.$$

Voor de hoogere Bernoulliaansche coëfficiënten zijn enkele pogingen in dezen zin mij in het geheel niet gelukt.

Zonder het verder uit te werken moge hier nog worden aangeduid dat dergelijke ontwikkelingen volgens de opklimmende magten van den sinus als in de eerste afdeeling dezes tot grondslag van zelfstandige formulen voor de tangenten-coëfficiënten dienden, ook tot hetzelfde doel voor de secanten-coëfficiënten zouden kunnen strekken. Zoo zou men kunnen uitgaan van

$$sec.\, x = (1 - sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} {}_n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)} sin^{2n} x\,; \text{ enz.}$$

De cosecanten-coëfficiënten C hangen (zie vroegere bijdrage, blz. 154) onmiddellijk met de Bernoulliaansche zamen volgens

$$C_{2q-1} = 2\,(2^{2q-1} - 1)\, B_{2q-1}.$$

Van welwillende zijde werd mij nog de navolgende litteratuur ter zake medegedeeld, die zich eenigzins aansluit aan wat ik vroeger op blz. 167—170 opgaf:

A. L. Crelle — C. W. Borchardt, *Journal für die Mathematik*: Stern, in 92er Bd., 1882; Worpitzky, *Studien über die Bern. und Eul. Zahlen*, en Kronecker, *Ueber die Bern. Zahlen*, in 94er Bd., 1883; Lipschitz, *Beiträge zu der Kenntniss der Bern. Zahlen*, in 96er Bd., 1884.

J. A. Grunert, *Archiv der Mathematik und Physik*: Sachse, *Ueber die Darstellung der Bern. und Eul. Zahlen durch Determinanten*, in 68er Th., 1882.

Schlömilch's *Zeitschrift für Mathematik etc.*: Worpitzky, *Ueber die Partialbruchzerlegung der Functionen etc.*

Nouvelles Annales de mathématiques: Cesaro, *Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler*, in 3e Série, T. 5, 1886.

American Journal of Mathematics: G. S. Ely, *Bibliography of Bernoulli's numbers, Some Notes*, in Vol. 5; T. Gomes Teixeira, *Notes sur les nombres de Bernoulli*, in Vol. 7.

September 1888.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 24 November 1888.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, KORTEWEG, A. C. OUDEMANS JR., HUBRECHT, MICHAËLIS, VAN DIESEN, DIBBITS, ENGELMANN, FORSTER, SURINGAR, ZAAIJER, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, BIERENS DE HAAN, SCHOUTE, BAEHR, KAPTEIJN, HOEK, PEKELHARING, ZEEMAN, RAUWENHOFF, SCHOLS, MAC GILLAVRY, LORENTZ, PLACE, MARTIN, DE VRIES, FRANCHIMONT, GUNNING, VAN 'T HOFF en C. A. J. A. OUDEMANS Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. E. DUPONT, Directeur van het Musée royal d'Histoire naturelle de Belgique te Brussel, 14 November 1888; 2°. den Secretaris der Académie d'Archéologie de Belgique te Antwerpen, 9 November 1888; 3°. P. J. VAN BENEDEN, Leuven, 13 November 1888; 4°. het Ministère de l'Instruction publique et des beaux Arts te Parijs, 13 November 1888; 5°. L. DELIOLE, Directeur der Bibliothèque nationale te Parijs, 19 November 1888; 6°. J. DENIKER, Bibliothecaris van het Museum d'Histoire naturelle te Parijs,

20 November 1888; 7°. den Directeur der Ecole polytechnique te Parijs, 14 November 1888; 8°. den Secretaris der Société des Antiquaires de la Morinie te St. Omer, 16 November 1888; 9°. den Secretaris der Société agricole, scientifique et littéraire des Pyrénées orientales te Perpignan, 16 November 1888; 10°. A. DURIEUX, Secretaris der Société d'Emulation te Cambrai, 17 November 1888; 11°. den Secretaris der Académie des Sciences, Inscriptions et belles-Lettres te Toulouse, 17 November 1888; 12°. J. LECAT, Secretaris der Société d'Agriculture, Sciences et Arts te Valenciennes, 21 November 1888; 13°. DUHAMEL, Secretaris der Société des Antiquaires de Picardie te Amiens, 22 November 1888; 14°. den Secretaris der royal Society te Londen, 31 October 1888; 15°. W. H. WESLEY, Bibliothecaris der royal astronomical Society te Londen, 30 October 1888; 16°. D. W. FRESHFIELD, Secretaris der royal geographical Society te Londen, 31 October 1888; 17°. J. L. SCLATER, Secretaris der zoological Society te Londen, 2 November 1888; 18°. R. OWEN, Londen, 3 November 1888; 19°. den Directeur van het royal Observatory, Greenwich, 31 October 1888; 20°. H. WHITE, Bibliothecaris der Cambridge philosophical Society te Cambridge, 2 November 1888; 21°. W. WRIGHT, Cambridge, 3 November 1888; 22°. den Secretaris der literary and philosophical Society te Manchester, 2 November 1888; 23°. Sir WILLIAM THOMSON, Glasgow, 1888; 24°. J. B. BALFOUR, Bibliothecaris der royal botanical Society te Edinburg, 8 November 1888; 25°. den Secretaris der royal Dublin Society te Dublin, 2 November 1888; 26°. VON BEZOLD, Directeur van het kön. preuss. meteorologische Institut te Berlijn, 2 November 1888; 27°. E. DU BOIS-REYMOND, Secretaris der kön. preuss. Akademie der Wissenschaften te Berlijn, 5, 21 November 1888; 28°. den Directeur der kön. Sternwarte te Kiel, 2 November 1888; 29°. C. F. W. PETERS, Directeur der kön. Universitäts-Sternwarte te Koningsbergen, 2 November 1888; 30°. GILBERT, Directeur der kön. Universitäts-Bibliothek te Greifswald, 7 November 1888; 31°. FÖRSTEMANN, Archivaris der kön. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften te

Leipzig, 8 November 1888; 32⁰. B. WINDSCHEID, Leipzig, 9 November 1888; 33⁰. FÖRSTEMANN, Archivaris der fürstlich Jablonowskische Gesellschaft te Leipzig, 12 November 1888; 34⁰. A. KLINGBERG, Bibliothecaris van het Verein der Freunde der Naturgeschichte te Güstrow, 14 November 1888; 35⁰. den Bibliothecaris der Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften te Görlitz, 15 November 1888; 36⁰. J. LIMPRICHT, Bibliothecaris der Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur te Breslau, 15 November 1888; 37⁰. A. GRUBER, Secretaris der naturforschende Gesellschaft te Freiburg i/B., 19 November 1888; 38⁰. J. FRANCK, Bonn, 19 November 1888; 39⁰. SCHAARSCHMIDT, Bibliothecaris der kön. Universitäts-Bibliothek te Bonn, 20 November 1888; 40⁰. P. E. SONNENBURG, Bibliothecaris van het Verein von Alterthumsfreunden im Rheinlande te Bonn, 21 November 1888; 41⁰. C. GEGENBAUR, Heidelberg, 21 November 1888; 42⁰. C. KNOOP, Secretaris der Wetterauische Gesellschaft für die gesammte Naturkunde te Hanau, 22 November 1888; 43⁰. J. ROSENTHAL, Bibliothecaris der physikalisch-medicinische Gesellschaft te Würzburg, 22 November 1888; 44⁰. O. BUCHNER, Secretaris der Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde te Giessen, 23 November 1888; 45⁰. F. IMHOOF-BLUMER, Winterthur, 21 November 1888; 46⁰. J. GOMALES ALLERA, Bibliothecaris van het Museo de Ingenieros te Madrid, 17 November 1888; 47⁰. H. G. ZEUTHEN, Secretaris der kong. danske videnskabernes Selskab te Kopenhagen, 17 November 1888; 48⁰. TEGNER, Bibliothecaris der Universitets Bibliothek te Lund, 6 November 1888; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1⁰. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 14, 20 November 1888; 2⁰. J. BRUINWOLD RIEDEL, Secretaris der Maatschappij tot Nut van 't Algemeen te Amsterdam, 10 November 1888; 3⁰. W. H. M. CHRISTIE, Directeur van het royal Observatory, Greenwich, 26 October 1888; 4⁰. A. AUWERS, Secretaris der kön. preuss. Akademie

der Wissenschaften te Berlijn, Juli 1888; 5°. A. PEUCKERT, Secretaris van het Verein für Erdkunde te Dresden, 1888; 6°. den Secretaris der Senckenbergische naturforschende Gesellschaft te Frankfort a/M., 1888; 7°. A. O. KIHLMAN, Secretaris der Societas pro Fauna et Flora fennica te Helsingfors, 1 November 1888; 8°. K. A. MOBERG, Secretaris der Commission géologique de la Finlande te Helsingfors, 1 November 1888; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Ingekomen zijn: 1°. een brief van den Heer BUYS BALLOT, ter begeleiding eener verhandeling van den Heer Dr. VAN RIJCKEVORSEL: »Magnetic Survey of the eastern part of Brazil"; en 2°. een brief van Dr. JAN DE VRIES, leeraar aan de H. B. S. te Kampen, ter begeleiding van een opstel: »Eene rangschikking van het puntenveld in involutorische groepen". Zoowel de verhandeling als het opstel werden aangeboden voor de werken der Akademie. — De beoordeeling van het werk van den Heer VAN RIJCKEVORSEL wordt door den Voorzitter opgedragen aan de Heeren J. A. C. OUDEMANS en KAMERLINGH ONNES, en die van de bijdrage des Heeren DE VRIES aan de Heeren SCHOUTE en BIERENS DE HAAN.

— De Heeren SCHOUTE en BIERENS DE HAAN brengen rapport uit over de verhandeling van den Heer J. CARDINAAL: »Meetkundige theorie der scheeve oppervlakken van de 4e orde"; en de Heeren BIERENS DE HAAN en VAN DEN BERG over de verhandelingen van den Heer Dr. JAN DE VRIES, aangeboden in de vergaderingen van 29 September en 27 October: »Over de polyedrale configuraties" en »Over eene groep van regelmatige configuraties". — De conclusie van beide commissiën van Rapporteurs strekt om de hun ter beoordeeling gegeven bijdragen op te nemen in de werken der Akademie. — In dezen zin wordt zonder discussie besloten.

— De Heer DE VRIES spreekt over DARWIN's Pangenesis. De

bestrijding, die deze hypothese in de twintig jaren van haar bestaan ondervonden heeft, acht hij niet in alle opzichten gerechtvaardigd. Want de Pangenesis bestaat uit twee van elkander onafhankelijke stellingen, waarvan de eerste volstrekt niet vervalt, als het gelukt is de tweede te weêrleggen. Volgens de eerste stelling worden de erfelijke eigenschappen der organismen in de cellen vertegenwoordigd door stoffelijke deeltjes, die, ontelbaar als de sterren in den hemel, elk eene afzonderlijke eigenschap vertegenwoordigen. De tweede stelling is de bekende hypothese van het transport der kiempjes door het organisme, van de organen naar de kiemcellen. De argumenten, tegen deze laatste aangevoerd, acht spreker overtuigend. Hij wijst er op, dat daarmede de eerste stelling echter niet weêrlegd is, en tracht aan te toonen, dat deze zoowel van de verschijnselen der erfelijkheid, als van de feiten, die in de beide laatste tientallen van jaren omtrent celdeeling en bevruchting ontdekt zijn, op zeer voldoende wijze rekenschap kan geven.

De Heer HUBRECHT, die meende dat de Spreker WEISMANN's verdiensten geen recht had laten wedervaren, wordt door den Heer DE VRIES beantwoord.

— De Heer KORTEWEG deelt het volgende mede:

Wanneer een dubbelraakvlak over een gegeven oppervlak voortrolt, kan het gebeuren dat de beide gekoppelde raakpunten samenvallen. Daar ter plaatse ligt dan op het oppervlak een bijzonder punt, waaraan spreker den naam van »plooipunt" wenscht toe te kennen. Bij sommige thermodynamische oppervlakken heeft het eene gewichtige physische beteekenis, representeert namelijk den kritischen toestand. In de theorie der algebraïsche oppervlakken is het bekend als een gemeenschappelijk punt van de spinodale en flecnodale lijn.

Spreker begon met het bestudeeren van de gedaante van het oppervlak in de nabijheid van een plooipunt. Het bleek toen, dat er twee soorten van plooipunten onderscheiden moeten worden. Zij verschillen onder anderen in de doorsnede van raakvlak en oppervlak, welke bij de eerste soort uit een geïsoleerd punt met bestaanbare raaklijn, in

de tweede uit twee rakende takken bestaat. Voorts bevindt zich de lijn der gekoppelde raakpunten bij de eerste soort op 't elliptisch gekromde, bij de tweede soort op 't hyperbolisch gekromde gedeelte van het oppervlak. Spreker vertoont modellen van beide gevallen.

Daarna ging spreker over tot de vraag: hoe plooipunten nieuw ontstaan en verdwijnen op een vloeiend veranderend oppervlak. Een algemeene regel is het, dat bijzondere punten, die in eindig aantal op een oppervlak optreden, niet verdwijnen, dat is onbestaanbaar worden, alvorens twee of meer samengekomen zijn. Om dus op een vloeiend veranderend oppervlak het oogenblik van verdwijnen of verschijnen te leeren kennen, behoeft men slechts na te gaan het optreden van die bijzondere punten van hooger orde, waar meerdere der te onderzoeken bijzondere punten samenvallen.

In de eerste plaats komen dan in aanmerking die bijzondere punten van hooger orde, wier aanwezigheid op een algebraïsch oppervlak slechts aan ééne voorwaarde tusschen de coëfficienten gebonden is. Spreker zoude zulke bijzondere punten »uitzonderingspunten van den eersten graad (van uitzondering)" willen noemen. Men kan een gegeven oppervlak van gegeven graad vloeiend laten overgaan in elk ander oppervlak van denzelfden graad, zonder andere dan deze uitzonderingspunten te zien verschijnen, en ook dan, wanneer de wijze van verandering niet geheel vrij is, maar veroorzaakt wordt door de aanwezigheid van een of meer parameters, zullen *in den regel* geene andere uitzonderingspunten behoeven op te treden.

Wat nu de plooipunten betreft, voor deze zijn de bedoelde uitzonderingspunten vier in getal, en wel (merkwaardig genoeg) twee geheel onderscheiden soorten van dubbelplooipunten, voorts osculatiepunten en kegelpunten.

De *eerste soort* van dubbel-plooipunt ontstaat als in de vergelijking:

$$z = c_1 x^2 + d_3 x y^2 + e_5 y^4$$

die in het algemeen de gedaante van het oppervlak in de

nabijheid van een plooipunt bepaalt, de coëfficient d_3 nul wordt. Zulk een plooipunt ontstaat door 't samenvallen van gelijksoortige enkele plooipunten, die dan na het samenvallen onbestaanbaar worden.

De *tweede soort* eischt: $d^2_3 - 4\, c_1\, e_5 = 0$. Het gelukte spreker aan te toonen, dat zij beschouwd moet worden te zijn ontstaan uit het samenvallen vau twee ongelijksoortige plooipunten. Zij vormt tevens den overgang tusschen beide soorten van enkelvoudige plooipunten Hieruit volgt dus dat een plooipunt zijn soortkarakter niet veranderen kan zonder eerst met andere plooipunten samen te komen. Geschiedt dit in een dubbelplooipunt tweede soort, dan worden beide onbestaanbaar. Bij 't samenkomen in een osculatiepunt kan echter wellicht 't karakter veranderen. Dit is door spreker niet onderzocht.

In een *osculatiepunt*, waar de doorsnede van raakvlak en oppervlak een driedubbelpunt vertoont, komen drie plooipunten samen. Van deze drie zijn er evenzoovele bestaanbaar als door het driedubbelpunt bestaanbare takken gaan. In de bestaanbaarheid komt na het optreden van een osculatiepunt geene verandering.

Anders is het met de *kegelpunten* gesteld. Hier komen 24 plooipunten bijeen; toch kan hetgeen met die 24 punten voorvalt op tamelijk eenvoudige wijze worden beschreven. Brengt men een coördinaten-stelsel aan in het kegelpunt, dan kan de vergelijking van het oppervlak geschreven worden:

$$0 = H_2 + H_3 + H_4 + \dots$$

Laat men nu alle termen H_4 en hoogere weg, dan ontstaat een derdegraadsoppervlak met kegelpunt. Door dit kegelpunt gaan dan zes (dubbele) rechte lijnen, die al of niet bestaanbaar kunnen zijn. Vervormt men nu het oorspronkelijk oppervlak, zoodat binding of scheiding optreedt tusschen de twee bladen, die in het kegelpunt samenhingen, dan gaan de 24 plooipunten in zes groepen van vier uiteen. Ieder van deze groepen correspondeert met een der zes dubbellijnen van het derdegraadsoppervlak: met iedere onbestaanbare lijn een groep van vier punten, die bij binding

zoowel als scheiding onbestaanbaar blijven; met iedere bestaanbare lijn eene, waarvan twee plooipunten onbestaanbaar zijn en blijven, maar de twee andere òf bij scheiding òf bij binding bestaanbaar worden.

Spreker pastte nu de ontworpen theorie toe op derdegraadsoppervlakken. De 54 plooipunten van zulk een oppervlak liggen paarsgewijze op de 27 rechte lijnen. Dubbelplooipunten kunnen alleen optreden op rechten, die door twee kegelpunten gaan; deze rechten tellen dan voor vier en *al* hunne punten zijn als dubbelplooipunten te beschouwen. Daar evenwel bij 't vervormen van een derdegraadsoppervlak 't optreden van twee kegelpunten te gelijk steeds vermeden kan worden, kunnen de *dubbelplooipunten* evenzeer buiten beschouwing gelaten worden als de osculatiepunten, welke geene verandering in 't aantal bestaanbare plooipunten veroorzaken. De kegelpunten blijven nu over. Hier splitst zich bij *binding* iedere bestaanbare dubbellijn van het kegelpunt in twee bestaanbare rechte, waarop, blijkens de algemeene theorie, nu slechts twee bestaanbare plooipunten, beide aan dezelfde lijn eigen, gelegen kunnen zijn. Bij *scheiding* wordt alles onbestaanbaar.

Het verdwijnen van twee plooipunten van een derdegraadsoppervlak gaat dus gepaard met het verdwijnen van twee rechten. Weet men nu nog dat het samenvallen van rechten slechts kan voorkomen bij 't optreden van een kegelpunt, dan geraakt men van zelf tot het theorema, dat het verschil tusschen het aantal bestaanbare plooipunten en het aantal bestaanbare rechten voor alle derdegraadsoppervlakken gelijk moet zijn, en wel blijkens het diagonaalvlak van Clebsch, waar 27 bestaanbare rechte en 10 osculatiepunten, die elk voor 3 bestaanbare plooipunten tellen, aanwezig zijn, gelijk aan het getal *drie*.

Spreker vond in de tamelijk uitgebreide literatuur over derdegraadsoppervlakken, dit theorema nergens uitdrukkelijk geformuleerd, maar het bleek toch, wat den inhoud betreft, bekend te zijn. Zoo geeft Zeuthen (*Math. Annalen*, Bd. VIII, S. 5) voor de vijf hoofdsoorten, welke respectievelijk 27, 15, 7, 3 en 3 bestaanbare rechten bezitten, het aantal bestaan-

bare rechten met onbestaanbare plooipunten op als te zijn, resp. 12, 6, 2, 0, 0; waaruit het theorema natuurlijk onmiddellijk volgt.

— De Heer A. C. OUDEMANS JR. biedt voor de Verslagen en Mededeelingen aan eene verhandeling, getiteld: »Bijdrage tot de kennis van de Cupreïne".

— De Heer MARTIN deelt mede, dat door hem onlangs eene bezending versteeningen uit Nederlandsch Indië werd ontvangen, door den mijningenieur J. A. HOOZE in Martapoera, het zuidoostelijk gedeelte van Borneo, verzameld. Daaronder vond spreker karakteristieke fossielen der krijtformatie, vooral ook rudisten, en wel verscheidene soorten van *Sphaerulites* en *Radiolites*. Beide geslachten werden vroeger ook in Engelsch Indië waargenomen en door STOLICZKA beschreven, terwijl rudisten in de Nederlandsche bezittingen tot nu toe nooit waren aangetroffen. De aanwezigheid eener krijtformatie op Borneo, die reeds door GEINITZ hoogstwaarschijnlijk werd geacht, blijkt hieruit met zekerheid, en wel in streken, waar oudere dan tertiaire sedimenten nog niet ontdekt waren. Eene meer uitvoerige bewerking der krijtfauna hoopt spreker binnen kort te kunnen beginnen.

Dezelfde spreker handelt vervolgens over eene menschelijke onderkaak, in 1823 in den Caberg bij Maastricht gevonden en sedert dikwerf in de anthropologische literatuur genoemd, omdat het voorwerp aan een diluviaal mensch werd toegeschreven. Spreker bracht de kaak ter tafel, benevens een profiel, opgenomen door den opzichter van den waterstaat G. A. VAN DER DUSSEN, werkzaam bij het ontgraven der Zuid-Willemsvaart, bij welke gelegenheid het bedoelde overblijfsel is gevonden. Het profiel gaat vergezeld van een beschrijvenden catalogus, en al hetgeen over de vindplaats der kaak bekend is, doet veronderstellen, dat die in jonge alluviale afzettingen, voorkomende binnen het gebied der Loessformatie, heeft gelegen en n i e t van diluvialen ouderdom kan zijn. De zeer frissche toestand, waarin het voorwerp nog verkeert, doet buitendien geenszins aan een fossiel

denken; terwijl de kaak, volgens den hoogleeraar ZAAIJER en andere anatomen, ook geenerlei bijzonderheden vertoont, die voor een hoogen ouderdom zouden pleiten.

— De Voorzitter biedt, uit naam van den Heer VAN BEMMELEN, voor de werken der Akademie aan eene verhandeling van den Heer G. REINDERS te Wageningen: »Over de samenstelling en het ontstaan der zoogenoemde Oerbanken in de Nederlandsche heidegronden". Rapport daarover zal worden uitgebracht door de Heeren VAN BEMMELEN en MARTIN.

— De Heer HOEK biedt voor de boekerij der Akademie aan een exemplaar der door hem bewerkte »Bibliographie der Fauna van Nederland."

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de Vergadering.

———

BIJDRAGE TOT DE KENNIS VAN DE CUPREÏNE.

DOOR

A. C. OUDEMANS Jr.

I.

Door de vrijgevigheid van de bekende kinine-fabrikanten Howards and Sons, die mij eenige hektogrammen basisch cupreïnesulfaat afstonden, werd mij de gelegenheid gegeven, een uitvoerig onderzoek in het werk te stellen omtrent de cupreïne en hare verbindingen en daardoor mijne kennis omtrent de eigenschappen der kina-alkaloïden te vermeerderen.

Het zout, dat mij ten dienste stond, was goed kristallijn, maar eenigszins vaal van tint. Het loste in overmaat van zuren tot eene lichtbruingeel gekleurde vloeistof op.

Om daaruit cupreïne te bereiden, zou men geneigd zijn, de in verdund zoutzuur opgeloste massa door alkaliën — en wel door ammonia in zwakken overmaat — te ontleden, daar cupreïne, zooals reeds uit het onderzoek van Hesse en van Paul en Cownley is gebleken, in overmaat van kali en natron — en zelfs van ammonia — gemakkelijk oplost. Deze wijze van doen voert intusschen niet tot het doel; want wanneer men het in verdunde zuren opgeloste sulfaat in zwakken overmaat van verdunde ammonia giet en snel omroert, ontstaat altijd weder, nevens cupreïne, eene zekere hoeveelheid van het moeilijk oplosbare basische sulfaat.

Ik heb er mij het best bij bevonden, de cupreïne af te scheiden uit eene oplossing van het neutrale (door anderen zuur genoemde) hydrochloraat, die men zich gemakkelijk op de volgende wijze bereidt. Men verwarmt het

basische sulfaat met zijn tienvoudig gewicht aan water, voegt onder gestadig roeren zooveel zoutzuur toe, dat de massa opgelost is en daarna de ter precipitatie van het zwavelzuur noodige hoeveelheid chloorbaryum. Nadat zich het baryumsulfaat heeft afgezet, filtreert men de vloeistof door dierlijke kool en giet haar, na bekoeling, onder voortdurend roeren in eene verdunde oplossing van ammonia in water. Hierbij kan men, bij gedeelten werkende, zich door den reuk laten leiden en zoolang met de toevoeging van het zure vocht voortgaan, als bij het omroeren de reuk van de ammonia nog even duidelijk voor den dag komt. Het is niet raadzaam, omgekeerd te handelen en de ammonia bij het zure vocht te gieten, tenzij de oplossing van het zout zeer verdund zij, omdat dan lichtelijk uit de oplossing van het gemakkelijk oplosbare neutrale hydrochloraat eene zekere hoeveelheid van het basische hydrochloraat kan ontstaan, dat zich met de afgescheidene cupreïne vermengt, later door het ter uitspoeling dienende water wordt opgelost en op die wijze verloren gaat.

De verkregene neerslag wordt nu zoo snel mogelijk met behulp van den BUNSEN'schen toestel afgefiltreerd en met koud water uitgewasschen. De doorloopende zwak ammoniakale vloeistoffen behoeven niet te worden weggeworpen. Door verdamping daarvan en latere toevoeging van eene kleine overmaat van ammonia, verkrijgt men daaruit weder een neerslag van cupreïne, die, ofschoon gekleurd, zeer goed tot de bereiding van sommige cupreïne-zouten kan dienen.

Bij de beschrevene bewerkingen bemerkt men al spoedig, dat cupreïne, in vergelijking van de meer bekende kina-alkaloïden, veel grootere neiging vertoont om zich onder den invloed van verschillende invloeden te kleuren en te ontaarden. Herhaalde bewerkingen van hetzelfde preparaat (verdamping en oplossing) voeren doorgaans tot het resultaat, dat de massa geelachtig, bruin- of roodachtig, ten laatste bijna zwart wordt gekleurd. Dit schijnt vooral plaats te grijpen onder den invloed van oxydeerende zuren, zooals salpeterzuur en chloorzuur, en van alkaliën, althans onder den invloed van ammonia. Somtijds verkrijgt men door het

verdampen van dergelijke gekleurde oplossingen tot droogwordens en latere behandeling met water een zwart poeder als residu, dat met eene donkerviolette kleur in alkohol en ijsazijn oplost en daaruit bij verdamping duidelijk kristallijn achterblijft. De hoeveelheid daarvan is echter altijd zeer gering. Zooals later zal worden vermeld, ontstaat daarvan eene ruime hoeveelheid, wanneer het neutrale nitraat in drogen toestand boven zekere grenzen van temperatuur wordt verhit.

Heeft men dergelijke donkergekleurde vloeistoffen op cupreïne te verwerken, dan voert het gebruik van dierlijke kool ter ontkleuring gewoonlijk niet tot het doel en is het verkieselijk, aan het vocht allengskens zooveel verdunde ammonia toe te voegen, dat er een geringe nederslag is ontstaan. Na bezinking is het vocht min of meer ontkleurd en de kleurstof in den neerslag overgegaan; men herhaalt deze bewerking, totdat men het beoogde doel heeft bereikt.

Het alkaloïde, dat uit de oplossing van een cupreïnezout door ammonia is afgescheiden, heeft menigmaal eene gele tint, vooral wanneer deze laatste niet genoegzaam was verdund. Het zuiveren van een dergelijk gekleurd praeparaat geschiedt het best, wanneer men de massa bij zachte warmte met alkohol van 70 pCt. uittrekt; daardoor gaat de kleurstof met een deel van het alkaloïde in oplossing; het afgefiltreerde residu kan nu in sterken alkohol worden omgekristalliseerd of door omzichtige toevoeging van water tot het vocht, bij bekoeling, in kristalletjes worden afgescheiden.

Volgens deze laatste wijze van doen scheidt zich een zeer groot gedeelte van het alkaloïde zuiver wit uit de oplossing af, terwijl het kristalliseeren daarvan door verdamping van sterk alkoholische oplossingen allengs weder aanleiding geeft tot het verkrijgen van een min of meer gekleurd produkt.

Wat nu verder de eigenschappen van de cupreïne betreft, zoo kan ik in hoofdzaak bevestigen, hetgeen daaromtrent door Hesse is medegedeeld *).

*) *Ann. der Chem. u. Pharm.* **230**, 55 en verv.

Cupreïne lost tamelijk wel in sterken alkohol op, weinig in aether, zwavelkoolstof, benzol, chloroform en petroleumaether.

Het kristalliseert uit sterken alkohol in den vorm van kleine doorschijnende kristalletjes, uit (waterhoudenden) aether in den vorm van wratjes, die, volgens de ondervinding van Hesse en ook volgens de mijne, 2 moleculen water bevatten. Het alkaloïde, dat door toevoeging van water aan eene warme alkoholische oplossing wordt afgescheiden, bevat altijd eene zeer geringe hoeveelheid water, ongeveer 1.3 procent, wat overeenkomt met $^1/_3$ molecule. Dat dit water niet kan geacht worden, door hygroscopiciteit te zijn opgenomen, maar werkelijk scheikundig is gebonden, schijnt mij toe daaruit te blijken, dat het uiterlijk van het praeparaat na het drogen op 100—130^0 zeer wordt veranderd; vroeger een vrij dicht zandachtig poeder, gaat het over in eene los samenhangende massa van veel duidelijker kristallijn voorkomen. Ik geloof dan ook te mogen aannemen, dat de samenstelling van uit slappen alkohol afgescheiden en aan de lucht gedroogde cupreïne beantwoordt aan de formule $3(C_{19}H_{22}N_2O_2) + H_2O$.

Voor het smeltpunt van bij 140^0 gedroogde cupreïne vond Prof. Hoogewerff ± 197^0, hetgeen met de opgave van Hesse (198^0) goed overeenstemt.

De analyse, uitgevoerd door den Heer E. H. Ekker, leverde de volgende uitkomst op:

1) 0.7502 gram luchtdroge cupreïne, uit aether gekristalliseerd, verloren bij 130—140^0 0.1008 gram H_2O = 13.4 pCt. De formule $C_{19}H_{22}N_2O_2 + 2\,H_2O$ vordert 10.4 pCt. H_2O.

2) 0.2808 gram uit aether gekristalliseerd alkaloïde, bij 130^0 gedroogd, gaven 0.7602 gr. CO_2 en 0.1865 gr. H_2O.

	Gevonden.	Berekend.
C_{19}	73.8	73.5
H_{22}	7.3	7.1
N_2	—	—
O_2	—	—

Hiermede stemt vrij goed overeen de uitkomst der analyse

van het neutrale chloroplatinaat, ten deele door den Heer E. H. Ekker, ten deele door mij verricht.

1) 0.9461 gr. van het zout gaven mij bij drogen op 145° een verlies aan water van 0.0265 gr. of 2.8 pCt., hetgeen beantwoordt aan 1 molecule kristalwater (2.44 pCt.). Van hetzelfde zout gaven 0.4136 gr. 0.1094 gr. platina = 26.45 pCt.

De formule $C_{19}H_{22}N_2O_2$, $H_2\,Pt\,Cl_6 + H_2O$ vordert 26.34 pCt. Pt.

2) De Heer Ekker verkreeg van 0.5611 gram bij 110—130° tot standvastig gewicht gedroogd chloroplatinaat 0.6393 CO_2 en 0.1809 gr. H_2O.

	Gevonden.	Berekend.
C_{19}	31.1	31.7
H_{24}	3.7	3.3
N_2	—	—
O_2	—	—
Pt	26.5	26.3
Cl_6		—

Cupreïne gedraagt zich als eene tweezurige basis en geeft met de meeste zuren twee reeksen van zouten, die ik basische en neutrale zal noemen. Met sommige zuren, zooals zwavelzuur, vereenigt het zich ook nog ter vorming van een zuur zout, waarvan het zuur op 1 mol. alkaloïde tweemaal grooter is dan in het neutrale. De basische zouten zijn over het geheel niet zeer oplosbaar in water, de neutrale en zure daarentegen wel.

Zooals Hesse reeds heeft opgemerkt, zijn oplossingen van basische zouten geel gekleurd; de eigenaardige citroengele tint dezer vloeistoffen, die bij de zuiverste praeparaten voorkomt, moet niet worden verward met de bruingele kleur, die bij langzame ontaarding ten gevolge van verdamping enz. wordt waargenomen. Dit blijkt onder anderen daaruit, dat de witte basische zouten, die met eene gele kleur in water oplossen, met watervrijen alkohol *geheel* kleurlooze oplossingen geven. De oplossingen van neutrale verbindingen van cupreïne met kleurlooze zuren zijn ongekleurd, tenzij bij verdunning en verwarming door dissociatie eene zekere hoeveelheid basisch zout ontstaan zij. In drogen toestand

zijn de *volkomen zuivere* neutrale verbindingen met kleurlooze zuren waarschijnlijk ongekleurd (het hydroiodaat uitgezonderd, dat oranjekleurig en het hydrobromaat, dat geel is), maar het is mij niet mogen gelukken, neutrale zouten in groote kristallen geheel ongekleurd te verkrijgen.

Bij de bepaling van het soortelijk draaiingsvermogen van cupreïne en hare verbindingen heb ik dezelfde methode gevolgd als vroeger bij mijn onderzoek omtrent kinamine en konkinamine.

De uitkomsten werden berekend met behulp van de formule $(\alpha)_D = \frac{V\alpha}{lp}$.

Voor de oplossingen van het vrije alkaloïde in absoluten alkohol verkreeg ik daarbij de volgende resultaten:

N°.	p	V	l	t	α_D		$(\alpha)_D$
1	0.1310 gr.	19 CC.	302.8 mm.	17°C.	3°40′		
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	3°39′	3°39′5	— 175°.4
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	3°39′5		
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	3°39′5		
2	0.2354 〃	19 〃	302.8 〃	17° 〃	6°32′		
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	6°31′	6°33′	— 175°.5
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	6°35′		
3	0.3381 〃	19 〃	302.8 〃	17° 〃	9°21′		
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°20′	9°20′	— 173°.3
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°19′		

Eene bepaling van het S. D. V. in alkohol van 97 pCt. gaf de volgende uitkomst:

p	V	l	t	α_D		$(\alpha)_D$
0.2854 gr.	19 CC.	302.8 mm.	16° C.	7°56′		
〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	7°53′	7°58′	— 175°.3
〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	8° 0′		

Zouten van cupreïne.

Basisch hydrochloraat $C_{19} H_{22} N_2 O_2, H Cl + H_2 O$. Voor dit in kleurlooze naalden kristalliseerende zout vond ik dezelfde samenstelling als Hesse.

0.4087 gram zout verloren namelijk bij drogen op 140° C. 0.0200 gram $H_2 O$ = 4.9 pCt. Berekend 4.9 pCt.

De oplosbaarheid in water werd bepaald volgens de methode van Victor Meyer en wel voor eene temperatuur van 16.3° C. 7.8512 gram van eene bij die temperatuur verzadigde oplossing lieten bij verdamping en drogen op 130° C. een overschot achter van 0.1370 gram. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid van het waterhoudende zout 1 : 53.5.

De bepaling van het soortelijk draaiingsvermogen in waterige en alkoholische oplossingen leverde de volgende uitkomst op.

N°.	Oplosmiddel	p	V	l	t	(α)		$(\alpha)_D$ van het zout	(α) ber[illegible] op [illegible]
1	water	0.1418 gr.	25 CC.	302.8 mm.	17° C.	2°43'			
〃	〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	2°42'	2°42'5	—157°.1	—18[illegible]
〃	〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	2°42'5			
2	〃	0.2177 〃	25 〃	〃 〃	〃 〃	4° 4'			
〃	〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	4° 5'	4° 5'	—154°.8	—18[illegible]
〃	〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	4° 7'			
3	watervrije alkohol	0.1801 〃	19.42 〃	〃 〃	〃 〃	4°44'5	4°46'	—169°.7	—19[illegible]
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	4°47'5			
4	〃 〃	0.3127 〃	22 〃	〃 〃	〃 〃	7°11'			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	7°11'	7°12'	—167°.3	—19[illegible]
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	7°14'			

Neutraal hydrochloraat $C_{19} H_{22} N_2 O_2$, 2 H Cl, watervrij en gebonden aan twee moleculen kristalwater.

Volgens Hesse bevat dit zout geen kristalwater en is het gemakkelijk oplosbaar in koud water, moeilijk oplosbaar in sterk zoutzuur.

Naar mijne ervaring bestaan er twee zouten, waarvan het eene watervrij is en bij temperaturen, die naar mijne schatting boven 15° liggen, in harde kleurlooze kristallen aanschiet, terwijl het andere bij winterkoude in verbinding met twee moleculen water verkregen wordt en betrekkelijk groote tot het rhombische stelsel behoorende kristallen vormt, die veel meer neiging bezitten om uit het omgevende water kleurstof op te nemen dan het watervrije.

Het is mij eenmaal voorgekomen, dat eene kristallisatie van watervrij zout, over dag in de maand November 1887 aan den binnenwand van een bekerglas gevormd, gedurende den nacht was verdwenen en had plaats gemaakt voor groote kristallen van waterhoudend zout, die den bodem van het vat bedekten en een geheel ander uiterlijk voorkomen hadden.

De waterbepaling van het laatstgenoemde zout leverde de volgende uitkomst op:

0.9648 gram verloren bij drogen op 140° 0.0748 gram = 8.3 pCt. aan gewicht. De formule met twee moleculen water eischt een gehalte van 8.6 pCt. Na eenige dagen staan in de lucht had dit zout weder 0.0498 gram water opgenomen, d. i. ongeveer 5.1 pCt. Het zout met 1 molecule water zou 4.5 pCt. water moeten bevatten. Later evenwel was de toename in gewicht in het geheel gelijk aan 6.9 pCt. zoodat het schijnt dat het zout onder gunstige omstandigheden weder het geheele gehalte van 2 H_2O kan opnemen.

De oplosbaarheidsbepaling volgens de methode van V. Meijer leverde de volgende uitkomst:

$t = 15°$. 4.2893 gram verzadigde waterige oplossing gaven als droog residu (verhitting op 140° C.) 0.6500 gr. Oplosbaarheid van het droge zout daaruit berekend 1 : 5.60.

$t = 16°.3$. 9.2511 gram verzadigde oplossing gaven als droog residu 1.3014 gr. Oplosbaarheid van het droge zout 1 : 6.11.

Wat nu verder de bepaling van het S. D. V. voor oplossingen in water betreft, ik heb deze uitgevoerd zoowel bij het watervrije als bij het waterhoudende zout en buitendien ook onder toevoeging van een overmaat van zoutzuur. De uitkomsten zijn de volgende:

N°.	p	V	l	t	α_D		$(\alpha)_D$ berekend op waterhoudend zout	$(\alpha)_{[illegible]}$ berek[illegible] op alkal[illegible]
1	0.2619 gr. dr. zout	24 CC.	302.8 mm.	17° C.	7°47′	7°47′5	—211°.0	—[illegible]
〃	= 0.2866 gr. w. 〃	〃 〃	〃 〃	〃	7°48′			
2	0.5518 gr. w. 〃	22 〃	〃 〃	〃	16° 0′5	15°59′5	—210°.6	—[illegible]
〃	〃 〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃	15°59′			
〃	〃 〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃	15°59′			
3	0.8906 〃 〃	19 〃	〃 〃	〃	29°14′5	29°14′	—206°.0	—[illegible]
〃	〃 〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃	29°14′			
4	1.7178 〃 〃	20 〃	〃 〃	〃	52° 6′	52° 6′	—200°.4	—[illegible]
〃	〃 〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃	52° 6′			
5	3.2829 〃 〃	19 〃	〃 〃	〃	99°58′5	99°58′5	—191°.1	—[illegible]
〃	〃 〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃	99°59′			
6	0.3968 gr. 〃 〃	19 〃	〃 〃	〃	13°20′	13°20′	—210°.8	—[illegible]
〃	1 CC. norm. H Cl	〃 〃	〃 〃	〃	13°20′			
7	0.3933 gr. 〃	19 〃	〃 〃	〃	13°10′	13°10′5	—210°.2	—281°[illegible]
〃	2 CC. norm. H Cl	〃 〃	〃 〃	〃	13°10′5			
〃	〃 〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃	13°10′5			
8	0.4372 gr. 〃	22 〃	〃 〃	〃	12°21′	12°21′	—205°.5	—276°[illegible]
〃	5 CC. norm. H Cl	〃 〃	〃 〃	〃	12°21′			
9	0.3962 gr. 〃	19 〃	〃 〃	〃	12°34′5	12°34′5	—199°.5	—267°[illegible]
〃	10 CC. norm. H Cl	〃 〃	〃 〃	〃	12°33′5			
〃	〃 〃 〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃	12°33′5			
10	0.4523 gr. 〃	22 〃	〃 〃	〃	12° 4′	12° 4′5	—194°.0	—260°.[illegible]
〃	20 CC. norm. H Cl	〃 〃	〃 〃	〃	12° 5′			

Basisch hydrobromaat. $C_{19}H_{22}N_2O_2$, $HBr + H_2O$. Dit zout kristalliseert even als het basische hydrochloraat in den vorm van witte naalden.

Kristalwaterbepaling. 1) 0.8664 gr. zout verloren bij drogen op 160° C 0.0384 gr. water = 4.4 pCt. 2) 0.6956 gr. zout verloren bij drogen op 160° C. 0.0298 gr. water = 4.3 pCt. De formule eischt 4.4 pCt. water.

Het zout is, volgens de uitkomst van de volgende proef, moeilijker oplosbaar in water dan het overeenkomstige hydrochloraat. 6.7774 gram. van eene bij 16° verzadigde oplossing lieten bij verdampen en drogen op 145° C. een overschot achter, wegende 0.0526 gram. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid van het waterhoudende zout 1 : 122.2.

Omtrent het S. D. V. verkreeg ik de volgende uitkomst:

Oplosmiddel	*p*	*V*	*l*	*t*	α_D		$(\alpha)_D$ van het zout	$(\alpha)_D$ berekend op alkaloïde
water	0.1080 gr.	22 CC.	302.8 mm.	17° C.	2°12′	2°10′	—145°.8	—192°.7
″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	2° 9′			
″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	2° 9′			
″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	2° 9′5			
″	0.2241 ″	″ ″	″ ″	″ ″	4°28′	4°28′	—144°.8	—191°.1
″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	4°28			
watervrije alkohol	0.2725 ″	19 ″	″ ″	″ ″	6° 1′	6° 3′	—139°.2	—183°.7
″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	6° 3′			
″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	6° 4′			
″ ″	0.4218 ″	25 ″	″ ″	″ ″	6°58′	7° 1′	—137°.3	—181°.1
″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	7° 2′			
″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	7° 4′			

Neutraal hydrobromaat. $C_{19}H_{22}N_2O_2$, $2HBr$. Watervrij en met $2H_2O$ gekristalliseerd naar gelang van temperatuur.

Waterbepaling van het gehydrateerde zout: 1.3496 gram

verloren bij drogen op 140° C. 0.0983 gr. = 7.3 pCt. water. De formule eischt 7.0 pCt.

Bepaling van de oplosbaarheid: 6.8066 gram bij 16° C. verzadigde waterige oplossing lieten na verdamping en verhitting op 145° een overschot van 0.5072 gram. Oplosbaarheid hieruit berekend 1 : 12.52.

De uitkomsten omtrent het soortelijk draaiingsvermogen voor oplossingen in water waren de volgende (hierbij werd het watervrije zout gebruikt):

N°.	p	V	l	t	α_D		$(\alpha)_D$ van het zout	$(\alpha)_D$ berekend op alkaloïde
1	0.3440 gr.	22 CC.	302.8 mm.	17° C.	9° 0'	8°57'	—189°.0	—287°.7
"	" "	" "	" "	" "	8°56'			
"	" "	" "	" "	" "	8°56'			
"	" "	" "	" "	" "	8°55'			
2	0.7178 "	24 "	" "	" "	16°44'	16°43'	—184° 6	—281°.0
"	" "	" "	" "	" "	16°42'			
"	" "	" "	" "	" "	16°42'			
3	1.5427 "	22 "	" "	" "	37°59'.5	37°59'	—176°.8	—268°.6
"	" "	" "	" "	" "	37°58'			

Basisch hydroiodaat. $C_{19}H_{22}N_2O_2$, H I. Het zout, dat ik onderzocht, was watervrij. Het verloor bij verhitting op 140° niets aan gewicht. 0.4545 gr. gaven 0.2394 gr. AgI, hetgeen overeenkomt met 28.4 pCt. Iodium. De formule van het watervrije zout vordert 29.2 pCt. I.

Bepaling van oplosbaarheid: 6.0228 gram van eene bij 16° verzadigde waterige oplossing lieten na verdamping en drogen op 140° achter 0.0559 gr. overschot. Oplosbaarheid hieruit berekend 1 : 106.6.

Voor het S. D. V. vond ik het volgende:

Aard van het oplos-middel	p	V	l	t	α_D		$(\alpha)_D$ van het zout	$(\alpha)_D$ berekend op alkaloïde
water	0.2005 gr.	25 CC.	302.8 mm.	17° C.	3° 2′			
„	„ „	„ „	„ „	„ „	3° 5′			
„	„ „	„ „	„ „	„ „	3° 4′	3° 4′	—126°.3	—178°.4
„	„ „	„ „	„ „	„ „	3° 3′			
„	„ „	„ „	„ „	„ „	3° 5′			
absol. alkohol	0.2160 „	22 „	„ „	„ „	3°46′			
„ „	„ „	„ „	„ „	„ „	3°52′	3°49′	—128°.3	—180°.9
„ „	„ „	„ „	„ „	„ „	3°48′			
„ „	„ „	„ „	„ „	„ „	3°49′			

Neutraal hydroiodaat $C_{19} H_{22} N_2 O_2$, 2 H I met 1 en met 2 H_2O.

Ik verkreeg dit zout in den vorm van oranjegele wratten en in den vorm van tamelijk groote fraaie donker oranjekleurige kristallen.

Van het eerste verloren 0.6357 gr. bij drogen op 145° 0.0211 gr. water d. i.: 3.3 pCt. De formule met 1 H_2O eischt 3.0 pCt.

Van het tweede verloren 1.2854 gr. bij drogen op 150° 0.092 gr. of 7.2 pCt. water. De formule met 2 H_2O eischt 6 pCt. Het verschil tusschen de gevondene en berekende hoeveelheid laat zich daardoor verklaren, dat het zout nog een weinig vochtig was.

Bepaling van oplosbaarheid bij 16° C. 10.700 gram verzadigde waterige oplossing gaven als residu, op 140° gedroogd, 0.6494 gr. zout. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid van het waterhoudende zout 1 : 15.

Het onderzoek omtrent het S. D. V. leverde de volgende uitkomst op voor opl. in water.

N°.	p	V	l	t	α_D		$(\alpha)_D$ van het zout.	$(\alpha)_D$ berekend op alkaloïde.
1	0.3759 gr.	25 CC.	302.8 mm.	17° C.	6°53′			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	6°53′	6°53′	—151°.2	—283°.2
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	6°53′			
2	0.9879 gr.	22 〃	〃 〃	〃 〃	20′ 5′	20′ 5′	- 147°.6	—276°.4
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	20°5′			

Basisch nitraat. $C_{19} H_{22} N_2 O_2$, $H NO_3 + 2 H_2 O$. Dit zout doet zich voor in den vorm van fijne witte naalden. Bij verhitting onder water smelt het tot eene kleverige dikke massa en bij snelle bekoeling van eene heete geconcentreerde oplossing scheidt het zich als eene amorphe massa af, die allengs kristallijn wordt.

Waterbepaling. 0.5000 gr. verloren door drogen op 120° 0.8442 gr. water = 8.84 pCt. De formule van het zout met 2 moleculen kristalwater eischt 8.8 pCt.

Oplosbaarheidsbepaling. 12,525 gram van eene bij 15° C. verzadigde waterige oplossing lieten bij uitdampen en drogen op 110° C. achter een overschot van 0.1312 gram. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid van het waterhoudende zout 1 : 86.

Zooals uit deze uitkomst blijkt, mist de bewering, dat dit zout in water *zeer* oplosbaar is, allen grond *).

De bepaling van het S. D. V. in waterige oplossing leverde de volgende uitkomst op:

---

*) *Pharm. Journal. Transactions* [3] XV 402, (PAUL en COWNLEY).

N°.	p	V	l	t	α_D		$(\alpha)_D$ van het zout	$(\alpha)_D$ berekend op alkaloïde.
1	0.2485 gr.	22 CC.	302.8 mm.	17° C.	4°45'	4°44'	—138°.4	—182°.5
"	" "	" "	" "	" "	4°41'5			
"	" "	" "	" "	" "	4°45'			
"	" "	" "	" "	" "	4°43'5			

Neutraal Nitraat. $C_{19}H_{22}N_2O_2$, $2\,HNO_3 + H_2O$. Deze verbinding kristalliseert in prachtige lichtgele kristallen, welke evenals het hydrochloraat eene aanzienlijke grootte kunnen bereiken. Men bereidt het gemakkelijk door bij het alkaloïde de berekende hoeveelheid (getitreerd) normaal salpeterzuur te voegen. Het alkaloïde lost daarin eerst op; maar weldra scheidt zich het zout af, dat door kristalliseeren uit warm water gemakkelijk te reinigen is. Zooals reeds in den aanvang (zie bl. 3) werd vermeld, is het tegen den invloed van hooge temperaturen niet bestand. Bij 100° verhit, begint het na langen tijd reeds verschijnselen van kleuring te vertoonen; bij 110° in fijn verdeelden toestand op een open horlogieglas verhit, wordt het spoedig bruinachtig en naarmate de temperatuur stijgt, wordt de massa donkerder, totdat zij ten laatste zwart schijnt. Bij behandeling met water verkrijgt men eene donkerviolet gekleurde oplossing en blijft er een zwartviolet poeder terug, dat niet in water oplost en bij koking met ijsazijn en alkohol eene vloeistof geeft, die bij langzame verdamping aan de lucht een kristallijn violet residu achterlaat. De bedoelde verandering heeft veel gemakkelijker plaats in open schalen of glazen dan in buizen. Bij 150°—160° is zij vooral gemakkelijk waar te nemen. Ik behoud mij voor, later omtrent het ontledingsprodukt nadere onderzoekingen te doen.

Waterbepaling. 0.5314 gr. verloren bij drogen op 105°—110° 0.0217 gr. water = 4.1 pCt. De formule met 1 mol H_2O eischt 4.0 pCt.

Dat er niet *meer* dan 1 mol. kristalwater in het zout is, schijnt mij daaruit te blijken, dat bij eene proef, waarbij het zout op 150° werd verhit, onder gedeeltelijke ontleding en ontwijking van salpeterzuur een gewichtsverlies werd verkregen van slechts 6 pCt.

Ten aanzien van de oplosbaarheid in water werd het volgende resultaat verkregen.

10.3340 gr. van eene bij 17° C. verzadigde oplossing lieten een bij 100° op het waterbad gedroogd overschot terug van 0.7570 gr. Hieruit berekent men eene oplosbaarheid van het waterhoudende zout van 1 : 12,2. Deze uitkomst is evenwel slechts eene benadering tot de waarheid, omdat het uitdampen van de waterige oplossing steeds het ontaarden en bruin worden van de massa ten gevolge heeft, die vooral op het laatst zeer merkbaar is.

Wat verder het S. D. V. in waterige oplossing betreft, zoo kan de uitkomst daarvan uit het volgende overzicht worden opgemaakt:

N°.	*p*	*V*	*l*	*t*	α_D		$(\alpha)_D$ van het zout.	$(\alpha)_D$ berekend op alkaloïde.
1	0.2437 gr.	19 CC.	302.8 mm.	17° C.	7°40′	7°39′5	—197°.4	—289°.1
″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	7°39′			
2	0.5164 ″	22 ″	″ ″	″ ″	13°47′			
″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	13°45′5	13°46′	—193°.4	—283°.2
″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	13°44′5			
3	0.7248 ″	19 ″	″ ″	″ ″	21°55′	21°55′	—188°.9	—276°.7
″	″ ″	″ ″	″ u	″ ″	21°55′5			
4	0.9566 ″	19 ″	″ ″	″ ″	28°57′	28°57′	—189°.8	—278°.0
″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	28°57′			
5	1.2447 ″	19 ″	″ ″	″ ″	3°24′			
″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	37°27′	37°36′	—188°.9	—276°.7
″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	37°26′			

Hieruit schijnt te blijken, dat beneden en boven zekere concentratie een gelijk soortelijk draaiend vermogen kan worden waargenomen, terwijl verder bij sterkere verdunning dit S. V. D. gestadig toeneemt. Sterkere oplossingen dan die onder n°. 5 is vermeld heb ik niet gebruikt, omdat, zooals uit het bovenstaande blijkt, al spoedig oververzadigde soluties zouden verkregen zijn, die onder de waarneming konden kristalliseeren.

Basisch chloraat. $C_{19}H_{20}N_2O_2 + HClO_3$. Het basische chloraat is watervrij, zooals mij bij droging van verschillende praeparaten tot op 150° bleek. Het kristalliseert in fijne, witte, tot knolvormige aggregaten vereenigde naaldjes. De oplossing daarvan in heet water kleurt zich allengskens bruinrood en wordt daarbij steeds donkerder. Eene verdunde oplossing van het zuivere zout vertoont, in tegenoverstelling van al hetgeen ik bij andere zouten heb gezien, geene de minste gele kleuring.

Bepaling van oplosbaarheid. 9.482 gram van eene bij 14° verzadigde waterige oplossing lieten bij uitdampen en drogen op 115° een overschot achter van 0.1936 gr. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid 1 : 48.

De resultaten omtrent het S. D. V. van het zout waren de volgende;

N°.	*p*	*V*	*l*	*t*	α_D		$(\alpha)_D$ van het zout	$(\alpha)_D$ berekend op alkaloïde
1	0.2272 gr.	22 CC.	302.8 mm.	17° C.	4°34′			
„	„ „	„ „	„ „	„ „	4°32′	4°32′	—144°.9	—184°.4
„	„ „	„ „	„ „	„ „	4°30′			

Neutraal chloraat. $C_{19}H_{22}N_2O_2$, $2\,HClO_3 + xH_2O$. Dit zout bereidde ik door dubbele ontleding van de berekende hoeveelheden neutraal sulfaat en zuiver gekristalliseerd baryumchloraat. Na filtratie van het afgescheidene baryumsulfaat verkreeg ik eene bijna kleurlooze oplossing, die, in

uiterst dunne lagen aan de lucht verdampt, eerst een amorph vernis achterliet, dat echter bij lang staan in eene straalvormige kristallijne massa veranderde. Het verdampen van eene groote hoeveelheid oplossing, eerst op het waterbad en later onder den exsiccator, waarbij de massa steeds donkerder van kleur werd, leidde tot het verkrijgen van eene bijna zwarte, zeer dikke gomachtige massa, die in verloop van een paar maanden kristallijne structuur aannam. Uit deze proef blijkt de groote oplosbaarheid van het zout en tevens de moeilijkheid om het S. D. V. daarvan te bepalen.

Basisch perchloraat $C_{19}H_{22}N_2O_2, HClO_4 + 1\frac{1}{2}H_2O$. Wanneer men dit zout bereidt uit alkaloïde en eene niet al te verdunde warme oplosssing van overchloorzuur, zet zich bij bekoeling eene gele olieachtige massa af; deze verandert echter onder het vocht langzamerhand in nagenoeg kleurlooze kleine kristalletjes, die uit kokend water kunnen worden omgekristalliseerd en zich dan veel gemakkelijker vormen, bij vrijwillige verdamping zelfs zich in net gevormde kristalindividuen aanzetten.

Bepaling van kristalwater. 1°. 0.4110 gram zout verloren bij drogen op 135° C. 0.0243 gram water = 5.7 pCt.

2) 0.9455 gr. verloren bij drogen op 135° 0.0600 water = 6.3 pCt.

3) 0.6338 gr. verloren bij drogen op 135° 0.0404 water = 6.3 pCt.

De formule met 1½ mol. kristalwater vordert 6.2 pCt.

De bepaling van de oplosbaarheid in water gaf het volgende resultaat: 7.493 gram bij 11° C. verzadigde oplossing lieten als op 110° gedroogd residu 0.0420 gram achter. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid van het waterhoudende zout 1 : 167.

Neutraal perchloraat. $C_{19}H_{22}N_2O_2, 2HClO_4$. Ik bereidde dit zout door de berekende hoeveelheden neutraal cupreïnesulfaat en baryumperchloraat in heete oplossingen bij elkander te voegen. De van het baryumsulfaat afgefiltreerde vloeistof was lichtgeel gekleurd en werd na vrij aanzienlijke concentratie op het waterbad onder eenen ex-

siccator weggezet. Allengs vormden zich aan den rand van de vloeistof witte vezelachtige kristalaggregaten en tevens op den bodem van het vat eene olieachtige vloeistof (waarschijnlijk een bepaald hydraat). Werden de kristallen weder in de vloeistof ondergedompeld, dan losten zij toch in de bovenste laag spoedig weder op; dit mag in zooverre verwondering baren, dat men met het oog op de afgescheidene olieachtige massa, het bovenstaande vocht al licht voor verzadigd zou houden.

Bepaling van kristalwater. 0.6776 gram zout verloren bij verhitten op 135° C. 0.464 gr. water = 6.8 pCt. De formule eischt een gehalte van 6.6 pCt.

Basisch sulfaat. 2 $(C_{19}H_{22}N_2O_2)$, $H_2SO_4 + 6\,H_2O$. HESSE bepaalde de samenstelling van dit zout en vond, dat het weinig in water oplosbaar was. Ik verkreeg het nooit anders dan in den vorm van zeer lichte vlokken, die op een filtrum tot eene papierachtige massa samenkleven. In alkohol is het ook slecht oplosbaar. 0.4131 gr. verloren bij drogen op 140° C. 0.0549 water = 13.3 pCt. De formule eischt 13.1 pCt. H_2O.

Oplosbaarheidsbepaling. 1) 19.7622 gram van eene bij 17° C. verzadigde waterige oplossing lieten bij verdampen en drogen op 120° C. 0.0208 gr. residu van watervrij zout. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid van het waterhoudende zout 1 : 813. 2) 29.1600 gr. van eene bij 100° C. verzadigde oplossing lieten bij verdampen en drogen op 120° C. eene residu achter van 0.1202 gr. watervrij zout. Hieruit berekent men voor de oplossing van het waterhoudend zout 1 : 209.

Neutraal sulfaat. $C_{19}H_{22}N_2O_2$, $H_2SO_4 + 2\,H_2O$. HESSE vond van dit zout, dat het in heet water tamelijk, in koud water slecht oplosbaar is en geeft op, dat het 1 molecule kristalwater bevat. Mijne ervaring strookt daarmede niet, zooals blijken kan uit de volgende resultaten der analyse:

Kristalwater. 1) 0.4387 gr. verloren op 120° C 0.0098 gr. H_2O maar op 140° 0.0356 gr. H_2O. Dit laatste cijfer komt overeen met 8.3 pCt.

2) 1.2787 gr. verloren door drogen op 145° 0.0998 gr. H_2O = 7.8 pCt.

Dit gehalte aan water werd door het aan de lucht staande zout weder binnen een paar dagen geheel opgenomen.

Zwavelzuurbepaling. 3) Het residu bij het drogen van 0.4387 gr. zout (zie proef 1) leverde 0.2332 gr. $BaSO_4$ = 0.09826 gr. H_2SO_4 = 22.4 pCt.

4) Het residu van 1.2787 gr. zout uit proef 2) leverde 0.6763 gr. $BaSO_4$ = 22.3 pCt. H_2SO_4.

Alzoo

	Gevonden. 1.	2.	Berekend naar de formule $C_{19}H_{22}N_2O_2$, $H_2SO_4 + 2H_2O$.
H_2O	8.3	7.8	8.1
SO_4H_2	22.4	22.3	22.1

Ten aanzien van de oplosbaarheid werd de volgende uitkomst verkregen:

1) 10.068 gram van eene na lang staan bij 17° C. verzadigde waterige oplossing gaven na uitdampen en drogen op lage temperatunr een residu van gekristalliseerd zout, wegende 0.1473 gram. Hieruit berekent men eene oplosbaarheid van 1 : 70.1.

2) Eene volgens de methode van VICTOR MEIJER bereide bij 16° verzadigde oplossing gaf op 10.898 gram vocht een residu van 0.1473 gr. op 140° gedroogd zout; dit komt overeen met eene oplosbaarheid van het waterhoudende zout van 1 : 73.04.

In alkohol is het zout, zelfs in de warmte, slecht oplosbaar.

De uitkomsten ten aanzien van het soortelijk draaiingsvermogen in waterige oplossingen, zijn de volgende:

N°	p	V	l	t	α_D		$(\alpha)_D$ van het zout	$(\alpha)_D$ berekend op alkaloïde
1	0.1765 gr.	19.5 CC.	302.8 mm.	17° C.		5°32'5	—202°.4	— 289°.9
2	0.2065 〃	19.0 〃	〃 〃	18° 〃	6°35'5	6°34'	—197°.4	—282°.3
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	6°32'			
3	0.2110 〃	19.0 〃	〃 〃	19°5 〃	6°37'	6°37'	—196°.7	—281°.7
	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	6°37'			
4	0.2731 〃	19.0 〃	〃 〃	18° 〃	8°37'	8°37'	—197°.4	—282°.8
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	8°37'5			
5	0.3047 〃	19.5 〃	〃 〃	16° 〃	9°28'			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°27'			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°26'	9°28'	—200°.	286°.6
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°29'			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°28'			
6	0.3050 〃	19.0 〃	〃 〃	17° 〃	9°40'	9°40'	—199°.2	—285°.3
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°40'			
7	0.4047 〃	19.0 〃	〃 〃	18° 〃	12°44'	12°45'	—197°.0	—282°.2
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	12°46'			
8	0.5394 〃	19.5 〃	〃 〃	17° 〃	16°26'			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	16°26'	16°26'	—196°.1	—280°.9
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	16°26'			

Hieruit blijkt dat, even als gewoonlijk wordt waargenomen, met eene grootere concentratie een grooter soortelijk draaiingsvermogen overeenkomt.

Zuur sulfaat. $C_{19}H_{22}N_2O_2, 2H_2SO_4 + 3H_2O$. Wanneer men het voorgaande zout met iets meer dan de berekende hoeveelheid zwavelzuur bij verwarming in oplossing brengt en de vloeistof wordt geconcentreerd, zet zich ten slotte een zout in vezelige naalden af, dat aan de opge-

gevene samenstelling beantwoordt. Het is in water zeer oplosbaar, minder in sterk zwavelzuur; ook door alkohol wordt het tamelijk goed opgenomen. De eenigzins verdunde oplossing van het zuivere zout wordt bij verwarming vrij gemakkelijk ontleed en daaruit zetten zich dan bij bekoeling kristallen van het voorgaande zout af.

De analyse van de verbinding leverde de volgende uitkomsten:

Waterbepaling. 0.5046 gr. verloren bij drogen op 120^0 0.0494 gr. H_2O.

Bepaling van zwavelzuur. 0.4162 gr. gaven 0.3522 $BaSO_4$ = 0.1484 gr. H_2SO_4.

	Gevonden.	Berekend naar de formule $C_{19}H_{22}N_2O_2, 2H_2SO_4 + 3H_2O$.
H_2O	9.8	9.7
H_2SO_4	35.7	35.0

Basisch formiaat. $C_{19}H_{22}N_2O_2, CH_2O_2$. Het basische formiaat kristalliseert in den vorm van fijne witte naaldjes, die in water slecht oplosbaar zijn. Het is watervrij; althans werd bij drogen op 140^0 C. geen gewichtsverlies bespeurd.

Oplosbaarheidsbepaling. 12.986 gram van eene bij 16^0 C. verzadigde waterige oplossing gaven bij uitdamping een residu van 0.1174 gr. droog zout. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid in water eene verhouding van 1 : 110.

Eene bepaling van het S. D. V. leverde het volgende resultaat:

N°.	p	V	l	t	α_D		$(\alpha)_D$ van het zout.	$(\alpha)_D$ berekend op alkaloïde.
1	0.1057 gr.	22 CC.	302.8 mm.	17° C.	2°22′	2°23′	—163°.8	—188°.0
"	" "	" "	" "	" "	2°24′			
"	" "	" "	" "	" "	2°23′			

Neutraal formiaat $C_{19}H_{22}N_2O_2, 2CH_2O_2 + xH_2O$. Lost

men het voorgaande zout in eene zwakke overmaat van mierenzuur op, dan verkrijgt men eene vloeistof, die onder eenen exsiccator strooperig wordt en eindelijk in dunnere lagen sporen van kristallisatie vertoont.

Basisch acetaat $C_{19}H_{22}N_2O_2$, $C_2H_4O_2 + 2H_2O$. Door zachte verwarming van cupreïne met eene zwakke overmaat van azijnzuur wordt eene verbinding verkregen, beantwoordende aan de opgegeven samenstelling. Het vormt uiterst fijne wollige naaldjes en lost moeilijk in water op. De oplossingen zijn in hooge mate vatbaar voor oververzadiging.

Bepaling van kristalwater. 1) 0.5974 gram verloren bij drogen op 140° 0.0496 gr. H_2O = 8.3 pCt. 2) 0.9276 gr. verloren bij drogen op 140° 0.0706 gr. H_2O = 7.6 pCt.

De formule eischt 8.8 pCt. H_2O. Dat het zout geen azijnzuur had verloren, blijkt daaruit, dat het bij koken met water weder geheel oploste.

Bepaling van oplosbaarheid in water. 1) 7.912 gram van eene bij 17° C. verzadigde oplossing lieten bij verdamping en drogen op 130° een overschot achter van 0 0760 gr. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid van het waterhoudende zout 1:85. 2) 10.294 gram van eene bij 100° C. verzadigde oplossing lieten op dezelfde wijze een droog overschot achter van 0.5214 gr., hetgeen overeenkomt met eene oplosbaarheid van het waterhoudende zout van 1 : 17.

Neutraal acetaat. $C_{19}H_{22}N_2O_2$, $2C_2H_4O_2 + x H_2O$. Door het voorgaande zout in overmaat van azijnzuur op te lossen en aan vrijwillige verdamping bloot te stellen, verkrijgt men eene amorphe strooperige massa, die tot een vernis opdroogt en waarschijnlijk het neutrale zout voorstelt.

Basisch oxalaat. $2(C_{19}H_{22}N_2O_2)$, $C_2H_2O_4 + 2H_2O$. Paul en Cownley beschrijven dit zout en vermelden er van, dat de oplossing tot een vernis opdroogt, waarin hier en daar kristallen voorkomen. Inderdaad verkrijgt men, wanneer het zout door dubbele ontleding van het hydrochloraat of nitraat en ammoniumoxalaat in tamelijk geconcentreerde oplossing wordt bereid, eerst eene afscheiding van olieach-

tige druppeltjes, die zich allengs op den bodem van het vat als eene gele amorphe taaie harsachtige massa afzetten, maar deze gaat allengs geheel in eene kristallijne massa over. Lost men die in kokend water op of zorgt men bij de straks beschreven proef, dat de oplossingen een verdunningsgraad hebben, waarbij zich slechts weinig zout kan afzetten, dan verkrijgt men ongekleurde duidelijke kristalletjes. De waterige oplossing van het zout is zeer onderhevig aan oververzadiging.

Bepaling van kristalwater. 0.4788 gram zout verloren bij drogen op 130° C. 0.0268 gram water = 5.6 pCt. De formule eischt insgelijks 5,6 pCt.

Bepaling van de oplosbaarheid in water. 22.527 gram van eene bij 18° C. verzadigde oplossing lieten bij verdamping en verder drogen op 140° een overschot achter van 0.0511 gram. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid van het waterhoudende zout 1 : 407.

Neutraal oxalaat. $C_{19}H_{22}N_2O_2, C_2H_2O_4 + xH_2O$. Lost men onder zachte verwarming 1 mol. cupreïne in eene geconcentreerde oplossing van 1 mol. zuringzuur op, zoo verkrijgt men eene strooperige vloeistof, die bij verdere verwarming plotseling eene groote hoeveelheid van een wit zout afscheidt. Dit zout is het voorgaande basische. Brengt men door toevoeging van meer water en verwarming alles weder in oplossing zoo kristalliseert bij bekoeling allengs het basische oxalaat in fraaie netgevormde kristallen. De afgegoten vloeistof gaat hiermede voort, tot dat er ten laatste een vocht overblijft, dat tot eene gomachtige massa uitdroogt.

Basisch tartraat. $2(C_{19}H_{22}N_2O_2), C_4H_6O_6 + 2H_2O$. Deze verbinding kristalliseert door toevoeging van alkalitartraat bij eene warme niet te verdunde oplossing van basisch hydrochloraat of nitraat in den vorm van dunne witte naaldjes.

Hesse, die het zout beschrijft, vond dezelfde samenstelling als hier boven aangegeven is. Mijne uitkomsten waren de volgende:

1) 0.6233 gram tartraat verloren bij drogen op 140° C.

0.0289 gr. H_2O = 4.6 pCt. 2) 0 8984 gram tartraat verloren bij drogen op 140° 0.0418 gr. H_2O = 4.6 pCt. De formule eischt 4.4 pCt. Het geheele gehalte aan kristalwater wordt door staan aan de lucht allengs weder opgenomen.

Zooals reeds Paul en Cownley opmerkten, is het zout iets meer oplosbaar dan het overeenkomstige tartraat van kinine en cinchonidine; dit blijkt uit het resultaat van de volgende proef.

10.1390 gram van eene bij 16° verzadigde oplossing leverden bij verdamping en droging op 150° een overschot, wegende 0.0017 gram. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid van het waterhoudende zout 1 : 571.

Neutraal tartraat. Het is mij tot nog toe niet gelukt, deze verbinding in kristallen te verkrijgen. Voegt men één molecule wijnsteenzuur en één molecule cupreïne bij elkaar onder toevoeging van eenig water ter oplossing, dan verkrijgt men geene homogene vloeistof; er wordt eene zekere hoeveelheid basisch tartraat gevormd, die niet oplost en er blijft eene zure vloeistof over, die bij voorzichtig uitdampen een amorph overschot achterlaat, waarin zich hier en daar kristalletjes, waarschijnlijk van het zure tartraat, vertoonen.

Zuur tartraat. $C_{19}H_{22}N_2O_2$, $2C_4H_6O_6 + H_2O$. Bij eene proef voegde ik 1 molecule cupreïne en eene geconcentreerde oplossing van 4 mol. wijnsteenzuur bij elkaar. Bij lang verwarmen loste alles tot eene heldere vloeistof op, die in een smal en hoog bekerglas onder een exsiccator verdampt, eindelijk vrij groote kleurlooze kristallen afzette. Deze, met warm water behandeld, ondergingen eene ontleding, waarbij basisch tartraat werd gevormd.

0.4847 gram van dit zout verloren bij drogen op 135° C. 0.0120 gr. H_2O = 2.5 pCt. Het residu, met water gekookt en met 0.885 × normale kalioplossing getitreerd, vorderde 2.5 C. C. daarvan, om eene neutrale reactie te voorschijn te brengen. Hieruit berekent men voor het wijnsteenzuurgehalte, dat vrij gekomen is ($^3/_4$ van het geheel) 0.16593 gr. = 34.3 pCt.

De aangegevene formule van het zure zout vordert 2.9 pCt.

water en 35.8 pCt. vrij wijnsteenzuur. De afwijking tusschen de berekende en de gevondene hoeveelheid wijnsteenzuur laat zich verklaren uit de geringe hoeveelheid stof, die ik voor de analyse kon gebruiken.

Neutraal chloroplatinaat. $C_{19} H_{22} N_2 O_2, H_2 Pt Cl_6 + H_2 O$. HESSE geeft voor het kristalwater van dit zout op een gehalte van 2.28 pCt. beantwoordende aan 1 $H_2 O$. Het door mij bij dubbele ontleding van neutraal hydrochloraat met platinachloorwaterstofzuur bereide praeparaat bevatte eveneens 1 $H_2 O$, zooals blijkt uit het volgende:

0.9461 gram verloren na drogen op 150° 0.0217 gram water = 2.3 pCt.

De formule eischt een gehalte van 2.44 pCt.

Het schijnt echter, dat het lichaam ook watervrij kan voorkomen, want een ander maal verloor eene hoeveelheid van 0.5727 gr. bij drogen op 150° slechts 0.0028 gr. d. i. $^1/_2$ pCt. water.

Wanneer men de uitkomsten vergelijkt, die ten aanzien van het S. D. V. der cupreïnezouten in waterige oplossing onder nagenoeg gelijke voorwaarden van concentratie zijn verkregen, dan ziet men weder hetzelfde verschijnsel, waarop ik reeds vroeger herhaaldelijk opmerkzaam heb gemaakt, namelijk dat aan het alkaloïde in basische en neutrale zouten een verschillend eigen S. D. V. toekomt en wel zóó, dat dit voor elke reeks van zouten nagenoeg gelijk is. Het S. D. V. is in de basische verbindingen steeds veel lager dan in de neutrale.

Wat dus vroeger vooral bij de twee door mij onderzochte alkaloïden apocinchonine en hydrochloorapocinchonine duidelijk werd aangetoond *), vinden wij hier terug. Dit blijkt voldoende uit het volgende tabelletje, waarin de S. D. V. zijn opgenomen, welke ik voor verdunde oplossingen van nagenoeg gelijke concentratie heb waargenomen.

---

*) *Verslagen en Mededeelingen der K. A. v. W.*, Deel XVIII, blz. 1 en vervolg.

Namen der zuren, waaraan het alkaloïde is gebonden.	S. D. V. van het alkaloïde in oplossingen van basische zouten.	S. D. V. van het alkaloïde in oplossingen van neutrale zouten.
Chloorwaterstofzuur.............	— 182°0	— 282°6
Broomwaterstofzuur.............	— 191°1	— 287°7
Joodwaterstofzuur................	— 178°1	— 283°2
Salpeterzuur....................	— 182°5	— 289°1
Chloorzuur......................	— 184°4	——
Zwavelzuur	——	— 289°9
Mierenzuur	— 188°0	——

Waarschijnlijk zullen de maxima van S. D. V., verkregen door aan één molecule van het alkaloïde in hetzelfde volumen vloeistof betrekkelijk meer en meer zuur toe te voegen, eene nog betere overeenkomst toonen, dan de in de laatste kolom opgenomen cijfers.

In elk geval bevestigt het thans verkregen resultaat mij op nieuw in de vroeger uitgesproken meening, dat de bepaling van het S. D. V. een middel kan opleveren, om het scheikundig karakter van optisch actieve alkaloïden te leeren kennen en te beslissen of zij één-, twee- of meerzurig zijn.

NOTIZ ÜBER DEN ANGEBLICH FOSSILEN,

MENSCHLICHEN UNTERKIEFER

VOM CABERGE BEI MAASTRICHT.

VON

K. MARTIN.

Beim Ausgraben der Zuid-Willemsvaart wurde im Jahre 1823 zwischen Maastricht und dem gegenüber Itteren an der Maas gelegenen Hocht eine Reihe von vorweltlichen Thierresten, menschlichen Gebeinen und anderen Gegenständen gefunden. Hierunter war auch ein menschlicher Unterkiefer, den Crahay für fossil erklärte, und welcher seither in der anthropologischen Literatur wiederholt genannt worden ist, indem er verschiedenen Forschern als Ausgangspunkt weittragender Spekulationen diente *).

Aus solchem Anlasse ersuchte mich G. DE MORTILLET im Jahre 1880 um einen Gypsabguss der »célèbre mâchoire humaine des alluvions quaternaires de Maestricht", in der Meinung, dass der Unterkiefer im Leidener Museum vor-

*) Vgl. Hierüber: CASIMIR UBAGHS. L'âge et l'homme préhistorique et ses utensiles de la station lacustre près Maastricht. Ruremonde (Jahreszahl fehlt). — Hier finden sich auch ausführliche Auszüge aus der Mittheilung Crahay's, die ursprünglich erschienen ist im: *Messager des sciences et des arts*, première livr. 1823, Gand. Ich stütze mich auf diese Auszüge, da es mir nicht gelang, die Originalarbeit zu erhalten.

handen sei. Freilich war dies nicht der Fall; aber es gelang mir, im zoologischen Reichs-Museum ein sehr sorgfältig gezeichnetes Profil aufzufinden, in das die Fundorte des Kiefers und der diluvialen Thierreste eingetragen waren und welches G. A. v. d. Dussen, Opzichter van den Waterstaat, 1824 gezeichnet hatte. Derselbe hatte auch die betreffenden Objekte gesammelt, und bereits in 1823 war von letzteren ein ausführlicher, beschreibender Catalog angelegt worden, der sich im Archive des geologischen Museums vorfand. Auch war in der Sammlung eine grosse Zahl der ausgegrabenen Knochen und Zähne vorhanden, während das Uebrige in verschiedene andere Museen zerstreut worden ist.

Das gesammte Material von diluvialen Resten und von Aufzeichnungen gestattete mir schon damals, den Schluss zu ziehen, dass der in Rede stehende Unterkiefer vielleicht gar nicht fossil sei, und ich theilte das Resultat meiner Untersuchung G. de Mortillet mit, ohne indessen je zu erfahren, ob Derselbe hiervon Gebrauch gemacht habe. Das Gleiche berichtete ich später mündlich Herrn Ubaghs, welcher l. c. meine Zweifel theilt — freilich zum Theil aus irrigen Gründen, da er sich im Wesentlichen auf die in mehrfacher Hinsicht unrichtigen Angaben von Crahay stützte *). Die Frage, ob der menschliche Ueberrest fossil sei, blieb auch bei Ubaghs noch offen.

Inzwischen stellte sich heraus, dass der Unterkiefer im anatomischen Cabinete der Leidener Universität sich befinde †), woselbst er Herrn T. Zaaijer lange bekannt war. Durch die Güte des Letzteren ist jetzt der menschliche Ueberrest wieder dem geologischen Museum einverleibt worden, um mit den

---

*) l. c. pag. 49.

†) Dass derselbe wirklich der gesuchte Kiefer sei, war nicht im mindesten zweifelhaft, da er die Nummer 45 trug, welche auch Catalog und Profil für den Gegenstand angaben. Handschrift und Art der Befestigung der Nummer auf dem Kiefer stimmen auch durchaus mit dem überein, was die Nummern der im geologischen Museum befindlichen thierischen Reste zeigen. Endlich war ihm noch eine lose Etiquette zugefügt, welche lautet: „ad prof. 15 ped. e Kaberg".

übrigen, bei Anlage der Willemsvaart gefundenen Objekten zusammen aufbewahrt zu werden. Es schien mir deswegen nicht überflüssig, an der Hand der alten authentischen Schriftstücke und der Sammlung selbst mitzutheilen, was vom geologischen Gesichtspunkte aus über den Fund des Unterkiefers zu sagen ist.

Der Unterkiefer ist im Caberge gefunden. Darunter versteht man ein niedriges, im N.W. von Maastricht gelegenes Plateau, welches sich bis Smeermaas ausdehnt und weiter nördlich über den Ort hinaus fortsetzt, hier aber nicht mehr als Caberg bezeichnet wird. Es erhebt sich etwa 20 m. über das Niveau der Zuid-Willemsvaart, und da die Schleuse der letzteren bei Maastricht ungefähr 47 m. über A.P. liegt *), so besitzt es demnach ± 70 m. Meereshöhe. In der Gegend von Smeermaas tritt das Plateau nahe an die Maas hinan und wurde es beim Graben des Canals angeschnitten. Das erwähnte Profil v. d. Dussen's bezieht sich auf diesen Anschnitt; es stellt den Aufschluss im Caberge südlich von Smeermaas dar und weiter nördlich von genanntem Orte den Aufschluss längs der Maas bis zu dem niedrigen Landstriche im Süden van Hocht. Soweit das Profil den Caberg betrifft, ist es in verkleinerter Copie diesen Zeilen beigefügt.

Staring giebt auf seiner Karte an, dass der Caberg und die Höhe von Smeermaas längs des Canals von Löss bedeckt werden; weiter nordwestlich von Smeermaas folgt zunächst Sand- und bald darauf Maasdiluvium. Den Untergrund des Cabergs kennt Staring nicht; derselbe vermuthet nur, dass er der Kreideformation angehöre †). Dewalque, welcher auf seiner Karte die älteren Formationen abgedeckt angelegt hat §), verzeichnet in der betreffenden Gegend Tertiär (Oligocän), und Ubaghs befindet sich somit in Einklang hiermit, wenn er in dem seiner Arbeit beigegebenen Profile von unten nach

---

*) L. Cohen Stuart, H. G. van de Sande Bakhuyzen en G. van Diesen, *Uitkomsten der Rijkswaterpassing*. 1888, pag. 21.

†) *Bodem van Nederland*. II, pag. 321.

§) *Carte géologique de la Belgique* 1 : 500.000.

oben folgen lässt: Tertiär (Tongrien), Maasdiluvium und Löss. Von der Richtigkeit dieses Profils, und besonders auch von dem Vorkommen eines typischen Lösses im Caberge, konnte ich mich überdies durch eine für das Leidener Museum von UBAGHS erworbene Sammlung überzeugen.

Das erwähnte Profil v. D. DUSSEN's giebt nun auch bereits drei verschiedene Schichten an: zu unterst einen blauen, muschelführenden Lehm, welcher unterhalb des Niveaus der Maas ansteht und dessen Alter sich auf Grund der vorliegenden Daten nicht mehr bestimmen lässt; darauf die »Kieselbank" genannte Schicht, welche den Beschreibungen zufolge ohne Zweifel als Maasdiluvium aufzufassen ist; endlich die »gelbe Erde", welche der Lössformation gleichzustellen ist. Dass Maasdiluvium und Löss in den Hauptzügen richtig durch v. D. DUSSEN geschieden sind, kann nach dem Studium des Catalogs nicht zweifelhaft sein, zumal auch die für die jüngere Schicht angegebene Mächtigkeit sehr gut mit der Darstellung von UBAGHS übereinstimmt.

In beiden Schichten, sowohl im Maasdiluvium als auch im Löss, ist eine grosse Anzahl vorweltlicher Thierreste, vor allem von Elephas primigenius, gefunden, und zwar befand sich der reichste Fundort unmittelbar nördlich von dem durch Smeermaas führenden Wege. Hier zeigte sich eine Depression im Profile des Maasdiluviums, welche später vom Löss angefüllt und ausgeebnet wurde, und in ihr sind die meisten Knochen und Zähne gefunden, namentlich am Grunde, unmittelbar im Hangenden des Maasdiluviums. Unter anderen stammt hieher ein prächtig erhaltener Mammuth-Unterkiefer mit Zähnen, den das Leidener Museum besitzt (N°. 1; L. M.) *), und verschiedene Molaren (N°. 7, 8 u. 12; L. M.) sind aus demselben Löss abkünftig.

Der menschliche Unterkiefer des Cabergs ist ebenfalls in der oberen Schicht, unmittelbar im Hangenden des Maasdiluviums gefunden (N°. 45; L. M.), und überträgt man das

*) Der Zusatz L. M., hier und im Folgenden, bedeutet, dass der Gegenstand sich im Leidener Geologischen Museum befindet.

Obige, von Smeermaas Mitgetheilte auch auf das Profil des Cabergs, so würde hienach dem in Rede stehenden Kiefer in der That ein hohes, vermuthlich jungdiluviales Alter, zukommen; wir würden in ihm den Rest eines Löss-Menschen zu sehen haben, und sein Vorkommen zusammen mit E. primigenius wäre durchaus erklärlich.

Nun lehrt aber das beigegebene Profil, dass im Caberge die jüngere beider Ablagerungen keine für Diluvium beweisende Versteinerungen geliefert hat: ihr entstammt nur der Unterkiefer und eine Anzahl von Knochen des Equus caballus, Wirbel, Beckentheile etc. (N⁰. 44; L. M.). Der älteren Schicht (Maasdiluvium) gehören die Nummern 34—38, 40—43 und 81.1⁰ an, und von diesen waren laut Catalog 34—38 Elephantenzähne; N⁰. 35 ist auch unter dem Profile v. d. Dussen's abgebildet und hienach sicher als Molar von Elephas zu bestimmen, während 3 Bruchstücke von Molaren und viele von Stosszähnen aus der Staring'schen Sammlung (L. M.) den Nummern 34, 36, 37 u. 38 zu entsprechen scheinen *). Ausserdem ist ein Unterkieferfragment von E. primigenius, abkünftig vom Caberge, in der Sammlung Staring's vorhanden. Ueber N⁰. 40—43 giebt der Catalog keinen näheren Aufschluss, als dass darunter grosse Knochen (vermuthlich Elephas) und Fragmente von Hörnern zu verstehen seien; N⁰. 81, 1⁰ endlich ist ein Gegenstand menschlichen Kunstfleisses, über den ich nichts weiter aussagen vermag †).

Selbstredend ist nun das Fehlen von diluvialen Thierresten in der jüngeren Schicht des Cabergs an und für sich kein Beweis dagegen, dass dieselbe auch hier dem Löss angehöre und der betreffenden jungdiluvialen Ablagerung von Smeermaas gleichzustellen sei; aber der Zusatz des Catalogs zu

---

*) Sie tragen nur die Angabe „Caberg", nicht eine auf das Profil bezügliche Nummer.

†) Der Catalog sagt hierüber wörtlich: „een klein antiek beeldwerk ter diepte van 14 ellen in zwarte kiezelgrond nabij het midden der doorsnede van den berg (omtrent de echtheid van dit stukje is het meest mogelijk onderzoek gedaan").

N⁰. 45 erregt grosse Bedenken. Denn hienach wurde der Kiefer in einem Sande gefunden, der deutlich geschichtet und in wellig gebogenen Lagen abgesetzt war (»in geele zand of zavelgrond, welke in onderscheidene serpenteerende stroomlagen was afgedeeld; van beneden deze natuurlijke lagen was eene bank van kiezel"). Bekanntlich hat aber der Löss ein ungeschichtetes Aeussere, und ist demnach der menschliche Unterkiefer sicherlich nicht in dieser Formation gefunden, wenngleich letztere an anderen Stellen des Plateaus des Cabergs eine grosse Verbreitung haben mag. Er könnte freilich aus Sedimenten stammen, die mit Löss wechsellagern; aber die einfachste Erklärung scheint mir die zu sein, dass das Lössplateau von Wasserrissen durchfurcht und sein Material stellenweise umgelagert worden ist, so dass sich der menschliche Unterkiefer in einer Bildung des jüngeren alluvialen Zeitalters befand. Dass v. d. Dussen diese umgelagerten Sedimente nicht von dem Löss auf primärer Lagerstätte unterschieden hat, würde sehr erklärlich scheinen.

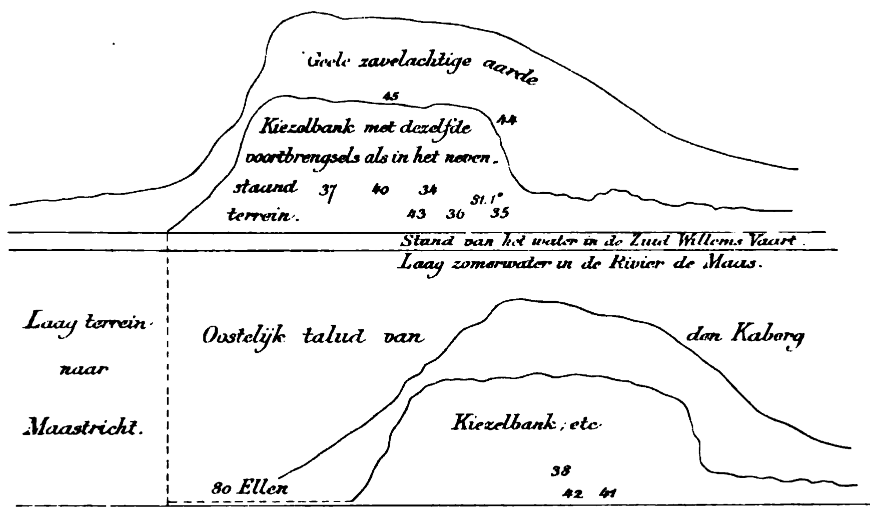
Obige Schlussfolgerung konnte ich, wie erwähnt, schon ziehen, bevor ich noch den Kiefer selbst gesehen; seit ich aber das Original untersucht habe, bin ich noch mehr in der Auffassung bestärkt worden, dass demselben unmöglich ein sehr hohes Alter zugeschrieben werden darf. Denn der Kiefer macht gar nicht den Eindruck eines Fossils, sieht vielmehr aus, als ob man ihn vom Kirchhofe aufgelesen hätte, ganz im Gegensatze zu den übrigen Resten, so auch den Knochen von Equus caballus, welche in der oberen Schicht des Cabergs, etwas tiefer und weiter nördlich, gefunden sind. Das ist auch den Sammlern der Objekte schon aufgefallen; denn es wird angegeben, dass man die Knochen der Wirbelthiere in Folge ihrer grossen Weichheit mit den Fingern kneten konnte, was bei dem menschlichen Ueberreste dagegen nicht der Fall war.

Rechnet man hinzu, dass der Kiefer laut der Erklärung meines Collegen Zaaijer und anderer Anatomen in seiner Form durchaus nichts Bemerkenswerthes zeigt, dass er ferner von Arbeitern aufgelesen ist, dass endlich Lösswände leicht

vertikal abblättern und so zu Missverständnissen beim Graben, in Folge von Einstürzen, unschwer Veranlassung geben können — so wird man vielleicht auch der oben gemachten Annahme nicht einmal beipflichten wollen, nach welcher der Unterkiefer aus dem Alluvium stamme, sondern ihn mit einiger Wahrscheinlichkeit einem Zeitgenossen zuschreiben dürfen.

Jedenfalls fehlt jeder hinreichende Grund, um von einem diluvialen Menschen aus dem Caberge von Maastricht zu sprechen.

Novbr 1888.



hoogte : lengte = 5 : 1.

G. A. v d Dussen.
1 Mei 1824.

VERSLAG

OVER EEN

VERHANDELING VAN **J. CARDINAAL.**

MEETKUNDIGE THEORIE DER SCHEEVE OPPERVLAKKEN VAN DE VIERDE ORDE.

(Voorgedragen in de Vergadering van 23 November 1888).



De verhandeling van den Heer J. CARDINAAL, over welke wij de eer hebben verslag uit te brengen, bevat in hoofdzaak een langs meetkundigen weg afgeleide verdeeling dier oppervlakken.

De schrijver doet onmiddellijk uitkomen, dat de door hem verkregen resultaten vóór hem reeds door anderen, als CAYLEY, CHASLES, CREMONA, REYE, ROHN, SALMON, SCHWARZ, enz. gevonden zijn. Toch wenschen wij deze vergadering voor te stellen, zijn verhandeling in de Verslagen en Mededeelingen te doen opnemen, omdat de weg, die hier tot bekende uitkomsten leidt, geheel nieuw is en verdient te worden openbaar gemaakt. Om dit in het licht te stellen zij het ons vergund, eerst in het kort de door de genoemde wiskundigen tot de bedoelde classificatie gebruikte hulpmiddelen na te gaan, om daarna het door den Heer CARDINAAL gevolgde beginsel daarnaast te stellen.

Een der belangrijkste scheeve oppervlakken van den vierden graad is in 1861 door CHASLES als in het voorbijgaan in de fransche Akademie ter sprake gebracht. CHASLES stelde zich toen voor, dat men een hyperboloïde met één blad door twee vlakken snijdt, dat men op deze doorsneden

de projectivische puntreeksen aanteekent, die er door de beschrijvende lijnen van een der beide stelsels op worden bepaald, en dat men de overeenkomstige punten dier projectivische puntreeksen vereenigt, nadat men een der beide doorsneden in haar geheel met betrekking tot de andere heeft verplaatst. Hij beschouwde dus dit oppervlak, dat we verder het »*oppervlak van* CHASLES" zullen noemen, als de meetkundige plaats der verbindingslijn van twee overeenkomstige punten van twee projectivische puntreeksen, die twee kegelsneden tot dragers hebben. En nog in hetzelfde jaar deelde hij mede, dat weldra van zijn hand een stelselmatige indeeling der regelvlakken van de vierde orde in *veertien* soorten verschijnen zou; deze indeeling heeft echter voor altijd op zich laten wachten.

Daarna was het CAYLEY, die zich met de indeeling der scheeve oppervlakken bezig hield. In zijn bekende drie verhandelingen »*On skew surfaces, otherwise scrolls*" beschouwt hij in het algemeen de oppervlakken S (m, n, p) voortgebracht door de beweging van een rechte lijn, die over drie kromme richtlijnen achtereenvolgens van de graden m, n, p heenglijdt. En na deze inleiding geeft hij een overzicht van de verschillende scheeve oppervlakken van den derden en vierden graad. Daarbij maakt hij hoofdzakelijk gebruik van de reeds vele jaren vroeger door hem gevonden stelling omtrent den graad der *dubbelkromme* van een scheef oppervlak, en onderscheidt hij *acht* verschillende soorten van scheeve oppervlakken van den vierden graad. Aan deze acht soorten heeft hij later nog tweemaal, op aanwijzing eerst van CREMONA en daarna van SCHWARZ, een paar nieuwe moeten toevoegen; van elk dezer *twaalf* soorten geeft hij bovendien de vergelijking aan met betrekking tot een homogeen coördinatenstelsel, dat een bepaalde ligging heeft ten opzichte van de dubbelkromme of haar samenstellende deelen. Zeer merkwaardig is o. i. zijn beschouwing van het oppervlak van CHASLES als de meetkundige plaats van de tot een lineair complex behoorende stralen, die koorden zijn van een bepaalde ruimtekromme van den derden graad.

Het is de verdienste van ons buitenlandsch lid CREMONA

bij de verdeeling, die ons thans bezig houdt, een tweede kenmerk op den voorgrond te hebben gebracht, door naast de dubbelkromme het ontwikkelbare oppervlak omhuld door de dubbelrakende vlakken van het scheeve oppervlak in de beschouwing op te nemen. Omtrent dit »*bitangent torse*" waren reeds in 1852 door Cayley verschillende belangrijke stellingen ontwikkeld, o. a. dat zijn klasse steeds aan den graad van de dubbelkromme gelijk is, enz. Door zich de bij twee punten der dubbelkromme behoorende dubbelraakvlakken en de in deze gelegene kegelsneden voor te stellen, kwam Cremona tot de voortbrenging van het oppervlak van Chasles terug. En door nu de verschillende mogelijke gevallen zoowel van dubbelkromme als van dubbelrakend ontwikkelbaar oppervlak na te gaan, kwam hij in zijn verhandeling »*Sulle superficie gobbe di quarto grado*" dadelijk tot *twaalf* soorten, die meetkundig van elkaar worden onderscheiden. Zijn verdeeling is vrij algemeen in gebruik.

De in zijn bekende handboeken door Salmon ontwikkelde behandeling der scheeve oppervlakken van de vierde orde, die bijna geheel berust op een onderzoek der verschillende vormen van de vergelijking dier oppervlakken, heeft weinig punten van aanraking met de meetkundige beschouwingen van den Heer Cardinaal. We bepalen ons dus tot de opmerking, dat de uitkomsten van Salmon volkomen met die van Cayley en Cremona overeenstemmen.

Wat in zijn »*Geometrie der Lage*" door Reye omtrent regeloppervlakken van den vierden graad geleverd is, mag hier allerminst worden gemist. Want van alles wat omtrent deze oppervlakken geschreven is, heeft de door Reye gevondene voortbrengingswijze nog wel de meeste aanrakingspunten met het door den Heer Cardinaal aan zijn classificatie ten grondslag gelegde nieuwe beginsel. Reye laat nl. de raakvlakken van twee niet concentrische kegelvlakken van den tweeden graad één aan één met elkaar overeenkomen en vindt dan langs dezen weg, dualistisch tegengesteld aan den door Chasles gevolgden, het oppervlak van Chasles terug. Maar het kon niet in de bedoeling van Reye liggen aldus tot een verdeeling onzer oppervlakken te geraken.

Eindelijk is nog door ROHN een nieuw middel ter classificatie van de bedoelde oppervlakken gegeven. ROHN beschouwde de reeds door CREMONA aangegevene twee hoofdgroepen der scheeve oppervlakken van den vierden graad, nl. de oppervlakken van het nulde geslacht, die dus een *ruimtekromme van den derden graad* tot dubbelkromme hebben, en de oppervlakken van het eerste geslacht, wier dubbelkromme uit *twee elkaar kruisende lijnen* is samengesteld, als de meetkundige plaats der verbindingslijn van de overeenkomstige punten van twee puntreeksen, tusschen welke een verwantschap (2,2) bestaat; bij de oppervlakken van de tweede groep zijn deze puntreeksen over de beide rechte lijnen uitgespreid; bij die van de eerste hebben zij de kubische dubbelkromme tot gemeenschappelijken drager. Dit denkbeeld wordt door ROHN stelkundig uitgewerkt en tevens ten grondslag gelegd aan de constructie van tien modellen, door de firma L. BRILL in Darmstadt in den handel gebracht.

Bedenkt men nu, dat SCHWARZ zich in 1869 reeds met de classificatie der scheeve oppervlakken van den vijfden graad ging bezig houden, omdat deze de oppervlakken van den vierden graad grondig genoeg onderzocht achtte, dan behoort er eenige moed toe de litteratuur over dit onderwerp thans nog te vermeerderen. En toch heeft o. i. de verhandeling van den Heer CARDINAAL ook thans nog alle recht van bestaan. Want het door hem ontwikkelde beginsel om de indeeling der scheeve oppervlakken van den vierden graad te gronden op de algemeene voortbrengingswijze van een niet regelrecht oppervlak met behulp van twee projectivische bundels van oppervlakken van den tweeden graad is geheel nieuw. Immers, tusschen de door REYE en door den Heer CARDINAAL aangegeven voortbrengingswijzen bestaat slechts deze overeenkomst, dat het oppervlak bij beiden de meetkundige plaats is der snijlijn van de overeenkomstige elementen van twee projectivische bundels; maar deze familietrek is o. i. zoo ondergeschikt, dat men in het werk van REYE de kiem niet zien mag van de verhandeling van den Heer CARDINAAL. Want verder is alles verschil. Bij REYE zijn de

bundels vlakkenbundels, bij CARDINAAL zijn het bundels van oppervlakken; bij REYE is het bewegend element reeds dadelijk een rechte lijn, bij CARDINAAL moeten juist die bijzondere gevallen worden opgezocht, waarin de bewegende deelen der ruimtedoorsnee van den vierden graad rechte lijnen worden, enz.

In deze laatste opmerking is naar onze meening tevens het verdienstelijke van de in onze handen gestelde verhandeling aangewezen. Want heeft men eenmaal het denkbeeld opgevat, te onderzoeken in welke verschillende gevallen het bewegende deel der doorsnee van de overeenkomstige oppervlakken van twee projectivische bundels van den tweeden graad uit een of meer rechte lijnen bestaat, dan volgt het overige bijna van zelf. Dan komt men met den Heer CARDINAAL onmiddellijk tot acht groepen van oppervlakken, die zich tot vier reduceeren, en levert ook de onderverdeeling van elk dezer groepen bijna geen moeielijkheden meer op. Alleen de meetkundige onderscheiding der verschillende vormen, die samenhangen met het al of niet bestaanbaar zijn der »vertakkingspunten" der beide puntreeksen van ROHN, tusschen welke een verwantschap (2,2) bestaat, der zoogenaamde *pinch-points* van CAYLEY, kan dan verder nog bezwaren opleveren; deze bezwaren zijn echter door den Heer CARDINAAL met behulp van de bekende vormen der vlakke kromme van den derden graad op verdienstelijke wijze uit den weg geruimd.

Wij wenschen nog één opmerking te maken. De Heer CARDINAAL heeft van elk zijner groepen eenige soorten afgeleid, en deze eenvoudig naast elkaar geschikt zonder ook maar eenigzins aan te wijzen in welke rangverhouding deze soorten tot elkaar staan, zonder van een paar soorten aan te geven of ze gelijkwaardig en dus aan elkaar gecoördineerd zijn dan wel of de een minder algemeen dan de ander en dus aan deze gesubordineerd is. Zoo bevat de eerste groep drie soorten, die eenvoudig naast elkaar gesteld worden, hoewel de eerste en tweede aan elkaar gelijkwaardig zijn en alleen verschil opleveren met betrekking tot bestaanbaarheid, terwijl de derde de grens vormt tus-

schen beide en van deze dus een gemeenschappelijk bijzonder geval uitmaakt. We achten het vooral van belang hierop te wijzen, omdat de aangestipte onvolledigheid bij al de tot heden geleverde indeelingen der scheeve oppervlakken van den vierden graad in bijna dezelfde mate wordt aangetroffen en er in het algemeen bij deze classificatie te weinig gelet is op het onderscheid tusschen verschillen van coördinatie als verschil in ligging met betrekking tot het vlak in het oneindige, verschil in bestaanbaarheid, enz. en verschillen van subordinatie, die in de eerste plaats in aanmerking behooren te komen. Zoo vinden we bijv. niet aangegeven — wat overigens zeer duidelijk is — dat het zevende oppervlak van Cremona, d. i. de meetkundige plaats van de koorden eener kubische ruimtekromme, die een gegeven rechte lijn snijden, een bijzonder geval is van het eerste oppervlak van Cremona, d. i. van het oppervlak van Chasles, evenals de vereeniging van alle lijnen die een gegeven lijn snijden een bijzonder geval vormt van een lineair complex. Natuurlijk is de vermelding van het *constantenaantal* der oppervlakkensoort, d. i. van het aantal punten, waardoor het oppervlak — zij het dan ook niet ondubbelzinnig — bepaald wordt, het middel om de bedoelde onvolledigheid geheel weg te nemen.

Terwijl wij den Heer Cardinaal dit punt ter overweging aanbevelen, eindigen wij met de verzekering, dat we ook zelfs zonder de bijvoeging dier getallen de verhandeling gaarne in de Verslagen en Mededeelingen zullen zien verschijnen.

Amsterdam, 23 Nov. 1888.

P. H. SCHOUTE,
D. BIERENS DE HAAN

MEETKUNDIGE THEORIE

DER

SCHEEVE OPPERVLAKKEN VAN DE VIERDE ORDE.

DOOR

J. CARDINAAL.

Leeraar aan de H. B. S. te Tilburg.



I. INLEIDING.

1. Onder de oppervlakken van hoogere orde behooren de scheeve oppervlakken tot die, welker gedaante en eigenschappen het beste kunnen worden nagegaan. Voor zoover het betreft oppervlakken van de vierde orde, is dit dan ook geschied in vele wiskundige verhandelingen, van welke de volgende genoemd worden:

CHASLES, *Mémoire sur les surfaces du* 3e et 4e *degré.* Comptes rendus. T. 52 blz. 1099 en T. 53 blz. 888.

CAYLEY, *Philosophical transactions.* Vol. 153, 154, 159, *Memoirs on Skew surfaces, otherwise Scrolls.*

REYE, *Geometrie der Lage II.* Vortrag 15 (2e druk).

H. A. SCHWARZ, CRELLE's *Journal.* Bd. 67.

CREMONA, *Sulle superficie gobbe die quarto grado.*

K. ROHN, *Math. Annalen.* Bd. XVIII en Bd. XXIV.

K. ROHN, *Die verschiedenen Arten der Regelflächen vierter Ordnung;* geschrift behoorende bij de verzameling mathematische modellen van BRILL te Darmstadt.

SALMON, *Analytische Geometrie des Raumes,* II, p. 430—442 (3e druk).

2. Het zij mij vergund, met enkele woorden eenige uit-

komsten dezer verhandelingen, voor zooverre het voor dit opstel noodig is, te zamen te vatten. CAYLEY geraakte het eerste tot eene ordening der scheeve oppervlakken van de vierde orde door eene vlakke doorsnede te bepalen. Opmerkende, dat het oppervlak noodzakelijk eene dubbelkromme en dus eene doorsnede minstens twee dubbelpunten bevatten moet, en de verschillende gevallen van dubbelpunten beschouwende in verband met de dubbelkrommen, uit welke deze ontstaan, kwam CAYLEY tot acht soorten.

SCHWARZ deelde schriftelijk aan CAYLEY mede, dat hij nog twee andere wijzen van ontstaan ontdekt had, en weldra vulde CREMONA het getal soorten tot twaalf aan, met de opmerking, dat deze aanvulling haar ontstaan te danken had aan het invoeren van het dubbelrakende ontwikkelbaar oppervlak (bitangent torse), 'tgeen eerst door CAYLEY niet geschied was *).

3. Eene groote uitbreiding onderging de kennis van de gedaante der scheeve oppervlakken van de vierde orde, toen, naar aanwijzing van K. ROHN, de firma BRILL te Darmstadt 10 typen van deze werkelijk uit zijden draden vervaardigde; de door ROHN aan deze oppervlakken toegevoegde verhandeling geeft een ongemeen helder inzicht in de verschillende vormen †). In deze verhandeling gaat de schrijver uit van vergelijkingen; de verschillende vormen dezer vergelijkingen dienen als uitgangspunten ter beredeneering van de eigenschappen en de verschillende gedaanten van het oppervlak.

Langs een geheel anderen weg komt REYE tot eenige typen van scheeve oppervlakken van de vierde orde. Bij de bespreking van het stralenstelsel van de eerste orde merkt hij op, dat stralen van dit stelsel, aan enkele beperkende voorwaarden onderworpen, een scheef oppervlak doen ont-

---

*) Deze mededeeling geschiedt door CAYLEY zelven in de derde der aangehaalde verhandelingen.

†) Een dezer modellen bevindt zich aan de Universiteit te Amsterdam. Met de meeste welwillendheid werd ik in de gelegenheid gesteld, dit eenigen tijd te kunnen bestudeeren.

staan, en leidt hij als gevolg af, dat, wanneer de raakvlakken van twee kegelvlakken van den tweeden graad in projectief verband gesteld worden, de snijlijnen van de homologe raakvlakken een scheef oppervlak van de vierde orde beschrijven; slechts een deel der mogelijke vormen wordt evenwel op deze wijze verkregen. De laatste behandeling onderscheidt zich door haar zuiver meetkundigen grondslag van de voorgaande.

4. Het doel van de hier volgende behandeling is, langs zuiver meetkundigen weg tot eene volledige verdeeling en volkomen kennis van de vormen der scheeve oppervlakken van de vierde orde te geraken; daarbij zullen vooral de volgende twee punten in het licht gesteld worden.

Een scheef oppervlak van de vierde orde kan steeds door projectieve grondvormen geconstrueerd worden.

Alle soorten kunnen op deze wijze worden verkregen, en men kan tot een volledig inzicht van alle vormen geraken.

De uitkomsten zullen blijken overeen te stemmen met die, door Rohn langs analytischen weg verkregen.

5. Eenige bekende en voldoend bewezen meetkundige stellingen worden vooropgesteld, nl.

Een scheef oppervlak van de n^{de} orde is ook van de n^{de} klasse.

Twee projectieve bundels oppervlakken van de tweede orde beschrijven door de doorsnijding hunner homologe oppervlakken een oppervlak van de vierde orde O^4. Op dit oppervlak liggen twee stelsels scheeve krommen van de vierde orde en de eerste soort.

Elk tweetal krommen van een zelfde stelsel kan als basiskrommen dienen van twee bundels oppervlakken van de tweede orde, die O^4 doen ontstaan.

Door twee krommen, tot verschillende stelsels behoorende, kan een oppervlak van de tweede orde worden gebracht.

Aan deze stellingen kunnen de wederkeerige worden toegevoegd; men kan dus een oppervlak der vierde klasse construeeren door twee projectieve scharen oppervlakken van de tweede klasse.

II. Verdeeling in groepen.

6. Op grond der laatstgenoemde stellingen kan men uit projectieve bundels oppervlakken van de tweede orde een oppervlak van de vierde orde doen ontstaan; evenals een scheef oppervlak van de tweede orde door de beweging eener rechte lijn ontstaat, wordt dit oppervlak door de beweging eener scheeve kromme van de vierde orde beschreven.

Een scheef oppervlak R^4 zal evenwel alleen dan ontstaan, wanneer het bewegende element eene rechte lijn is. Hieruit volgt, dat twee homologe oppervlakken der beide bundels elkander zoodanig moeten snijden, dat de doorsnede òf wel uit eene rechte lijn, òf wel uit twee elkander kruisende lijnen bestaat. Opdat dit plaats grijpe, moet een deel der basiskrommen van beide bundels tezamenvallen; het overblijvende deel der doorsnijding zal dan, als de oppervlakken den geheelen bundel doorloopen, R^4 beschrijven. Daar nu de beide basiskrommen geheel op het oppervlak gelegen zijn, zullen hare twee samenvallende gedeelten eene dubbelkromme op het oppervlak vormen; men kan dus de oppervlakken verdeelen naar den aard der dubbelkromme. Hieruit volgt de navolgende verdeeling:

Eerste geval. De basiskrommen zijn twee scheeve vierzijden; twee overstaande zijden van de eene vierzijde vallen te zamen met twee overstaande zijden van de tweede.

Tweede geval. De basiskrommen bestaan beiden uit eene scheeve kromme van de derde orde met eene koorde. De kromme behoort tot de beide basiskrommen.

Derde geval. De wederkeerige wijze van ontstaan geeft aanleiding tot hetzelfde geval als het eerste, omdat eene scheeve vierzijde zoowel een bijzonder geval is van de basiskromme als van de basis-ontwikkelbare.

Vierde geval. Is wederkeerig met het tweede, waaruit volgt: De beide scharen oppervlakken van de tweede klasse zijn beschreven in eene gemeenschappelijke ontwikkelbare van de derde klasse, terwijl tot elk nog eene van wee verschillende assen der ontwikkelbare behoort.

Vijfde geval. Een der bundels is overgegaan in eene vlakken-involutie, welker as tevens de koorde is van eene scheeve kromme van de derde orde. De koorde met de kromme vormen de basiskromme van den tweeden bundel.

Zesde geval. De beide bundels zijn overgegaan in vlakken-involutiën.

De beschouwing der wederkeerige gevallen geeft wederom:

Zevende geval. Eene der scharen is overgegaan in eene punteninvolutie, welker draaglijn tevens eene as is van een ontwikkelbaar oppervlak der derde klasse. Deze ontwikkelbare vormt met de daarbij behoorende as de basis-ontwikkelbare der tweede schaar.

Achtste geval. De beide scharen zijn overgegaan in punteninvolutiën.

7. Deze opsomming bevat alle hoofdgevallen. De ontwikkeling zal evenwel doen zien, dat het eerste en derde geval volkomen overeenstemmen, terwijl het zesde en het achtste als een bijzonder geval van deze kunnen worden aangemerkt. Dezelfde overeenstemming zal blijken te bestaan tusschen het tweede en het vierde, waaruit nu de volgende verdeeling in groepen voortvloeit:

Eerste groep, bevattende de gevallen I, III, VI, VIII.

Tweede groep, bevattende de gevallen II, IV.

Derde groep, geval V.

Vierde groep, geval VII.

Bij de behandeling zal elk dezer groepen weder in onderdeelen gesplitst worden.

III. Eerste groep.

8. Bij de oppervlakken dezer groep zijn de volgende gevallen in het oog te houden:

Geval A. De te zamen vallende twee paren overstaande zijden der vierzijden, zijn bestaanbaar en liggen op eindigen afstand.

Geval B. Deze zijden zijn toegevoegd imaginair.

Geval C. Deze overstaande zijden liggen op oneindig kleinen afstand van elkander.

Elk dezer gevallen dient afzonderlijk behandeld te worden.

Geval A.

9. Laten gegeven zijn de elkaar kruisende lijnen d en d', benevens hare transversalen a_1, a_2; b_1, b_2. Neemt men nu als basiskromme van den eersten bundel $d\,d'\,a_1\,a_2$, van den tweeden $d\,d'\,b_1\,b_2$, dan komt met een oppervlak $A^2{}_n$ een oppervlak $B^2{}_n$ overeen. Er moet eerst worden nagegaan op welke wijze men de bundels in projectief verband met elkander kan stellen.

10. Men neme daartoe op d een punt P en beschouwe dit punt als middelpunt van twee concentrische stralenbundels in het vlak $P\,d'$; elke straal van één dezer bundels is eene beschrijvende lijn van het oppervlak $A^2{}_n$ en de daarmede homologe straal van den anderen eene beschrijvende lijn van een oppervlak $B^2{}_n$. De oppervlakken snijden elkander volgens nog twee transversalen van d en d'. Door de beweging van den straal wordt de geheele bundel oppervlakken beschreven en daardoor het scheeve oppervlak R^4. De twee dubbelstralen der beide projectieve stralenbundels zijn de beide beschrijvende lijnen, uit P gaande.

Het is licht in te zien, dat de voorgaande constructie ook omgekeerd opgevat kan worden; door d' een vlak π leggende, vindt men het punt P als snijpunt van π met d, en kan men weder de twee projectieve stralenbundels verkrijgen; door deze opmerking wordt de wederkeerigheid van het oppervlak met zichzelf nog nader toegelicht.

11. De doorsnijding van het oppervlak met een vlak π wordt verkregen door de doorsnijding van π met de verschillende oppervlakken van de bundels te construeeren. Daardoor ontstaan twee kegelsnedenbundels met de basispun-

De omhullingskegel uit een punt P aan het oppervlak R^4 wordt verkregen door de omhullingskegels uit P aan de verschillende oppervlakken van de bundels te construeeren. Deze zullen twee concentrische kegelscharen vormen met de basis-

ten: $DD'A_1A_2$; $DD'B_1B_2$; de snijpunten der homologe kegelsneden vormen eene vlakke kromme van de vierde orde c^4 met de beide dubbelpunten D en D'. Deze kromme zal dus van de achtste klasse zijn en acht dubbelraaklijnen bezitten. De doorsnijding verkrijgt eene eenvoudiger gedaante, wanneer men een vlak door eene beschrijvende lijn l van R^4 legt; deze lijn behoort tot de doorsnede, het overschietende deel is dan eene kromme van de derde orde c^3 zonder dubbelpunt, d. i. van de zesde klasse. De snijpunten van c^3 met l zijn de snijpunten van de dubbellijnen met het vlak π en het raakpunt van π met R^4.

vlakken: $\delta\delta'\alpha_1\alpha_2$; $\delta\delta'\beta_1\beta_2$; de gemeenschappelijke raakvlakken der homologe kegelvlakken omhullen een kegeloppervlak γ^4 van de vierde klasse met de beide dubbelraakvlakken δ en δ'. Dit kegeloppervlak is dus van de achtste orde en bezit acht dubbelstralen. De omhullingskegel verkrijgt eene eenvoudiger gedaante, wanneer men een punt aanneemt op eene beschrijvende lijn l van R^4; deze lijn is een straal tot den omhullingskegel behoorende; het overschietende deel γ^3 is dan een kegelvlak van de derde klasse en de zesde orde. De raakvlakken, door l aan γ^3 gebracht, zijn de vlakken, door P en de dubbellijnen gebracht en het raakvlak door P aan R^4.

12. Hieruit volgt, dat het oppervlak bepaald is door de beide dubbellijnen en acht punten. Men trekke namelijk eene beschrijvende lijn l door een der punten en legge door l een vlak π; de beschrijvende lijnen door de andere punten snijden π in zeven punten; deze en de snijpunten D en D' van l met d en d' zijn negen punten eener kromme van de derde orde, door welke deze doorsnede bepaald is. Om haar te construeeren, kieze men als basispunten van den kegelsnedenbundel D, D' en nog twee punten, en bepale het daarbij behoorende middelpunt C van den stralenbundel; de lijn l en de stralenbundel door C moeten worden beschouwd als tweede bundel van de in eene lijn met eene kromme van de derde orde overgegane kromme van de vierde orde. Op die wijze kan men een willekeurig aantal doorsneden bepalen.

De wederkeerige constructie geldt voor den omhullingskegel. Daar, volgens de constructie van krommen van de derde orde, elk willekeurig tweetal punten met D en D' als basispunten van den kegelsneden-bundel kan beschouwd worden, volgt hieruit, dat men elk tweetal transversalen van d en d' met dezen als basiskromme kan beschouwen van een' der bundels, die R^4 doen ontstaan *).

13. Men kan nu meetkundig de snijding bepalen van het scheeve oppervlak R^4 met eene rechte lijn en met verschillende andere scheeve oppervlakken, die men door de dubbellijnen legt. Zij bijv. R^2 een zoodanig scheef oppervlak van de tweede orde en π wederom een snijvlak door eene beschrijvende lijn van R^4; nu ontstaan in π eene kromme van de derde orde c^3 en eene van de tweede c^2, welke D, D' en dus nog vier andere punten met elkaar gemeen hebben; daar R^2 en R^4 beschreven worden door de transversalen van d en d', die c^2 en c^3 snijden, zoo volgt hieruit:

Een scheef oppervlak van de vierde orde, tot de eerste groep behoorende, snijdt een scheef oppervlak van de tweede orde, door zijne twee dubbellijnen gebracht, volgens vier beschrijvende lijnen van beide.

Op dezelfde wijze verkrijgt men:

Een scheef oppervlak van de vierde orde, tot de eerste groep behoorende, snijdt een scheef oppervlak van de derde orde R^3, welks dubbellijn met d samenvalt, en van hetwelk d' de enkelvoudige richtlijn is, volgens zes gemeenschappelijke beschrijvende lijnen.

Een scheef oppervlak van de vierde orde, tot de eerste groep behoorende, snijdt een ander scheef oppervlak van dezelfde orde en groep, dat de dubbellijnen met het eerste gemeen heeft, volgens acht beschrijvende lijnen.

---

*) Bij deze en de volgende constructiën worden bekend ondersteld de meetkundige constructie van krommen van de derde en vierde orde uit kegelsneden- of stralenbundels, benevens de methoden om snijpunten dezer krommen te bepalen door deze constructiën terug te brengen tot die der snijpunten van kegelsneden onderling. Deze opmerking geldt voor elk der te behandelen gevallen en constructiën dezer verhandeling.

In het eerste geval wordt het vlak π gesneden volgens twee krommen van de derde orde, van welke de eene in D een dubbelpunt heeft; in het tweede geval ontstaan er in π eene kromme van de vierde orde en eene van de derde, die door de beide dubbelpunten van de voorgaande gaat.

14. De verdeeling van dit oppervlak in soorten geschiedt het beste door, gelijk ook door ROHN langs analytischen weg gedaan wordt, op de dubbellijnen die bijzondere punten op te sporen, die door CAYLEY pinchpoints, d. i. klempunten, genoemd zijn; het zijn die punten, in welke de beide raakvlakken zich vereenigen, zoodat elk vlak door een dezer punten gebracht, het oppervlak snijdt volgens eene kromme met een keerpunt. Als wederkeerige vorm dezer klempunten komen dan in aanmerking de vlakken, door de dubbellijnen gebracht, in welke de beide raakpunten zich vereenigen; de omhullingskegel, welks top in een punt van zulk een vlak ligt, bezit dan een buigraakvlak. Ten einde deze klempunten op te sporen, brenge men weder een vlak π door eene beschrijvende lijn l, en denke in dit vlak de kromme c^3 geconstrueerd. Brengt men door d vervolgens een vlak α, dan snijdt dit d' in S' en π volgens eene rechte lijn p, die c^3, behalve in D, in twee punten P_1 en P_2 snijdt. Nu zijn P_1 S' en P_2 S' twee beschrijvende lijnen van R^4; de vlakken $d' S' P_1$ en $d' S' P_2$ zijn de raakvlakken van R^4 in S', en de snijpunten $d—S' P_1$ en $d—S' P_2$ de raakpunten van α met R^4. Vallen P_1 en P_2 te zamen, d. i. wordt $D P$ eene raaklijn, dan verkrijgt men eene beschrijvende lijn s, die uit twee samenvallende beschrijvende lijnen bestaat, en die men grenslijn kan noemen; de twee raakvlakken door d', zoowel als de beide raakpunten op d vallen nu te zamen, en het punt S' is een klempunt op d', terwijl het vlak $S' d$ een klemvlak door d is. Een vlak door s snijdt R^4 in eene kromme van de derde orde, van welke s eene raaklijn in S' is; terwijl een punt op s een omhullingskegel doet ontstaan, van welken s een straal is.

15. De vorm van het oppervlak R^4 hangt af van de bestaanbaarheid of onbestaanbaarheid dezer klempunten. Ten einde deze bestaanbaarheid te onderzoeken, legt men weder

even als vroeger (12) een vlak π door de beschrijvende lijn l, welke de daarin ontstaande kromme c^3 in D en D' snijdt, en construeert de poolkegelsnede van D ten opzichte van c^3; deze is bepaald door D zelf, hare raaklijn door D, zijnde dit tevens de raaklijn aan de kegelsnede, homoloog met straal CD; en drie punten, toegevoegd harmonisch aan D ten opzichte van de beide andere snijpunten eener lijn door D met c^3. De snijpunten van c^3 met de poolkegelsnede zijn, de gezochte raakpunten. Men komt nu tot de volgende drie gevallen:

de snijpunten zijn alle vier bestaanbaar;

twee der snijpunten zijn bestaanbaar, de beide andere toegevoegd imaginair;

de snijpunten zijn allen imaginair.

In het eerste en derde geval is de vorm der kromme c^3 tweedeelig *); zij bestaat uit een ovaal en eenen tak; het eerste wordt steeds in een even, de tweede in een oneven aantal punten gesneden. In het eerste geval ligt D op den tak, in het derde op het ovaal. Het punt D' kan nu in beide gevallen òf op den tak òf op het ovaal liggen. Hieruit volgt de volgende verdeeling:

Ten eerste, de kromme is tweedeelig:

a. D en D' liggen beiden op den tak.

b. D en D' liggen beiden op het ovaal.

c. D ligt op den tak, D' op het ovaal.

Ten tweede, de kromme is ééndeelig:

d. D en D' liggen beiden op den tak.

Hieruit volgt nu ten opzichte van de klempunten:

a. De vier klempunten op d zoowel als op d' zijn bestaanbaar.

b. De klempunten op den d en d' zijn imaginair.

c. De vier klempunten op $d'd$ zijn bestaanbaar, die op dd' imaginair.

d. Twee klempunten op elk der dubbellijnen zijn bestaanbaar, twee toegevoegd imaginair.

---

*) Vergelijk voor den vorm der kromme c^3: R. STURM, Ueber die ebenen Curven dritter Ordnung, CRELLE's, *Journal*, Bd. 90 blz. 83.

Deze meetkundige beschouwing leidt dus tot alle vormen van oppervlakken, door ROHN verkregen.

16. Ik wensch nog in 't kort de aandacht te vestigen op de gedaanten der doorsnijdingskrommen en omhullingskegels bij deze verschillende vormen.

a. Daar de vier klempunten, zoowel op d als op d', bestaanbaar zijn, wordt elk der dubbellijnen in vier deelen verdeeld; twee dubbelsegmenten, op welke de uitgangspunten der bestaanbare beschrijvende lijnen liggen en twee geïsoleerde segmenten, op welke de uitgangspunten der imaginaire beschrijvende lijnen liggen. De dubbelsegmenten zijn dus door bestaanbare, de geïsoleerde door imaginaire beschrijvende lijnen verbonden. Een vlak zal alzoo R^4 snijden volgens twee volkomen van elkander gescheiden deelen, m. a. w. de doorsnede zal bestaan uit twee ovalen, (takken van evene orde) O_1 en O_2, die elkander niet snijden. Daar de kromme in het geheel twee bijzondere punten moet hebben, zoo heeft men, d_1, d_2, k_1, k_2 de dubbel- en keerpunten van O_1 en O_2, i de geïsoleerde punten noemende, de navolgende vormen:

d_1	2	1	1	1	1	0	0	0	0
k_1	0	0	1	0	0	2	1	1	0
d_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
k_2	0	0	0	1	0	0	1	0	0
i	0	0	0	0	1	0	0	1	2

b. Daar er geene geïsoleerde segmenten zijn, zal elk vlak R^4 snijden volgens twee ovalen; de beide dubbelpunten ontstaan nu door de snijding der beide ovalen.

c. Dit oppervlak komt overeen met *a*, doordat een der deelen van de snijkromme een dubbelpunt bezit; en met *b*, doordat een ander dubbelpunt ontstaat door de snijding van twee deelen der kromme; hieruit volgt, dat de kromme bestaat uit twee oneven takken. De eene tak heeft een dubbelpunt, de andere niet; beide takken snijden elkander in een punt, dat dus geen geïsoleerd of keerpunt kan worden. De vormen der doorsnede kunnen dus drie in getal zijn,

naar gelang het eerste bijzondere punt een dubbelpunt, keerpunt of geïsoleerd punt is.

d. In dit geval bestaat de kromme slechts uit één deel; dit ovaal heeft twee bijzondere punten, welke dubbel-, keer- of geïsoleerde punten kunnen zijn, zoodat zes verschillende vormen mogelijk zijn.

Er kan geen bezwaar bestaan, de vormen van de omhullingskegels voor de verschillende gevallen van het oppervlak na te gaan; de beschouwing, hiertoe noodig, is wederkeerig met de vorige.

17. Een tweetal gedaanten, die dit oppervlak kan aannemen, dienen nog in aanmerking te worden genomen.

Het oppervlak kan ontstaan door twee projectieve vlakkeninvolutiën; dan is de vlakke doorsnede eene kromme van de vierde orde c^4, welke ontstaat door de snijding van de homologe elementen van twee projectieve straleninvolutiën. Het onderzoek der gedaante van het oppervlak kan op geheel dezelfde wijze geschieden; slechts worde hier de volgende bijzonderheid opgemerkt. Daar twee der raakpunten van de raaklijnen, aan c^4 uit D getrokken, in eene rechte lijn liggen met D', zoo liggen de beide grenslijnen door deze punten gaande in een vlak door d', en snijden zij elkander in een punt van d.

De tweede gedaante ontstaat, wanneer R^4 geheel en al imaginair wordt; terwijl d en d' bestaanbaar blijven.

De doorsnijding met een vlak is alsdan eene imaginaire kromme van de vierde orde met twee bestaanbare geïsoleerde punten. Deze kromme is de centrale of orthogonale projectie van de imaginaire snijkromme van twee oppervlakken van de tweede orde, die geen enkel punt gemeen hebben.

Het oppervlak, ontstaan uit twee projectieve punten-involutiën stemt overeen met dat, uit twee projectieve vlakkeninvolutiën ontstaan.

Geval B.

18. In plaats van de elkaar kruisende lijnen d en d' zijn nu gegeven de lijnen l_1, l_2, l_3, l_4, welker gemeenschappelijke transversalen ondersteld worden toegevoegd imaginair

te zijn. De hier volgende constructie kan natuurlijk ook toegepast worden op scheeve oppervlakken met bestaanbare dubbellijnen.

Daar de lijnen a_1, a_2 en b_1, b_2, behoorende tot de beide basiskrommen, de imaginaire transversalen van l_1, l_2, l_3, l_4 snijden moeten, zoo behooren zij tot het stralenstelsel van den eersten graad, door deze vier bepaald. Het projectief verband wordt nu op de volgende wijze geregeld.

19. Men trekke eene lijn p, die a_1 in A_1, b_1 in B_1 snijdt, en neme op p twee projectieve puntenrijen aan; de twee stralen a_n en b_n van het stralenstelsel, die men door twee homologe punten trekken kan, behooren tot twee homologe oppervlakken, die dus door a_1, a_2, a_n en b_1, b_2, b_n bepaald zijn, en welker doorsnede construeerbaar is.

Hierdoor worden twee beschrijvende lijnen van het oppervlak bepaald; men kan, aldus voortgaande, er meerdere vinden. De stralen door de dubbelpunten op p zijn twee beschrijvende lijnen van het oppervlak R^4.

20. Na de beschouwingen, bij het voorgaande geval gehouden over het oppervlak, wat betreft zijnen vorm en de gedaante zijner vlakke doorsnede, zal het voldoende zijn, eenige uitkomsten te geven, tot welke men langs denzelfden weg geraakt.

Ook dit oppervlak is met zichzelf wederkeerig, zooals blijkt, wanneer men het beschrijft door twee projectieve vlakkenbundels door p te leggen, en in twee homologe vlakken de stralen te construeeren, tot het stelsel behoorende.

De snijkromme c^4 van R^4 met een willekeurig vlak π heeft twee toegevoegd imaginaire dubbelpunten, en de omhullingskegel twee toegevoegd imaginaire dubbelraakvlakken.

Brengt men een vlak π door eene beschrijvende lijn l, dan zal de snijkromme c^3 door l in een bestaanbaar en in twee imaginaire punten gesneden worden; zij kan twee- of ééntakkig zijn.

In het eerste geval bestaat c^4 uit twee ovalen, in het tweede uit een ovaal. In het eerste geval snijden de beide ovalen elkander in de imaginaire dubbelpunten, het eene ovaal kan het andere omringen of uitsluiten.

Even als bij het geval A kan ook hier het oppervlak geheelimaginair worden.

Geval C.

20. Dit geval ontstaat wanneer d en d' oneindig dicht bij elkander liggen; nu treden, in de plaats der gegevens van A, de lijn d, de lijnen a_1, a_2, b_1, b_2, benevens eene lijn r, die d snijdt en eene raaklijn is aan elk oppervlak van bundel $d\ a_1\ a_2$ zoowel als van bundel $d\ b_1\ b_2$. Het projectief verband der bundels wordt verkregen door op d uit het snijpunt van d met r, even als in het geval A, twee projectieve stralenbundels te trekken, gelegen in het vlak $d\,r$. De verdere constructie verloopt als bij A.

21. De doorsnede van R^4 met een vlak π wordt nu eene kromme c^4 met dubbelknoop D in het snijpunt met d; zoo ook zal de omhullingskegel een kegel van de vierde klasse met dubbelen knoopstraal zijn. R^4 voldoet verder aan de voorwaarde, dat alle beschrijvende lijnen stralen zijn van het bijzondere stralenstelsel van den eersten graad, bepaald door de stralen a_1, a_2, b_1, b_2.

Legt men het vlak π door eene beschrijvende lijn l, dan ontstaat er als doorsnede eene kromme van de derde orde, van welke l de raaklijn in D is, en welke wederom verschillende vormen hebben kan. Om den vorm van het oppervlak te bepalen, is het nu weder in de eerste plaats noodig, dat men het aantal klempunten kenne. Op het voetspoor van geval A kan men de volgende verdeeling maken:

a. c^3 bestaat uit twee deelen, D ligt op den tak. Er zijn vier bestaanbare klempunten.

b. c^3 bestaat uit twee deelen, D ligt op het ovaal. Er zijn slechts imaginaire klempunten.

c. c^3 bestaat uit één deel. Er zijn twee bestaanbare en twee onbestaanbare klempunten.

De gedaante der vlakke doorsnede in elk dezer gevallen is als volgt:

a. Een willekeurig vlak π snijdt R^4 in eene kromme van

de vierde orde, bestaande uit twee ovalen, die elkander niet snijden; gaat π door een punt van d, uit 't welk bestaanbare beschrijvende lijnen gaan, dan bevindt zich een dubbelknoop op een dezer ovalen, gaat π door een punt op een geïsoleerd gedeelte van d, dan bezit de kromme een dubbelgeïsoleerd punt; eindelijk kan π door een klempunt gaan; dan vertoont een der ovalen de combinatie van dubbel- en keerpunt d. i. een keerpunt van de tweede soort.

Wordt π door de grenslijn door dit klempunt gebracht, dan snijdt het R^4 volgens eene kromme van de derde orde, die in het klempunt een buigpunt met buigraaklijn heeft.

b. Het vlak π snijdt R^4 volgens eene kromme, bestaande uit twee ovalen, die elkander raken.

c. In dit geval bestaat de doorsnijding uit één ovaal met dubbelknoop, dubbel-geïsoleerd punt of keerpunt van de tweede soort.

Ook dit oppervlak kan imaginair zijn. De vlakke doorsnede is dan eene imaginaire kromme van de vierde orde met dubbel-geïsoleerd punt. Deze kromme ontstaat door de imaginaire snijkromme van twee oppervlakken van de tweede orde te projecteeren uit een punt, genomen op een der kegeloppervlakken, die door deze kromme gebracht kunnen worden.

IV. Tweede Groep.

22. De oppervlakken, tot deze groep behoorende, kunnen naar den vorm der dubbelkromme verdeeld worden in de volgende gevallen:

Geval A. De dubbelkromme is eene scheeve kromme van de derde orde c^3.

Geval B. De kromme c^3 gaat over in een kegelsnede met eene lijn d, die een punt met haar gemeen heeft.

Geval C. De kromme c^3 gaat over in twee bestaanbare elkander kruisende lijnen d en d', gesneden door eene lijn l.

Geval D. De kromme c^3 gaat over in twee elkander kruisende lijnen, die toegevoegd imaginair zijn, benevens hare transversaal l.

Geval E. De lijnen d en d' liggen oneindig dicht bij elkander.

De oppervlakken dezer groep zijn diegenen, die door REYE langs meetkundigen weg verkregen worden. (*Geometrie der Lage* II, Vortrag 15, verg. Inleiding 3). Hij verkrijgt daar de eerste drie gevallen en bewijst tevens, dat het oppervlak met zichzelf wederkeerig is. Daar evenwel de meetkundige weg, langs welken zij verkregen worden, van den in dit opstel gevolgden verschilt, zoo zal hier worden aangetoond, dat ook volgens de hier als grondslag aangenomene methode al deze vormen kunnen worden verkregen.

Geval A.

23. Laten gegeven zijn de scheeve kromme van de derde orde c^3, benevens hare koorden a en b; c^3 is het gemeenschappelijk deel der basiskromme van beide bundels. Deze kunnen op de volgende wijze met elkander in projectief verband worden gebracht.

Men neme een punt P op c^3, trekke door P in de vlakken Pa en Pb twee projectieve stralenbundels; elk paar homologe stralen a_n, b_n bepaalt een paar homologe oppervlakken $A_n{}^2$ en $B_n{}^2$ der beide bundels, die elkander volgens eene beschrijvende lijn van het scheeve oppervlak R^4 zullen snijden; deze beschrijvende lijn is de verbindingslijn der beide snijpunten van het vlak $Pa_n\,b_n$ met c^3. Doorloopt men de stralenbundels geheel, dan wordt het geheele oppervlak R^4 beschreven.

24. De doorsnede van R^4 met een vlak π is eene kromme van de vierde orde c^4 met drie dubbelpunten, welke de snijpunten zijn van π met c^3. De kromme is dus van de zesde klasse en heeft vier dubbelraaklijnen. Hieruit volgt, dat de omhullingskegel van de zesde orde is; daar hij van de vierde klasse moet zijn, volgt hieruit, dat hij wederkeerig is met de snijkromme. De kegel heeft vier dubbelstralen en drie dubbelraakvlakken; de dubbelrakende ontwikkelbare is dus een oppervlak van de derde klasse (4de orde); op deze wijze wordt alzoo het wederkeerige ontstaan van het oppervlak opgehelderd.

De doorsnede wordt vereenvoudigd, wanneer het vlak π gelegd wordt door eene beschrijvende lijn l; zij gaat dan over in eene kromme van de derde orde met een dubbelpunt, gesneden door l in drie punten; twee dezer snijpunten zijn de snijpunten van l met de dubbelkromme; het derde is het raakpunt van π met R^4; het dubbelpunt is het derde snijpunt van π met de dubbelkromme.

Nog eenvoudiger wordt de doorsnede, wanneer π gelegd wordt door twee beschrijvende lijnen in een punt van c^3 te zamen komende. Het overschietende deel wordt dan eene kegelsnede, gaande door de niet samenvallende snijpunten der beschrijvende lijnen met c^3, en de beschrijvende lijnen ten tweeden male snijdende in de beide raakpunten van π met R^4.

Het kan geen bezwaar geven, om, even als bij de eerste groep (11), de constructie van den omhullingskegel ook na te gaan; met het oog op het reeds behandelde zal dit worden voorbijgegaan, terwijl ook naar de aangehaalde § van Reye verder verwezen wordt. Bij de volgende constructiën zal eveneens de loop in het kort worden aangegeven.

25. Het oppervlak is bepaald en construeerbaar door de dubbelkromme en vijf punten. Ten einde het te construeeren, trekke men koorden door deze punten, legge een vlak door een dezer koorden l; dit vlak snijdt de dubbelkromme in drie punten en de overige vier koorden in vier punten. De vlakke doorsnede is nu bekend door zes punten benevens een dubbelpunt en dus construeerbaar.

26. Even als vroeger zijn nu ook te construeeren de doorsnede van R^4 met verschillende andere scheeve oppervlakken, door c^3 gebracht. Zij b. v. R^2 een oppervlak van de tweede orde door c^3. Men legge een vlak, dat R^4 volgens eene kegelsnede en twee beschrijvende lijnen snijdt; deze kegelsnede zal R^2 snijden in twee punten buiten de punten der dubbelkromme; door deze twee punten gaan de gemeenschappelijke beschrijvende lijnen van R^2 en R^4. Op dezelfde wijze is het na te gaan, dat een tweede scheef oppervlak $R_1{}^4$ van de vierde orde, waarvan mede c^3 de dubbelkromme is, met R^4 vier beschrijvende lijnen gemeen heeft.

De voornoemde kegelsnede snijdt namelijk de tweede kromme c_1^4, behalve in twee dubbelpunten, in vier punten; door deze snijpunten worden de vier gemeenschappelijke lijnen getrokken.

27. Ten einde alle soorten van oppervlakken dezer groep te verkrijgen, moeten, even als te voren, de klempunten en grenslijnen meetkundig onderzocht worden. Hiertoe kan de volgende beschouwing leiden.

Volgens (23) verkrijgt men de beschrijvende lijnen van R^4 door de constructie der vlakken, die, door P gaande, opvolgend twee homologe stralen van de beide projectieve stralenbundels bevatten. Deze vlakken omhullen dus een kegelvlak van de tweede orde, den omhullingskegel K^2 van R^4 uit P; terwijl P nog buitendien de top is van een kegel van de tweede orde K_1^2, die c^3 tot richtlijn heeft. Uit een punt van c^3 buiten K^2 kunnen nu twee raakvlakken aan K^2 getrokken worden; uit elk punt daarbinnen worden deze raakvlakken imaginair, terwijl er in elk snijpunt één raakvlak zijn zal. Daar deze raakvlakken tevens raakvlakken van R^4 zijn, zoo zijn de gemelde snijpunten de op c^3 gelegen klempunten van R^4 en de twee samenvallende beschrijvende lijden vormen eene grenslijn. Een raakvlak van K^2 snijdt verder c^3 in twee punten; wanneer deze beide punten zich vereenigen, ontstaat er eene beschrijvende lijn die tevens raaklijn van c^3 is. De vlakken, die deze lijnen doen ontstaan, zullen mede ten getale van vier zijn, want de kegels K^2 en K_1^2 kunnen hoogstens vier gemeenschappelijke raakvlakken hebben. Nu volgt weder de classificatie van de scheeve oppervlakken dezer groep op de bestaanbaarheid van klempunten en klemvlakken gegrondvest *).

Algemeene gevallen.

a. K^2 en K_1^2 hebben vier gemeenschappelijke stralen en vier gemeenschappelijke raakvlakken.

b. K^2 en K_1^2 hebben vier gemeenschappelijke stralen en geene gemeenschappelijke raakvlakken.

---

*) Reye, *G. d. L.* II, p. 114 vg. komt, uitgaande van een ander meetkundig beginsel, tot dezelfde standen van kegelsneden als hier van kegelvlakken gevonden wordt; de beschouwing der kegelsneden is wederkeerig met deze

c. K^2 en $K_1{}^2$ hebben twee gemeenschappelijke stralen en dus ook twee gemeenschappelijke raakvlakken.

d. K^2 en $K_1{}^2$ hebben geene gemeenschappelijke stralen en vier gemeenschappelijke raakvlakken.

e. K en $K_1{}^2$ hebben geene gemeenschappelijke stralen en geene gemeenschappelijke raakvlakken; K^2 ligt binnen $K_1{}^2$.

f. K en $K_1{}^2$ verkeeren in het voorgaande geval, maar $K_1{}^2$ ligt binnen K^2.

Bijzondere gevallen.

g. $K_1{}^2$ raakt K^2; er zijn nog twee gemeenschappelijke stralen en raakvlakken, en de straal van raking ligt op dat deel van $K_1{}^2$, dat buiten K^2 ligt.

h. $K_1{}^2$ raakt K^2; er zijn nog twee gemeenschappelijke stralen en raakvlakken; de straal van raking ligt op dat deel van $K_1{}^2$, dat binnen K^2 ligt.

i. $K_1{}^2$ raakt K^2; er zijn twee gemeenschappelijke stralen, maar geene gemeenschappelijke raakvlakken.

k. $K_1{}^2$ raakt K^2; er zijn geene gemeenschappelijke stralen meer, maar wel twee gemeenschappelijke raakvlakken.

l. $K_1{}^2$ raakt K^2; er zijn geene gemeenschappelijke stralen meer en ook geene gemeenschappelijke raakvlakken; K^2 ligt binnen $K_1{}^2$.

m. $K_1{}^2$ raakt K^2; er zijn geene gemeenschappelijke stralen of raakvlakken meer; $K_1{}^2$ ligt binnen K^2.

n. $K_1{}^2$ en K^2 hebben een osculeerenden straal.

o. $K_1{}^2$ en K^2 hebben eene dubbele raking; K^2 ligt binnen $K_1{}^2$.

p. $K_1{}^2$ en K^2 hebben eene dubbele raking; $K_1{}^2$ ligt binnen K^2.

q. $K_1{}^2$ en K^2 hebben een dubbele imaginaire raking; K^2 ligt binnen $K_1{}^2$.

r. $K_1{}^2$ en K^2 hebben eene dubbele imaginaire raking; $K_1{}^2$ ligt binnen K^2.

s. $K_1{}^2$ en K^2 snijden elkander volgens vier opvolgende stralen; K^2 ligt binnen $K_1{}^2$.

t. $K_1{}^2$ en K^2 snijden elkander volgens vier opvolgende stralen; $K_1{}^2$ ligt binnen K^2 *).

*) Deze beschouwing brengt het aantal mogelijke vormen terug tot het

28. Na het onderzoek der doorsnede bij de voorgaande groep kan de snijkromme met een plat vlak kort afgehandeld worden. Zij is eene kromme van de vierde orde met drie bijzondere punten, welke ieder op zich zelf dubbelpunten, keerpunten of geïsoleerde punten kunnen zijn, terwijl eindelijk de bijzondere punten toegevoegd imaginair kunnen worden. Voor elk der gevondene soorten kan men als in (16) eene opsomming van de mogelijke vormen dezer kromme maken; ook zal men zonder moeite na kunnen gaan, in hoeverre de dubbelkromme geheel dubbel, gedeeltelijk geïsoleerd of geheel geïsoleerd op het oppervlak ligt. Verder zij opgemerkt, dat, door een snijvlak te leggen door eene raaklijn, of een osculatievlak aan de dubbelkromme te construeeren, men krommen van de vierde orde met een dubbelen of drievoudigen knoop verkrijgt. Dezelfde bijzondere gedaanten van omhullingskegels kunnen eveneens worden verkregen. Wordt het snijvlak gelegd door eene raaklijn aan een klempunt, dan ontstaan de combinatiën van een keerpunt met eenen knoop, of wel van een keerpunt met twee knoopen.

Dit oppervlak kan ook geheel imaginair worden; zijn omhullingskegel uit een punt der dubbelkromme is dan een imaginair kegelvlak van de tweede orde, en de doorsnijding met een vlak eene imaginaire kromme van de vierde orde. Deze kromme is de centrale of orthogonale projectie van de imaginaire snijkromme van twee oppervlakken van de tweede orde, die elkander raken, maar overigens geen bestaanbaar gemeenschappelijk punt bezitten.

Geval B.

29. Laat voor dit geval de dubbelkromme c^3 overgegaan zijn in de kegelsnede c^2 met de haar in A snijdende lijn d.

---

aantal mogelijke standen van twee kegelsneden ten opzichte van elkander; zij bevat al de gevallen door ROHN langs analytisch-meetkundigen weg verkregen.

Even als in het voorgaande geval wordt elk der bundels weder bepaald door de koorden a en b, die ieder, zoowel met c^2 als met d, een punt gemeen hebben.

Past men, ter verkrijging van het projectief verband, dezelfde constructie als in het voorgaande geval toe, daarbij het punt P op c^2 nemende, dan verkrijgt men wederom den omhullingskegel K^2; terwijl $K_1{}^2$ overgaat in twee vlakken, het vlak δ van c^2 en het vlak Pd. Wederom bepaalt elk raakvlak aan K^2 eene beschrijvende lijn van R^4; uit de punten van c^2 of d, die buiten K^2 liggen, kunnen twee raakvlakken aan K^2 getrokken worden; uit die binnen K^2 twee toegevoegd imaginaire raakvlakken; terwijl de snijpunten van c^2 en d met K^2 de klempunten zijn.

30. Tot de kennis der dubbelrakende ontwikkelbare komt men op de volgende wijze. Men trekke uit een punt Q van d de beide raakvlakken aan K^2, construeere dan de beide beschrijvende lijnen door Q en legge er een vlak φ door, dan zal φ R^4 nog in eene kegelsnede snijden. Deze kegelsnede $c_1{}^2$ heeft twee punten gemeen met c^2; de beide andere snijpunten met de beschrijvende lijnen zijn de raakpunten met R^4; van deze dubbelrakende vlakken moet nu de omhulde geconstrueerd worden. Men projecteere daartoe uit alle punten van d c^2 op het vlak φ, dan ontstaat er in dit vlak een kegelsnedenbundel, welks basispunten gevormd worden door de snijpunten van $c_1{}^2$ met c^2, door het snijpunt Q van d met φ en door de snijlijn van het raakvlak, door d aan c^2 gebracht, met het vlak φ. De kegelsneden van dezen bundel snijden $c_1{}^2$, behalve in de twee vaste punten, nog in twee veranderlijke punten, welker verbindingslijn door een vast punt gaat. Hieruit volgt:

De dubbelrakende vlakken snijden een hunner in een stralenbundel; de dubbelrakende ontwikkelbare is dus een kegelvlak van de tweede klasse; de vlakkenbundel door d vult de klasse van dit oppervlak tot drie aan.

De constructie van den top van dezen kegel is dus in het bovenstaande aangewezen.

De snijding van deze dubbelrakende ontwikkelbare met δ zal eene kegelsnede zijn; zij kan op de volgende wijze geconstrueerd worden. Men projecteere uit de opvolgende punten van d de kegelsnede c_1^2 op het vlak δ. Elk dezer geprojecteerde kegelsneden heeft met c^2 twee vaste punten gemeen; de gevraagde kegelsnede wordt dus omhuld door de verbindingslijnen der overige beide snijpunten; zij gaat door A en raakt aan de raaklijn door A aan c^2 getrokken en aan de snijlijn van c_1^2 en c^2.

31. De vlakke doorsneden van dit oppervlak geven geene aanleiding tot bijzondere opmerkingen; de verschillende vormen worden weder verkregen, wanneer men de klempunten opspoort. Deze beschouwing geeft aanleiding tot dezelfde verdeeling als bij het geval A; slechts gaat K_1^2 in twee vlakken over, het eene is het vlak δ van c^2, het andere is het vlak $P\,d\,(\pi)$. Men heeft nu de volgende soorten:

a. δ en π snijden K^2; hunne snijlijn ligt buiten K^2.

b. δ en π snijden K^2; hunne snijlijn valt binnen K^2.

c. δ snijdt K^2, π niet.

d. δ snijdt K^2 niet, π snijdt K^2.

e. δ en π snijden K^2 niet.

En als eenig bijzonder geval:

f. De snijlijn van δ en π valt te zamen met eene beschrijvende lijn van K^2.

De bijzondere gevallen, die zouden ontstaan, wanneer òf δ òf π rakend werd aan K_1^2, vervallen, omdat alsdan deze vlakken een deel uitmaken van R^4, en R^4 dus ophoudt van de vierde orde te zijn.

Door deze verdeeling ziet men, dat elk der deelen van de dubbelkromme twee klempunten bezit, welke bestaanbaar of toegevoegd imaginair kunnen zijn; daar verder ook dit oppervlak wederkeerig met zich zelf is, zoo gelden hier dezelfde opmerkingen ten opzichte der klemvlakken.

Geval C.

32. Men neme, even als bij het geval A, de dubbellijnen d en d' aan, gesneden door l en nog buitendien tot

transversalen hebbende a en b. Uit een punt P van l kan men de constructie uitvoeren even als bij de voorgaande gevallen, en verkrijgt alsdan den omhullingskegel. De snijkromme met een vlak π zal eene kromme van de vierde orde met drie dubbelpunten zijn, die kan overgaan in eene kromme van de derde orde met dubbelpunt, of, zoo men het vlak π door l legt, in eene kegelsnede met de dubbel tellende lijn, of wel in eene der andere dubbellijnen met nog twee rechte lijnen.

Het is verder licht in te zien, dat dit geval niet alleen een bijzonder geval is van het geval A dezer afdeeling, maar ook als bijzonder geval van de vorige groep kan beschouwd worden. Hieruit volgt dus eene daarop gegronde constructie van het oppervlak.

33. De verdeeling van dit oppervlak in soorten steunt weder op het al of niet aanwezig zijn van klempunten. Deze worden het eenvoudigst gevonden door eene doorsnede te beschouwen van het oppervlak R^4 met een vlak π, gebracht door l; π snijdt R^4 volgens de dubbel tellende lijn l en eene kegelsnede c^2, en de lijnen d en d' in de punten D en D' Elk punt van d nu is de top van een' kegel, die c^2 tot richtlijn heeft; deze kegel snijdt d' in twee punten, door welke twee beschrijvende lijnen bepaald worden. Zoodra nu deze kegel rakende wordt aan d' ontstaat er een klempunt op d. De bestaanbaarheid van deze klempunten hangt dus af van den stand van d en d' ten opzichte van c^2, welke stand onderzocht kan worden, door de ligging der punten D en D' ten opzichte van c^2 na te gaan.

Er ontstaan alzoo de navolgende soorten.

a. D en D' liggen buiten c^2; D D' snijdt c^2.

b. D en D' liggen buiten c^2; D D' snijdt c^2 niet.

c. D ligt buiten, D' binnen c^2.

d. D en D' liggen binnen c^2.

en als bijzonder geval:

e. D D' raakt aan c^2.

Het is nu duidelijk te zien, dat de gevallen a en b vier bestaanbare klempunten geven, het geval c twee, terwijl zij in het geval d imaginair zijn. Nog worde opgemerkt,

dat in het geval *a* de lijn *l* dubbel op het oppervlak ligt; in het geval *b* is zij eene geïsoleerde, in het geval *e* eene keerlijn. In dit laatste geval snijdt elk vlak het oppervlak R^4 volgens eene doorsnede met een keerpunt.

De vlakke doorsneden en de vorm der omhullingskegels kunnen, na het besprokene in de voorgaande gevallen, verder worden voorbijgegaan.

Geval D.

34. Wanneer *d* en *d'* toegevoegd imaginair zijn, kan men weder als gegevens aannemen, behalve *l*, *a*, *b*, vier lijnen, die met *a*, *b*, *l*, tot hetzelfde stralenstelsel van den eersten graad behooren. Na hetgeen hieromtrent in de eerste groep en in het voorgaande geval is opgemerkt, kan de constructie worden voorbijgegaan.

Slechts worde hier het volgende opgemerkt.

De doorsnijding met een willekeurig vlak is eene kromme van de vierde orde met twee toegevoegd imaginaire en een reëel dubbelpunt; de doorsnijding met een vlak door *l* geeft weder eene kegelsnede; er ontstaan hier dus de navolgende soorten:

a. *l* snijdt c^2.

b. *l* snijdt c^2 niet.

c. *l* raakt c^2.

Geval E.

35. Wanneer eindelijk *d* en *d'* oneindig dicht bij elkander liggen, kan, wat de constructie betreft, weder verwezen worden naar geval *C* van de eerste groep. De vlakke doorsnede is eene kromme van de vierde orde met dubbelknoop en dubbelpunt; zoo ook zal de omhullingskegel uit een willekeurig punt een dubbelraakvlak en twee samenvallende dubbelraakvlakken hebben. Als bijzondere gevallen komen in aanmerking:

De doorsnede door het snijpunt van *dd'* met *l*; dit is eene combinatie van drie knoopen; zoodanig dat er slechts éénе raaklijn aan dit punt is.

De doorsnede door l; zij bestaat, behalve uit l, uit eene kegelsnede; hierbij komen dus, evenals in het vorige geval de volgende soorten:

a. l snijdt c^2; D ligt binnen c^2.

b. l snijdt c^2; D ligt buiten c^2.

c. l snijdt c^2 niet.

d. l raakt c^2.

De doorsnede door het snijpunt van dd' met l wordt in het geval d eene verbinding van twee knoopen en een keerpunt met ééne raaklijn aan dit punt.

Even als in het geval A kan bij elk der gevallen B, C, D, E het oppervlak geheel imaginair worden.

V. Derde Groep.

36. In deze groep kan de basiskromme van een der beide bundels verschillende vormen aannemen. Deze basiskromme bestaat uit de scheeve kromme van de derde orde c^3 met eene koorde t, welke tevens de as is der vlakkeninvolutie. In deze involutie vervult elk vlakkenpaar de rol van een oppervlak van den tweeden bundel, en, daar de as t samenvalt met het rechtlijnige deel van de basiskromme van den eersten bundel, wordt t eene drievoudige lijn van het scheeve oppervlak R^4. De behandeling zal doen zien, dat de kromme c^3 vervangen kan worden door verschillende andere vormen van scheeve krommen van de derde orde. Daarop berust dan de verdeeling van dit oppervlak in gevallen. Deze gevallen zijn:

A. c^3 wordt vervangen door eene kegelsnede c^2 met eene lijn l, die een punt met haar gemeen heeft.

B. Deze lijn l valt te zamen met de as t der vlakkeninvolutie.

C. c^3 wordt vervangen door de rechte lijnen l_1 en l_3 gesneden door l_2; l_2 is op eindigen afstand van t gelegen.

D. c^3 gaat over in de rechte lijnen l_1 en l_3, gesneden door l_2; l_2 ligt oneindig dicht bij t.

Geval A.

37. Het projectief verband wordt op de volgende wijze

geregeld. Men neme een punt P op t en trekke door dit punt lijnen, die c^3 snijden; elke lijn doet een oppervlak van den bundel $t\, c^3$ ontstaan, en de puntenrij, door deze beschrijvende lijnen, uit P gaande, op c^3 bepaald, is projectief met de punteninvolutie, door de vlakkenparen van de vlakkeninvolutie op c^3 uitgesneden. Zulk eene lijn vormt namelijk met t een raakvlak door P aan een oppervlak van den bundel gebracht. Projecteert men nu uit het snijpunt Q van c^3 met t beide puntenrijen op een vlak, dan ontstaan op eene kegelsnede eene puntenrij met daarmede projectieve punteninvolutie; deze zullen drie gemeenschappelijke homologe punten bezitten; deze punten, met Q vereenigd, geven drie punten P_1, P_2, P_3 op c^3, welke de drie beschrijvende lijnen PP_1, PP_2, PP_3 van R^4 doen ontstaan. Door verplaatsing van P op t worden alle beschrijvende lijnen van R^4 verkregen.

38. De doorsnijding van R^4 met een plat vlak is eene kromme van de vierde orde met een drievoudig punt, ontstaande door eene straleninvolutie, projectief met een kegelsnedenbundel, van welken een der basispunten met het middelpunt van de straleninvolutie tezamen valt. Vereenvoudigde doorsneden worden verkregen door een vlak te leggen door eene beschrijvende lijn l; hierdoor ontstaat eene kromme van de derde orde met een dubbelpunt op l gelegen; legt men een vlak door twee beschrijvende lijnen, dan wordt de doorsnede eene kegelsnede, welke het snijpunt der beide lijnen bevat. De twee beschrijvende lijnen kunnen toegevoegd imaginair zijn; hun vlak is dan evenwel bestaanbaar. Beschouwt men nu de kegelsnede met eene der beschrijvende lijnen van het oppervlak als één geheel, dan kan de kromme c^3 door haar vervangen worden. De beschrijvende lijnen van het oppervlak R^4 glijden dan bij hare beweging langs t en twee dezer kegelsneden.

38. De dubbelrakende ontwikkelbare is op de volgende wijze te construeeren. Men legge een vlak α door twee beschrijvende lijnen, dat dus R^4 nog volgens eene kegelsnede c^2 snijdt, en projecteert eene tweede kegelsneden-doorsnede $c_1{}^2$ op α uit alle punten van t. De geprojecteerde kegel-

sneden zullen allen met elkander gemeen hebben de beide snijpunten P en Q van c_1^2 met α, het snijpunt T van t met α, en hebben allen tot raaklijn de snijlijn van α met het vlak, door t rakende aan c_1^2 gebracht. Er ontstaat dus een kegelsnedenbundel, van welken elke kegelsnede c^2, behalve in T, nog in drie punten snijdt; de driehoeken, door verbinding dezer snijpunten ontstaande, omhullen eene kegelsnede d^2, die ook de zijden van $\triangle\ P\ Q\ T$ zal raken en in het algemeen c^2 zal snijden. De drie vlakken, gebracht door een projecteeringscentrum en de daarbij behoorende drie zijden van een driehoek, zijn dubbelrakende vlakken, tot welke ook α behoort. Daar nu de snijlijnen der dubbelrakende vlakken met een hunner eene kegelsnede omhullen, is de dubbelrakende ontwikkelbare van de derde klasse; hare constructie is hier aangegeven.

39. Uit de constructie der kegelsnede d^2 is de constructie der klempunten af te leiden. Door klempunten moeten bij dit oppervlak punten verstaan worden, zoodanig, dat daarin twee van de drie raakvlakken te zamen vallen. Elk vlak door een klempunt snijdt dus R^4 in eene kromme van de vierde orde met een keerpunt, door 't welk een tak gaat. Eene raaklijn van d^2 snijdt in het algemeen c^2 in twee punten, uit welke twee beschrijvende lijnen naar het bijbehoorend punt op t kunnen getrokken worden. Vereenigen zich deze beide snijpunten, m. a. w. wordt de raaklijn aan d^2 gemeenschappelijke raaklijn, dan is het bijbehoorend punt op t een klempunt; van de drie beschrijvende lijnen, uit dit klempunt gaande, vereenigen zich twee tot eene grenslijn. Om nu de klempunten te bepalen, moet men weder de standen van d^2 ten opzichte van c^2 nagaan.

Trekt men eene raaklijn uit een snijpunt van d^2 met c^2 aan d^2, dan zal deze raaklijn c^2 nog in een tweede punt snijden; de raaklijn, door dit punt aan c^2 getrokken, zal weder raaklijn aan d^2 moeten zijn; want d^2 en c^2 moeten voldoen aan de voorwaarde, dat elke omgeschreven driehoek van d^2 een ingeschreven driehoek van c^2 is. Hieruit volgt, dat c^2 en d^2 evenveel snijpunten als gemeenschappelijke raaklijnen moeten hebben.

De standen van d^2 en c^2 ten opzichte van elkander zijn dus:

a. d^2 en c^2 hebben vier gemeenschappelijke punten en vier gemeenschappelijke raaklijnen.

b. d^2 en c^2 hebben twee gemeenschappelijke punten en twee gemeenschappelijke raaklijnen.

c. d^2 en c^2 hebben geene gemeenschappelijke punten of raaklijnen; d^2 ligt binnen c^2.

d. d^2 en c^2 hebben geene gemeenschappelijke punten of raaklijnen; c^2 ligt binnen d^2.

Bij welke zich de bijzondere gevallen voegen:

e. d^2 en c^2 raken elkander in één punt en hebben nog twee gemeenschappelijke punten en raaklijnen; het deel van d^2, op hetwelk het raakpunt ligt, ligt binnen c^2.

f. d^2 en c^2 raken elkander in één punt en hebben geene gemeenschappelijke punten of raaklijnen; het deel van d^2, op hetwelk het raakpunt ligt, ligt binnen c^2.

g. d^2 en c^2 raken elkander in één punt en hebben nog twee gemeenschappelijke raaklijnen en punten; het deel van d^2, op hetwelk het raakpunt ligt, ligt buiten c^2.

h. d^2 en c^2 raken elkander in één punt en hebben geene gemeenschappelijke punten of raaklijnen; het deel van d^2, op hetwelk het raakpunt ligt, ligt buiten c^2.

i. d^2 en c^2 raken elkander in twee punten; d^2 ligt binnen c^2.

k. d^2 en c^2 raken elkander in twee punten; d^2 ligt buiten c^2.

l. d^2 en c^2 raken elkander in twee toegevoegd imaginaire punten, d^2 ligt binnen c^2.

m. d^2 en c^2 raken elkander in twee toegevoegd imaginaire punten; c^2 ligt binnen d^2.

40. Ook in dit geval kan worden volstaan met enkele opmerkingen over de vlakke doorsneden. In de gevallen *a* en *b*, die der bestaanbare klempunten, kunnen de doorsneden kromme lijnen van de vierde orde met een drievoudig punt zijn, met een keerpunt, door 't welk een tak loopt, of met een drievoudig punt met een bestaanbare en twee toegevoegd imaginaire raaklijnen. In de gevallen *c* en *d* heeft de kromme steeds òf wel drie raaklijnen òf wel eene raaklijn.

Wat de bijzondere gevallen betreft, zijn er tweeërlei soort doorsneden in de gevallen e en g, en is er slechts één vorm van doorsnede in de overige. De doorsnede door de dubbele klempunten zal eene kromme van de vierde orde zijn met een bijzonder punt, samengesteld uit twee keerpunten en een dubbelpunt; dit punt onderscheidt zich op het oog niet van eenig ander punt der kromme.

Bij de bijzondere doorsneden moet verder opgemerkt worden, dat eene doorsnede door eene beschrijvende lijn, welke door een klempunt gaat, eene kromme van de derde orde met een keerpunt is, dat gelegen is op de beschrijvende lijn. Is de beschrijvende lijn tevens grenslijn, dan wordt de doorsnede eene kromme van de derde orde met een dubbelpunt, dat de beschrijvende lijn tot raaklijn heeft. In een dubbel klempunt vereenigen zich de drie beschrijvende lijnen; de doorsnede, door de drievoudige lijn gelegd, geeft eene kromme van de derde orde met keerpunt; de keerraaklijn is de drievoudige beschrijvende lijn.

Geval B.

41. Daar in dit geval l zoowel eene beschrijvende lijn van het oppervlak R^4 als een onderdeel der basiskromme van den oppervlakkenbundel is, bezit elk oppervlak van dien bundel eene dubbele beschrijvende lijn.

Hieruit volgt, dat de oppervlakkenbundel overgaat in een kegelbundel; de kegelvlakken, hiertoe behoorende, hebben hun' top op t, de kegelsnede c^2 is hunne gemeenschappelijke richtlijn, en de puntenrij, op t door de toppen bepaald, is projectief met de vlakkeninvolutie. De beschrijvende lijnen kunnen dus geconstrueerd worden.

42. De doorsnijding met een plat vlak biedt, vergeleken met de vorige, geen bijzonderheden aan, slechts zal, bij verplaatsing der doorsneden, men aan het drievoudig punt altijd ééne raaklijn krijgen, die in een onveranderlijk raakvlak ligt. Van twee kegelsneden-doorsneden zullen dus de raaklijnen in hare snijpunten met t in dit vlak liggen.

Eveneens kan onveranderd worden toegepast het beginsel

der constructie van de dubbelrakende ontwikkelbare; de kegelsnedenbundel, liggende in het vlak α van c^2, (38) ondergaat in zijnen stand evenwel eene wijziging. Wederom hebben de geprojecteerde kegelsneden met elkander gemeen de beide snijpunten P en Q van $c_1{}^2$ met α, het snijpunt T van α met t en tot raaklijn de snijlijn van α met het vlak, door t rakende aan $c_1{}^2$ gebracht. Deze laatste raaklijn is evenwel nu ook eene raaklijn van c^2, zoodat de kegelsneden van den bundel, behalve het raakpunt, slechts twee punten met c^2 gemeen hebben, welke door hunne vereeniging eenen stralenbundel doen ontstaan. Hieruit volgt:

Een der dubbelrakende vlakken wordt door de andere gesneden in een' stralenbundel; deze vlakken omhullen dus een' kegel van de tweede klasse, welke tot top het middelpunt A van den stralenbundel heeft. Het standvastige raakvlak door t vult de klasse der dubbelrakende ontwikkelbare tot drie aan.

43. In overeenstemming met het vorige geval ziet men, dat er klempunten worden gevonden, indien men uit A raaklijnen aan c^2 trekt; de kegeltop, die bij deze raaklijn behoort zal een klempunt op t zijn. Nog ontstaat er een bijzonder punt op t, wanneer men den kegeltop construeert, welke behoort bij de lijn, die uit A naar T getrokken wordt; dit punt heeft de bijzonderheid, dat van de raakvlakken, door hetzelve aan R^4 gebracht, er een te zamenvalt met het standvastige raakvlak. De standen, die het punt A ten opzichte van c^2 innemen kan, geven wederom aanleiding tot de volgende verdeeling;

a. A ligt buiten c^2.

b. A ligt binnen c^2.

c. A ligt buiten c^2 op de raaklijn door T aan c^2 getrokken.

In het laatste geval zal er door het bijzondere punt eene doorsnede gaan, die een punt heeft dat uit twee keerpunten en een dubbelpunt bestaat. Voor de verdere bijzondere doorsneden kan naar het geval A verwezen worden.

Geval C.

44. In dit geval heeft men eene scheeve vierzijde, die

tot overstaande zijden heeft l_1, l_3, benevens t, l_2. Men neme, even als bij geval A, P op t aan, trekke door P in het vlak $P\ l_2$ een' stralenbundel, projectief met de straleninvolutie door de vlakkeninvolutie in dit zelfde vlak bepaald, en bepale de gemeenschappelijke homologe stralen van beide; dit zijn de drie beschrijvende lijnen uit P; bij verplaatsing van P wordt het geheele oppervlak beschreven.

Het kenmerkende onderscheid tusschen dit oppervlak en dat, genoemd in geval A dezer groep, is dus hierin gelegen, dat bij het laatste drie beschrijvende lijnen, uit een punt van t getrokken, niet in één vlak liggen, terwijl dit bij het hier behandelde wel het geval is.

Verder is het niet moeilijk in te zien, dat men hetzelfde oppervlak verkrijgt, wanneer men op l_2 eene punten involutie aanneemt en deze projectief maakt met de oppervlakkenschaar, door $t\ l_1\ l_2\ l_3$ bepaald, die dus het vlak l_2 in een' stralenbundel snijdt.

Dit oppervlak is dus met zich zelf wederkeerig; de lijn l_2 is tevens de dubbelrakende ontwikkelbare.

De vorm van de vlakke doorsnede van dit oppervlak zal zich niet van dien van de vorige gevallen onderscheiden; zij heeft een drievoudig punt en de omhullingskegels hebben een drievoudig raakvlak.

45. Voor het opsporen der klempunten moet een andere weg ingeslagen worden dan in het vorige geval, daar de doorsnijding, verkregen door een vlak gebracht door twee beschrijvende lijnen, bestaat uit drie beschrijvende lijnen en de lijn l_2. Ten einde ook voor dit geval de klempunten te vinden, legge men een vlak π door ééne beschrijvende lijn l; dit vlak snijdt t in T en l_2 in L_2; T is dan tevens een dubbelpunt van de snijkromme c^3 en L_2 ligt op l. Elk vlak, door l_2 gebracht, snijdt π in eene lijn, die c^3 in drie punten snijdt, welke drie punten men vereenigt met het snijpunt van het bewegelijke vlak met t; men verkrijgt alzoo in elk vlak drie beschrijvende lijnen. Zoodra twee dezer zich vereenigen, d. i. voor elke raaklijn uit L_2 aan c^3 getrokken, vindt men dus in het daarbij behoorend punt op t een klempunt. Dit geeft aanleiding tot de navolgende gevallen:

a. L_2 ligt zoodanig, dat er vier bestaanbare raaklijnen aan c^3 kunnen worden getrokken.

b. Uit L_2 kunnen twee bestaanbare en twee toegevoegd imaginaire raaklijnen aan c^3 worden getrokken.

c. Uit L_2 kunnen slechts imaginaire raaklijnen aan c^3 worden getrokken; c^3 heeft een dubbelpunt.

d. Uit L_2 kunnen slechts imaginaire raaklijnen aan c^3 worden getrokken; c^3 heeft een geïsoleerd punt.

Hieruit ziet men, dat de algemeene gevallen overeenstemmen met die, in het geval *A* dezer groep verkregen. Men kan ook de bijzondere gevallen der klempunten verkrijgen; namelijk de vereeniging van klempunten op verschillende wijzen. Het kan namelijk zijn, dat L_2 op eene raaklijn aan een buigpunt van c^3 ligt, of ook wel, dat L_2 het snijpunt is van twee raaklijnen, ieder aan een buigpunt getrokken. Houdt men nu in het oog, dat in het eerste geval de beide andere raaklijnen uit L_2 bestaanbaar of toegevoegd imaginair kunnen zijn; dat in het tweede geval L_2 het snijpunt van twee bestaanbare of wel van twee toegevoegd imaginaire buigraaklijnen kan zijn, dan ziet men, dat de bijzondere gevallen van het geval *A* zich ook hier kunnen voordoen.

Eveneens kan naar het geval *A* verwezen worden, wat betreft de vormen der bijzondere doorsneden, door klempunten, grenslijnen enz. gelegd.

Geval D.

46. Even als bij het geval *C* der eerste groep (20) treden hier op als gegevens van den oppervlakkenbundel de rechte lijnen l_1 en l_3, hare transversaal t en een vlak door t, in hetwelk eene lijn r eene raaklijn is aan elk oppervlak van den bundel. Elke straal van den stralenbundel, welks middelpunt het snijpunt van t en r is, en die gelegen is in het vlak $t\,r$, bepaalt met l_1 en l_3 een oppervlak; is nu deze stralenbundel projectief met de vlakkeninvolutie, dan snijdt elk vlakkenpaar het homologe oppervlak in twee beschrijvende lijnen; men kan dus de opeenvolging van deze

construeeren. Even als in het vorige geval is het oppervlak met zich zelf wederkeerig; de dubbelrakende ontwikkelbare gaat steeds door t.

47. De doorsnijding met een plat vlak π is wederom eene kromme van de vierde orde met een drievoudig punt; zij ontstaat door de doorsnijding der homologe elementen van eene straleninvolutie met een' kegelsnedenbundel; deze laatste bundel wordt bepaald door de snijpunten van π met l_1, l_3, t en de raaklijn, door het laatst gemelde snijpunt aan alle kegelsneden van den bundel getrokken. De drie raaklijnen aan dit drievoudige punt worden gevonden door de raaklijn van den kegelsnedenbundel, en het stralenpaar der involutie, dat homoloog is met de bijzondere kegelsnede van den bundel, welke vertegenwoordigd wordt door de snijlijnen van π met de twee vlakken $t\,l_1$ en $t\,l_3$. De twee vlakken $t\,l_1$ en $t\,l_3$ vormen nu, bij elkander gedacht, een element van den oppervlakkenbundel, zoodat met dit vlakkenpaar één bepaald vlakkenpaar der vlakkeninvolutie overeenkomt; hieruit volgt, dat van de drie raakvlakken door elk punt der drievoudige lijn gebracht er twee standvastig zijn. Ook bij dit oppervlak liggen voor elk punt drie beschrijvende lijnen in één vlak.

48. Daar twee der raakvlakken standvastig zijn, kunnen klempunten alleen voorkomen, als het bewegelijke raakvlak aan een punt van t samenvalt met een der standvastige raakvlakken. Deze punten kan men op de navolgende wijze opsporen.

Men denke zich een oppervlak R^2 van den oppervlakkenbundel geconstrueerd; dit zal in elk punt van t een raakvlak bezitten en het raakvlak in een dier punten moet voor den geheelen bundel constant zijn. Dit raakvlak is tevens raakvlak van het scheeve oppervlak R^4. Zijn dus nu de standvastige raakvlakken ϱ_1 en ϱ_2 van R^4 bepaald, dan bepale men de lijn volgens welke een dezer vlakken R^2 snijdt, het snijpunt dezer lijn met t geeft een klempunt. Er zijn dus twee dezer punten; en het oppervlak laat zich naar de bestaanbaarheid dezer klempunten verdeelen.

Ook bestaat de mogelijkheid, dat het vlakkenpaar ϱ_1 en

ϱ_2 der vlakkeninvolutie een dubbelvlak der involutie is; alsdan heeft men slechts één standvastig raakvlak, terwijl elk der punten van t tevens een keerpunt van de vlakke doorsnede van R^4 is. Men komt alzoo tot de volgende soorten.

a. ϱ_1 en ϱ_2 zijn bestaanbaar, de vlakkeninvolutie is elliptisch of hyperbolisch; er zijn twee bestaanbare klempunten.

b. ϱ_1 en ϱ_2 zijn toegevoegd imaginair, de vlakkeninvolutie is hyperbolisch; er zijn geen bestaanbare klempunten.

c. ϱ_1 en ϱ_2 vereenigen zich in één raakvlak ϱ; de vlakkeninvolutie is hyperbolisch; er is één klempunt (eigenlijk twee samenvallende klempunten).

Bij de vlakke doorsneden door deze bijzondere punten zullen, even als bij geval *A*, weder de verschillende vormen van drievoudige punten zich voordoen.

VI. Vierde Groep.

47. Uit de wijze van ontstaan blijkt, dat deze groep uit oppervlakken zal bestaan, die wederkeerig zijn met die van de voorgaande. Het is onnoodig om de redeneeringen op te stellen, noodig om tot de verdeeling in soorten te geraken; voldoende zal het zijn, zoo hier aangegeven worden die gevallen, die verschillend zijn van die der vorige groep. Daar de gevallen *C* en *D* der voorgaande groep wederkeerig zijn met zichzelven, zoo behooren zij mede tot deze groep en blijven zij dus verder buiten beschouwing. Voor de gevallen *A* en *B* der voorgaande groep komen nu de volgende in plaats.

A. Het ontwikkelbare oppervlak van de derde klasse γ^3 wordt vervangen door een kegelvlak van de tweede klasse γ^2 en eene raaklijn l aan γ^2.

B. Deze raaklijn l valt te zamen met de draaglijn der punteninvolutie.

Geval A.

48. Met het oog op de voorgaande opmerking omtrent de wederkeerigheid van dit oppervlak met het geval *A* der voorgaande groep, kunnen zonder vernieuwing van bewijzen de volgende eigenschappen worden afgeleid.

Het oppervlak heeft eene dubbelrakende ontwikkelbare, welke is overgegaan in eene rechte lijn *t*; elk vlak π door deze rechte lijn *t* bezit drie raakpunten, zoodat men haar eene drievoudig rakende ontwikkelbare kan noemen. De constructie der beschrijvende lijnen, liggende in een vlak door deze lijn gebracht, is wederkeerig met de constructie van (37).

In het vlak π vormen de beschrijvende lijnen een' driehoek. Uit elk hoekpunt van dien driehoek kan een omhullingskegel aan het oppervlak beschreven worden; deze kegel is van de tweede klasse en raakt aan *t*. De beschrijvende lijnen van het oppervlak glijden bij hare beweging langs *t* en twee dezer kegels.

De dubbelkromme is eene scheeve kromme van de derde orde c^3.

49. Men kan bij dit oppervlak de klemvlakken bepalen, gelijk in de voorgaande groep de klempunten bepaald zijn; men komt dan tot een aantal soorten, gelijkstaande met dat van geval *A* der voorgaande groep. Het heeft evenwel ook geen bezwaar in dit geval de klempunten op te sporen; hierdoor moet men dan tot dezelfde verdeeling komen. Om deze klempunten te construeeren kan men den volgenden weg inslaan.

De vlakken door *t* snijden de dubbelkromme c^3 in drie punten; wordt zulk een vlak raakvlak aan c^3 dan vereenigen zich twee dezer punten; het vlak wordt een klemvlak, het derde punt wordt een klempunt op c^3 en de twee beschrijvende lijnen, die zich in dit klempunt vereenigen, worden tot eene grenslijn. Daar er door eene lijn, buiten eene kromme van de derde orde gelegen, aan die kromme vier raakvlakken kunnen worden gebracht, zoo ontstaan de volgende soorten:

a. Door *t* kunnen vier bestaanbare raakvlakken aan c^3 gebracht worden.

b. Door *t* kunnen twee bestaanbare en twee toegevoegd imaginaire raakvlakken aan c^3 gebracht worden.

c. Door *t* kunnen geen andere dan imaginaire raakvlakken aan c^3 worden gebracht; alle koorden die *t* snijden hebben bestaanbare eindpunten.

d. Door *t* kunnen slechts imaginaire raakvlakken aan c^3 worden gebracht; alle koorden die *t* snijden hebben toegevoegd imaginaire eindpunten.

De bijzondere gevallen worden verkregen wanneer *t* òf wel in een osculatievlak van c^3 ligt, òf wel de snijlijn is van twee osculatievlakken. Geeft men aan *t* nu deze bijzondere standen, dan ontstaan dezelfde bijzondere gevallen als bij dat geval der voorgaande groep, dat met dit wederkeerig is.

De vlakke doorsnede van het oppervlak is eene kromme van de vierde orde met drie dubbelpunten, die naar omstandigheden keerpunten kunnen worden.

De gegeven beschouwing kan dienen, om de vormen van den omhullingskegel bij het geval *A* van de vorige groep af te leiden.

Geval B.

50. De wederkeerigheid van dit oppervlak met het oppervlak *B* van de voorgaande groep geeft de navolgende eigenschappen.

Men brenge door *t* een vlakkenbundel, die een kegelvlak van de tweede klasse, van hetwelk *t* eene raaklijn is, volgens kegelsneden snijdt; beschouwt men elke kegelsnede als homoloog met een puntenpaar der involutie op *t*, dan zullen de raaklijnen uit de puntenparen dezer involutien aan de kegelsneden de beschrijvende lijnen van het oppervlak zijn.

Het oppervlak kan ook ontstaan door de beweging eener lijn langs de lijn *t*, welke laatste aan twee kegelvlakken van de tweede klasse raakt, en getrokken is door het snijpunt van twee beschrijvende lijnen dezer kegelvlakken; de beschrijvende lijn moet dan ook aan beide kegelvlakken rakende blijven.

Het oppervlak bezit eene dubbel-kegelsnede en een punt, dat de eigenschap heeft, dat elke lijn, door hetzelve getrokken, tot een omhullingskegel van het oppervlak behoort.

Even als bij geval *B* der voorgaande groep laat zich dit oppervlak in drie soorten verdeelen; deze verdeeling geeft na het aldaar behandelde geene aanleiding tot bezwaren.

Ook alle verdere eigenschappen van dit oppervlak geven met het oog op de wederkeerigheid van dit oppervlak met het vroeger behandelde geene stof tot nieuwe opmerkingen.

October 1888.

ALGEMEENE OPMERKINGEN OVER DE GEVONDENE OPPERVLAKKEN.

Ten einde het overzicht van de gevondene groepen van oppervlakken te vereenvoudigen wordt hier bijgevoegd eene tabel van de verschillende resultaten in de voorgaande beschouwingen verkregen. Zij worden vergeleken met de ordeningen van ROHN, SALMON, CREMONA en CAYLEY. Men kan deze tabel beschouwen als eene aanvulling en uitbreiding van de nummers in SALMON-FIEDLERS *Geometrie des Raumes* aangegeven. Bij hare samenstelling is alleen rekening gehouden met de verdeeling in groepen en de daarin voorkomende hoofdgevallen, terwijl voor de verdere indeeling naar gelang der klempunten naar den tekst verwezen wordt.

Het is verder niet zonder belang na te gaan, in welke groepen enkele meer bekende scheeve oppervlakken van de vierde orde hunne plaats vinden. Na de gegevene ontwikkelingen kan dit zonder bezwaar geschieden. Hier volgt dus eene aanwijzing daaromtrent dezer oppervlakken. *)

a. Het normalen-oppervlak. Dit oppervlak wordt beschreven door de normalen van een oppervlak van de tweede orde, getrokken aan de punten eener vlakke doorsnede evenwijdig aan een der hoofdvlakken. Als meetkundig bewezen mag worden aangenomen, dat dit oppervlak ook kan ontstaan door uit het middelpunt eener kegelsnede c^2 eene loodlijn op te richten op het vlak π dezer kegelsnede; neemt men nu twee punten op deze loodlijn aan en trekt men door het eene eene lijn d, evenwijdig aan eene der

*) Daar het voornamelijk het doel is, de oppervlakken in de gevondene groepeering op hunne plaats te stellen, zoo wordt, wat betreft de meetkundige eigenschappen, verwezen naar de handboeken van Beschrijvende Meetkunde.

assen van c^2, en door het andere eene lijn d', evenwijdig aan de tweede, dan zijn d, d' en c^2 de richtlijnen van het oppervlak. Het vlak π vormt bij dit oppervlak eene doorsnede van de vierde orde, overgegaan in de kegelsnede c^2 en de lijn, die de snijpunten van d en d^2 met π verbindt, d. i. de oneindig ver gelegene lijn van π. De dubbelkromme bestaat dus uit d, d' en de beiden snijdende oneindig ver gelegene lijn van π. Het normalenoppervlak behoort dus tot de tweede groep, geval C. Is c^2 eene ellips, dan behoort het tot de soort b; is c^2 eene hyperbool, dan tot de soort c; is c^2 eene parabool, dan tot de soort e.

b. De cirkelconoïde. Deze heeft tot richtlijnen een cirkel c^2, gelegen in een vlak π, eene lijn d, en tevens loopen de beschrijvende lijnen evenwijdig aan een vlak α of, met andere woorden, snijden de oneindig ver gelegen lijn van α. Zooals door te vergelijken met het vorige geval blijkt, behoort dit oppervlak eveneens tot de tweede groep, geval C; de dubbelkromme bestaat uit de lijn d, de oneindig ver verwijderde lijn van α, en eene lijn l door het snijpunt D van d met π evenwijdig aan de snijlijn van π en α getrokken. Valt D binnen den cirkel c^2, dan behoort het tot de soort c; valt D buiten c^2, dan behoort het tot de soort a, b of e, naar gelang l den cirkel snijdt, niet snijdt of raakt.

c. De wig van Wallis. Dit is een bijzonder geval van de cirkelconoïde; de lijn d loopt bij dit oppervlak evenwijdig aan π, hare projectie op π is eene middellijn van den cirkel c^2 en het richtvlak α staat loodrecht op d. De dubbelkromme bestaat uit de lijn d en de oneindig ver verwijderde lijnen van α en π; de lijn l en dus ook de punten D en D' liggen nu geheel op oneindigen afstand van c^2. Het oppervlak behoort dus tot de tweede groep, geval C, soort b. Er zijn twee klempunten op d, zoodanig gelegen, dat hunne projectiën op π in den omtrek van c^2 vallen en twee op de oneindig ver verwijderde lijn l, liggende in de vlakken door d rakende aan den cirkel gebracht. De klemvlakken zijn de vlakken, door de klempunten op d evenwijdig aan α gebracht, en de raakvlakken door d aan den cirkel c^2. Het oppervlak heeft vier grenslijnen; de lood-

lijn uit de klempunten van d op π, en de beschrijvende lijnen liggende in de klemvlakken door d.

d. Het oppervlak, ontstaande door de homologe punten van twee projectieve puntenrijen op twee in de ruimte gelegen kegelsneden te verbinden.

Volgens de wijze van ontstaan beschreven in de tweede groep, geval A, kan het oppervlak, dat tot dubbelkromme eene scheeve kromme van de derde orde c^3 heeft, ontstaan door eene koorde van deze kromme te laten glijden langs een kegelvlak van de tweede orde, welks top op c^3 ligt. Uit twee punten van c^3 deze lijnen projecteerende, verkrijgt men de raakvlakken van twee kegeloppervlakken van de tweede orde, welke met elkander in projectief verband staan; daar het oppervlak volgens het behandelde in de tweede groep A met zich zelf wederkeerig is, kan het dus ook ontstaan door de verbinding der homologe punten van twee projectieve puntenrijen op twee kegelsneden.

e. De cilindroïde. Men denke zich in een cilindervlak van de tweede orde twee willekeurige vlakke doorsneden c_1^2 en c_2^2 geconstrueerd, gelegen in de vlakken α en β. Verschuift men nu c_2^2 in β, zoodanig dat alle punten lijnen beschrijven evenwijdig aan de snijlijn l van α en β, en verbindt men dan de punten, die oorspronkelijk op dezelfde beschrijvende lijnen van den cilinder lagen, dan ontstaat eene cilindroïde.

Het is duidelijk, dat men te doen heeft met een bijzonder geval van het oppervlak, ontstaande door de verbinding van de homologe punten van twee projectieve puntenrijen op twee kegelsneden. Er ontstaat dus in elk geval een oppervlak tot de tweede groep behoorende; het zal geheel omschreven zijn, zoodra men de dubbelkromme kent.

De beide vlakken α en β door l gebracht snijden de cilindroïde volgens kegelsneden; de lijn l is dus eene dubbellijn; voor het geval dat c_1^2 en c_2^2 l snijden blijkt dit ook, door dat zij twee over elkaar liggende beschrijvende lijnen vertegenwoordigt. De beschrijvende lijnen der cilindroïde loopen verder alle evenwijdig aan een vlak γ, door l evenwijdig aan de oorspronkelijke beschrijvende lijnen van

den cilinder gebracht; zij snijden dus de oneindig ver verwijderde lijn l_∞ van γ. Deze lijn l_∞ vertegenwoordigt twee oneindig dicht bij elkander gelegen lijnen. Men beschouwe, om zich hiervan te overtuigen, de doorsnede c_1^2 in α. Men verkrijgt in het algemeene geval der tweede groep C de klempunten en de grenslijnen door uit D en D' de raaklijnen aan c_1^2 te trekken, welke dus in het algemeen vier in getal zijn. In dit geval kunnen er evenwel alleen grenslijnen ontstaan, wanneer men raaklijnen trekt aan c_1^2 evenwijdig aan l, de beide punten D en D', uit welke de raaklijnen getrokken worden zijn dus in het oneindige te zamengevallen.

De cilindroïde behoort alzoo tot de tweede groep, geval E en wel tot de soorten a, b of c of d naar gelang l den cilinder snijdt, niet snijdt of raakt.

f. Het scheeve tongewelf. Dit oppervlak heeft tot richtlijnen twee gelijke cirkels c_1^2 en c_2^2 in evenwijdige vlakken, benevens de normaal d der vlakken, die den afstand der middelpunten van de cirkels midden door deelt.

Uit een punt P van d de kegelvlakken construeerende, die tot richtlijnen hebben c_1^2 en c_2^2, ziet men, dat deze kegels twee gemeenschappelijke stralen hebben, welke gericht zijn naar de oneindig ver verwijderde cirkelpunten van de evenwijdige vlakken en twee andere gemeenschappelijke stralen, welke tot het oppervlak behooren. De lijn d is dus eene dubbellijn.

Door d vlakken leggende, ziet men, dat deze gedurig twee evenwijdige beschrijvende lijnen van het oppervlak bepalen; het oppervlak bezit dus in het oneindig ver verwijderde vlak eene dubbelkromme. Uit het punt A van d, dat den afstand der evenwijdige vlakken midden doordeelt, den richtkegel van het scheeve tongewelf construeerende, ziet men, dat deze richtkegel van de tweede orde is, en dat de lijn d er op ligt; het scheeve tongewelf heeft dus eene dubbelkromme bestaande uit de lijn d, benevens eene deze snijdende kromme van de tweede orde, gelegen in het oneindig ver gelegen vlak. Het oppervlak behoort alzoo tot de afdeeling B van de tweede groep.

Projecteert men uit de punten van d de oneindig ver verwijderde kromme op het vlak van $c_1{}^2$, dan ontstaat een cirkelbundel, gaande door het snijpunt D van d met dit vlak en rakende aan eene lijn, door D getrokken loodrecht op de door D gaande middellijn van $c_1{}^2$. Deze cirkels snijden $c_1{}^2$ volgens evenwijdige koorden; de dubbelrakende ontwikkelbare bestaat dus, behalve uit d, uit een cilinder van de tweede orde, welks beschrijvende lijnen d loodrecht kruisen. Grenslijnen zijn die beschrijvende lijnen, die met d en de middelpunten der cirkels in een vlak liggen en d in de klempunten snijden. Twee andere grenslijnen vindt men door uit d raakvlakken aan de cirkels te leggen; zij zijn onbestaanbaar als d door de cirkels heen loopt, anders bestaanbaar; zij geven aanleiding tot klempunten in de oneindig ver verwijderde dubbelkromme. Het oppervlak behoort dus tot de tweede groep, geval B, soort b of c.

BBEL
TWI

der
r.

der
nen.

dig
d d

ar op

an de
ade

der
l, be

der
nen g

dig di
d d

ar opp

an de
akende

jn l, v

jn l, d

tellend

van d

	ROHN.	SALMON.	CREMONA.	CAYLEY.
ıbare	Model 1, 2, 3.	XI	11	1
oegd	Model 4.			
lig-	Model 5.	XII	12	4
lerde	Model 9, 10.	VI	1	10
met	Model 8.	VIII	2	7
ıbare or de		X	5	2
oegd				
lig- ıor *l*.		XIII	6	5
lerde		I	8	9
met	Model 7.	III	3	12
	Model 6.	II	9	3
ıde.		IV, V	10	6
		VII	7	8
		IX	4	11
roep.		II, IV, V	9, 10	3, 6

(Behoort bij pag. 484.)

GROEPEERING.		DUBBELKROMME.	DUBBEL-RAKE ONTWIKKELA
EERSTE GROEP.	**A.**	Twee elkander kruisende bestaanbare lijnen *d* en *d'*.	Twee elkander kruisend lijnen *d* en *d'*.
	B.	Twee elkander kruisende toegevoegd imaginaire lijnen.	Twee elkander kruisend imaginaire lijnen.
	C.	Twee oneindig dicht bij elkander liggende lijnen $dd' = d$.	Twee oneindig dicht bij gende lijnen $dd' = d$.
TWEEDE GROEP.	**A.**	Scheeve kromme van de derde orde c^3.	Ontwikkelbaar oppervlak klasse γ^3.
	B.	Kegelsnede c^2 met eene lijn *d*, die één punt met haar gemeen heeft.	Kegelvlak van de tweede daaraan rakende lijn *d*.
	C.	Twee elkander kruisende bestaanbare lijnen *d* en *d'*, beiden gesneden door de lijn *l*.	Twee elkander kruisend lijnen *d* en *d'*, beiden ges lijn *l*.
	D.	Twee elkander kruisende toegevoegd imaginaire lijnen, gesneden door *l*.	Twee elkander kruisend imaginaire lijnen gesneden
	E.	Twee oneindig dicht bij elkander liggende lijnen $dd' = d$, gesneden door *l*.	Twee oneindig dicht bij gende lijnen $dd' = d$, ges
DERDE GROEP.	**A.**	Een rechte lijn *t*, welke als drievoudige lijn optreedt.	Ontwikkelbaar oppervlak klasse γ^3.
	B.	als A.	Kegelvlak van de tweede de daaraan rakende lijn *t*.
	C.	als A.	De rechte lijn *l*, welke *t*
	D.	als A.	De rechte lijn *t*, drievoud
VIERDE GROEP.	**A.**	Scheeve kromme van de derde orde c^3.	Drievoudig tellende recht
	B.	Kegelsnede c^2 met de lijn *d*, die één punt met haar gemeen heeft.	als A.
	C en D.	Als C en D van de voorgaande groep.	als C en D van de voorg

OVERZICHT

VAN DE

BOEKEN, KAARTEN, PENNINGEN, ENZ.

OVERZICHT

VAN DE

BOEKEN, KAARTEN, PENNINGEN, ENZ.,

INGEKOMEN BIJ DE

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN

TE AMSTERDAM.

VAN APRIL 1887 TOT EN MET MAART 1888.



AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1888.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER - BAKELS.

Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde, herausgegeben von dem kön. statistischen Landesamt. Stuttgart 1887. Jahrg. 1886. Band I—II. roy. 8°.

ITALIË.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1887. Serie 4ª. Rendiconti. Vol. III. Fasc. 4—5. 4°.

Bollettino delle pubblicazioni Italiane. Firenze 1887. N°. 46—47. 8°.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

Sveriges geologiska Undersökning. Serie Aª. Beskrifning till kartbladet Lund, Nortelge, Svartkluben, Forsmark och Björn, Öregrund, Motala, N°. 92, 94, 97, 99, 101, 102. Serie Aᵇ. Beskrifning till kartbladet Venersborg och Halmstad. N°. 11, 12. Serie Bᵇ. Beskrifning till agronomiskt geologisk karta öfver Egendomen Svalnäs i Roslagen. Serie C. Afhandlingar och uppsatser. N°. 65, 78—91. 4° en 8°.

Nova Acta regiae Societatis scientiarum Upsaliensis. Upsaliae 1887. Seriei 3ª. Vol. XIII. Fasc. 2. 4°.

Inhoud:

P. T. Cleve. New researches on the compounds of Didymium.

K. B. J. Forssell. Beiträge zur Kenntniss der Anatomie und Systematik des Gloeolichenen.

A. Berger. Sur une application de la théorie des équations binômes à la sommation de quelques séries.

K. Angström. Sur une nouvelle méthode de faire des mesures absolues de la chaleur rayonnante, ainsi qu'un instrument pour enregistrer la radiation solaire.

C. Bovallius. Amphipoda Synopidea.
A. N. Lundström. Pflanzenbiologische Studien, II. Die Anpassungen der Pflanzen an Thiere.
C. W. S. Aurivillius. Beobachtungen über Acariden auf die Blättern verschiedener Bäume

RUSLAND.

Mémoires de l'Académie impériale des Sciences. St. Pétersbourg 1887. 7e Série. Tome XXXV. N°. 3—7. 4°.

Inhoud:

3. L. Struve. Bestimmung der Constante der Praecession und der eigenen Bewegung des Sonnensystems.
4. N. Uskow. Die Blutgefässkeime und deren Entwickelung bei einem Hühnerembryo.
5. Th. Pleske. Beschreibung einiger Vogelbastarde.
6. W. Radloff. Das türkische Sprachmaterial des Codex Comanicus.
7. J. Setschenow. Weiteres über das Anwachsen der Absorptionscoefficienten von CO_2 in den Salzlösungen.

Annalen des physikalischen Central-Observatoriums. St. Petersburg 1887. Jahrg. 1886. Theil I. 4°.

Bulletin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou. 1887. N°. 3. 8°.

Korrespondenzblatt des Naturforscher-Vereins. Riga 1887. N°. 30. 8°.

Bidrag till Kännedom af Finlands Natur och Folk, utgifna af Finska Vetenskaps Societeten. Helsingfors 1887. Häftet 44. 8°.

Exploration internationale des régions polaires 1882—1883 et 1883—1884. Helsingfors 1887. Tome II. Magnétisme terrestre. 4°.

ESPERANTO. Internationale Sprache. Vorrede und vollständiges Lehrbuch. Warschau 1887. 8°.

RUMENIE.

B. PETRICEICU-HASDEU. Etymologicum magnum Romaniae. Bucuresci 1887. Tomul II. Fasc. 1. (Amus-Apuc). roy. 8°.

AZIË.

Meteorological Observations recorded at six stations in India. June—July. 1887. 4°.

Journal of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1887. Vol. LIV. Part 2. N°. 4. Vol. LV. Part 2. N°. 5. Vol. LVI. Part 2. N°. 1. 8°.

Proceedings of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1887. N°. 6—8. 8°.

Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio. Yokohama 1887. Heft 37. 4°.

Journal of the College of Science, imperial University, Japan. Tokio 1887. Vol. I. Part 4. 4°.

Inhoud:

J. JJIMA. Ueber einige Tricladen Europa's.
S. SEKIYA. A model showing the motion of an earth-particle during an earthquake.
H. YOSHIDA. On aluminium in the ashes of flowering plants.
T. HAGA. The effects of dilution and the presence of jodium salts and carbonic acid upon the titration of Hydroxyamine by Jodine.
C. G. KNOTT. Notes on a large crystal sphere.

K. Mitsukuri. The marine biological station of the imperial University at Misaki.

AMERIKA.

Circulars of information of the Bureau of Education. Washington 1887. N°. 1—2. 8°.

Bulletin of the U. S. geological Survey. Washington 1886—1887. N°. 34—39. 8°.

Scientific Writings of Joseph Henry. Washington 1886. Vol. I—II. roy. 8°.
(Published by the Smithsonian Institution).

Memoirs of the national Academy of Sciences. Washington 1886. Vol. III. Part 2. 4°.

Inhoud:

E. Loomis. Contributions to meteorology.
C. H. F. Peters. On Flamsteed's stars „observed, but not existing".
——— Corrigenda in various star catalogues.
C. B. Comstock. Ratio of meter to yard.
J. S. Billings and W. Matthews. On composite photography as applied to craniology, and on measuring the cubic capacity of skulls.
——— On a new craniophore for use in making composite photographs of skulls.
A. S. Packard. On the Syncarida, a hitherto undescribed synthetic group of extinct malacostracous Crustacea.
——— On the Gampsonychidae, an undescribed family of fossil schizopod Crustacea.
——— On the Arithracaridae, a family of carboniferous macrurous decapod Crustacea.
——— On the carboniferous Xiphosurous fauna of North-America.
E. D. Cope. On two new forms of Polyodont and Gonorhynchid fishes from the eocene of the Rocky Mountains.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. Boston 1887. New Series. Vol. XIV. Part 2. 8⁰.

Proceedings of the American philosophical Society. Philadelphia 1887. Vol. XXIV. N⁰. 125. 8⁰.

Proceedings of the Academy of natural Sciences. Philadelphia 1887. Part 1—2. 8⁰.

Ch. A. Ashburner. The geologic distribution of natural gas in the United States. St. Louis 1886. 8⁰.

——————— The geologic relations of the Nanticoke disaster. 1887. 8⁰.

American Journal of Science. New Haven 1887. 3e Series. Vol. XXXIV. N⁰. 199—202. 8⁰.

American Journal of Philology, edited by B. L. Gildersleeve. Baltimore 1887. Vol. VIII. N⁰. 3. 8⁰.

American chemical Journal, edited by Ira Remsen. Baltimore 1887. Vol. IX. N⁰. 6. 8⁰.

Johns Hopkins University Studies in historical and political Science. Baltimore 1887. 5th Series. N⁰. X. 8⁰.

Journal of the American medical Association. Chicago 1887. Vol. IX. N⁰. 20—23. 4⁰.

25th Annual Report of the Secretary of the State Board of Agriculture of the State of Michigan. Lansing 1886. 8⁰.

Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Madison 1887. Vol. V. 8⁰.

Bulletin of the California Academy of Sciences. San Francisco 1887. Vol. II. N°. 7. 8°.

Proceedings of the Canadian Institute. Toronto 1887. 3d Series. Vol. V. Fasc. 1. 8°.

Memorias de la Sociedad cientifica »Antonio Alzate". Mexico 1887. Tomo I. N°. 4. 8°.

Boletin de Estadistica del estado de Puebla. Puebla de Zaragoza 1887. Tomo I. N°. 12—14. fol.

AANGEKOCHT.

De Navorscher. Amsterdam 1887. Nieuwe Serie. Jaarg. 20. Afl. 12. 8°.

Jaarboek der Rijks-Universiteit te Leiden, 1886—1887. Leiden 1887. 8°.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1887. Livr. 106—109. 4°.

Journal des Savants. Paris, Novembre 1887. 4°.

Bulletin des Sciences mathématiques. Paris 1887. 2e Série. Tome XI. Décembre. 8°.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1887. 6e Série. Tome XII. Décembre. 8°.

E. Maindron. L'Académie de Sciences. Histoire de l'Aca-

démie. Fondation de l'Institut national. Bonaparte membre de l'Institut national. Paris 1888. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1887. 5th Series. Vol. XXIV. N°. 151. 8°.

Annals and Magazine of natural History. London 1887. 5th Series. Vol. XX. N°. 120. 8°.

Report of the 55th and 56th meeting of the British Association for the Advancement of Science. London 1886—1887. 2 Vol. 8°.

Annals of Botany. Oxford 1887. Vol. I. N°. 1. 8°.

Astronomische Nachrichten. N°. 2812—2816. 4°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1887. N°. 24. 1888. N°. 1. 8°.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1887. Jahrg. 11. N°. 47—50. 1°.

Corpus inscriptionum latinarum. Berolini 1887. Vol. XIV. fol.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1887. 5ter Jahrg. Heft 8. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1887. Neue Folge. Band XXXII. Heft 4. 8°.

Bibliotheca zoologica. II. bearbeitet von O. TASCHENBERG. Leipzig 1887. Lief. 4. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1887. Band CCLXVI. Heft 8—10. 8°.

Der zoologische Garten. Frankfurt a.M. 1887. Jahrg. 28. N°. 10. 8°.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1887. 3e Période. Tome XVIII. N°. 11. 8°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND JANUARI 1888.

NEDERLAND.

Bijdragen van het statistisch Instituut. Amsterdam 1887. N°. 3. 8°.

Revue internationale scientifique et populaire des falsifications des denrées alimentaires. Amsterdam 1888. 1e Année. Livr. 3. 4°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1887. 4e Reeks. Deel XI. Afl. 12. 8°.

12de Jaarverslag omtrent het zoölogisch station der Nederlandsche dierkundige Vereeniging. Leiden 1887. 8°.

Flora Batava. Leiden 1887. Afl. 279—280. 4°.

Nota over de uitkomsten der waarnemingen van het slibgehalte der Nederlandsche rivieren door C. Lely. 's Gravenhage 1887. 4°.
(Uitgegeven door het Departement van Waterstaat, Handel en Nijverheid).

Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië, uitgegeven door het koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 's Gravenhage 1888. 5de Reeks. Deel III. Afl. 1. 8°.

Reis in Oost- en Zuid-Borneo van Koetei naar Banjermassin door C. Bock. 's Gravenhage 1887. 2de Gedeelte. 4°.
(Uitgegeven door het koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië).

Sepp's Nederlandsche Insecten. 's Gravenhage 1887. 2de Serie. Deel IV. N°. 33—36. 4°.

J. Dirks. De vondst van gouden voorwerpen en gouden merovingische munten te Dronrijp. Leeuwarden 1887. 8°.

L. Serrurier. Versuch einer Systematik der Neu-Guinea Pfeile. 4°.
(Separat-Abdruck aus internationales Archiv für Ethnographie. Band I).

J. W. Moll. De toepassing der paraffine-insmelting op botanisch gebied. 8°.
(Overgedrukt uit het Maandblad voor Natuurwetenschappen. 1887. N°. 5—6).

Statistiek van het Koningrijk der Nederlanden. Nieuwe Serie. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand November 1887. 's Gravenhage 1887. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, de Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maand Augustus 1887. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maand Augustus 1887. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Notulen van de algemeene- en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Batavia 1887. Deel XXV. Afl. 3. 8°.

Nederlandsch-Indisch plakaatboek, 1602—1811, door Mr. J. A. van der Chys. Batavia 1887. Deel IV. 8°. (Uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen).

Tijdschrift voor nijverheid en landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van Nijverheid en Landbouw. Batavia 1887. Deel XXXV. Afl. 6. 8°.

Geneeskundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige Wetenschappen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1887. Deel XXVII. Afl. 4. 8°.

Catalogus van de militaire geneeskundige Bibliotheek te Weltevreden. Batavia 1887. 8°.

BELGIË.

Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des beaux-Arts de Belgique. 1888. Bruxelles 1888. 54e Année. 8°.

F. Plateau. Recherches expérimentales sur la vision

chez les arthropodes. Bruxelles 1887. Part 1—2. 8°. (Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. 3e Série. Tome XIV).

F R A N K R IJ K.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1887. Tome CV. N°. 25—26. Tome CVI. N°. 1—3. 4°.

Bulletin de l'Académie de Médecine. Paris 1887—1888. 3e Série. Tome XVIII. N°. 51—52. Tome XIX. N°. 1—3. 8°.

Bulletin de la Société mathématique de France. Paris 1887. Tome XV. N°. 7. 8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Société de Biologie. Paris 1887. 8e Série. Tome IV. N°. 32—38, 40—42. Tome V. N°. 1. 8°.

Journal d'Hygiène. Paris 1887—1888. Année 14. Vol. XIII. N°. 588—592. 4°.

Bulletin de la Société philomatique de Paris. 1887. 7e Série. Tome XI. N°. 4. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the royal Society. London 1887. Vol. XLIII. N°. 260. 8°.

Proceedings of the royal Institution of Great Britain. London 1887. Vol. XII. Part 1. 8°.

List of the members of the royal Institution of Great Britain. London 1887. 8°.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1887. New Series. Vol. X. N°. 1. 8°.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. London 1887. Vol. XLVIII. N°. 2. 8°.

Journal of the royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland. London 1888. New Series. Vol. XX. Part 1. 8°.

Astronomical and magnetical and meteorological Observations made at the royal Observatory, Greenwich, in the year 1885. London 1887. 4°.

G. B. Airy. Numerical lunar theory. London 1886. 4°.

Journal of the royal geological Society of Ireland. Dublin 1887. New Series. Vol. VIII. Part 2. 8°.

OOSTENRIJK-HONGARIJE.

Mittheilungen der anthropologischen Gesellschaft. Wien 1885—1887. Band XV. Heft 4. Band XVII. Heft 3—4. 8°.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft. Wien 1887. Band XXXVII. N°. 3—4. 8°.

E. Baum. Ein Combinations-Studium über die Entwicklungs-Geschichte der Erdkruste. Wien 1887. 8°.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol und Vorarlberg. Innsbruck 1887. 3e Folge. Heft 31. 8°.

Verhandlungen des Vereins für Natur- und Heilkunde. Presburg 1884—1887. Neue Folge. Heft 5—6. 8°.

Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereines für Steiermark. Graz 1887. Jahrg. 1886. 8°.

DUITSCHLAND.

Sitzungsberichte der Gesellschaft naturforschender Freunde. Berlin 1887. Jahrg. 1887. 8°.

Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1887. Band CIX. Heft 2. Band XC. Heft 1—3. 8°.

Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften, herausgegeben vom naturwissenschaftlichen Verein. Hamburg 1887. Band X. 4°.

Inhoud:

E. Wohlwill. Joachim Jungius und die Erneuerung atomistischer Lehren im 17 Jahrhundert.

J. Kiessling. Beiträge zu einer Chronik ungewöhnlicher Sonnen- und Himmelsfärbungen.

G. Neumayer. Die Thätigkeit der Deutschen Seewarte während der ersten 12 Jahre ihres Bestehens.

H. Krüss. Die Farben-Korrektion der Fernrohr-Objektive von Gauss und von Fraunhofer.

A. Voller. Ueber die Messung hoher Potentiale mit dem Quadrant-Elektrometer.

F. Wibel. I. Die Schwankungen im Chlorgehalt und Härtegrade des Elbwassers bei Hamburg. — II. Chemisch-antiquarische Mitteilungen.

C. Gottsche. Die Mollusken-Faune des Holsteiner Gesteins.

K. Kraepelin. Die Deutschen Süsswasser-Bryozoen.

K. Möbius. Das Flaschentierchen (Folliculina ampulla).

G. Pfeffer. Beiträge zur Morphologie der Dekapoden und Isopoden.

G. Stuhlmann. Zur Kenntniss des Ovariums der Aalmutter (Zoarces viviparus Cuv.).

Zeitschrift der historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Posen 1885. Jahrg. 1. Heft 1—4. 8°.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, herausgegeben von der medicinisch-naturwissenschaftlicher Gesellschaft. Jena 1887. Band XXI. Heft 3—4. 8°.

Zeitschrift des Vereins für thüringische Geschichte und Altertumskunde. Jena 1887. Neue Folge. Band V. Heft 3—4. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1887. Jahrg. X. N°. 268—270. 8°.

R. Hoppe. Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1887. 2te Reihe. Teil V. Heft 4. Teil VI. Heft 1. 8°.

Petermann's Mitteilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1887. Band XXXIII. N°. 10—12. Band XXXIV. N°. 1. Ergänzungsheft N°. 88. 4°.

C. P. Tiele. Babylonisch-assyrische Geschichte. Gotha 1888. Teil II. 8°.

B. Symons. Die Lieder Edda. Halle a/S. 1888. Band I. 1ste Hälfte. Götterlieder. 8°.

Zeitschrift für Naturwissenschaften, herausgegeben im Auftrage des naturwissenschaftlichen Vereins für Sachsen und Thüringen. Halle a/S. 1887. 4e Folge. Band VI. Heft 3—4. 8°.

Correspondenz-Blatt des naturwissenschaftlichen Vereines. Regensburg 1887. Jahrg. 40. 8°.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1887. Heft 2. 8°.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1887. Heft 3. Band II. Heft 1—2. 8°.

Die Cisterzienser-Abtei Bebenhausen, bearbeitet von Dr. E. PAULUS, herausgegeben vom Württembergischen Altertums-Verein. Stuttgart 1887. 4°.

ZWITSERLAND.

Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft. Basel 1887. Theil VIII. Heft 2. 8°.

ITALIË.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1887. Serie 4ª. Rendiconti. Vol. III. Fasc. 6—7. 4°.

Memorie del regio Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Venezia 1887. Vol. XXII. Parte 3. 4°.

Inhoud:

A. GLORIA. Monumenti della Universita di Padova.
A. PAZIENTI. Considerazioni generali intorno alla termodinamica
A. DE ZIGNO. Sopra uno scheletro fossile di Myliobates, esistente nel Museo Gazola in Verona.
G. A. PIRONA. Due Chamacee nuove del terreno cretaceo del Friuli.
A. FAVARO. Miscellanea Galileiana inedita.

Atti del reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Venezia 1887. Serie 6. Tome V. Disp. 2—9. 8°.

Atti della reale Accademia delle Scienze. Torino 1887—88. Vol. XXIII. Disp. 1. 8°.

Mittheilungen aus der zoologischen Station zu Neapel. Berlin 1887. Band VII. Heft 3—4. 8°.

Bollettino delle pubblicazioni Italiane. Firenze 1887. N°. 48—49. 8°.

Atti del Collegio degli Ingegneri ed Architetti. Palermo 1887. N°. 2. 4°.

A. Favaro. Per la edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei. Firenze 1888. 4°.

Atti della Societa Toscana di Scienze naturali. Pisa 1887—89. Processi Verbali. Vol. VI. Adunanza del 13 Novembre 1887. 8°.

RUSLAND.

Mémoires du Comité géologique. St. Pétersbourg 1887. Vol. II. N°. 4—5. Vol. III. N°. 3. 4°.

Inhoud:

4. J. Schmalhausen. Die Pflanzenreste der artinskischen und permischen Ablagerungen im Osten des europäischen Russlands.
5. A. Pavlow. Le presqu'île de Samara et les Gegoulis.

Vol. III. N°. 3:

Th. Tschernyschew. Die Fauna des mittleren und oberen Devon am West-Abhange des Urals.

Bulletins du Comité géologique. St. Pétersbourg 1887. Tome VI. N°. 8—10. 8°.

Verslagen van het keiz. aardrijkskundig Genootschap. St. Petersburg 1887. Deel XXIII. N°. 5. 8°. (In het Russisch).

AZIË.

Transactions of the seismological Society of Japan. Yokohama 1887. Vol. XI. 8°.

AMERIKA.

Index-Catalogue of the Library of the Surgeon-General's Office, U. S. Army. Washington 1887. Vol. VIII. (Legier-Medicine). 4°.

Journal of the American medical Association. Chicago 1887—1888. Vol. IX. N°. 24—27. Vol X. N°. 1. 4°.

Johns Hopkins University Circulars. Baltimore 1887. Vol. VII. N°. 60—62. 4°.

American Journal of Mathematics, edited by S. Newcomb. Baltimore 1888. Vol. X. N°. 2. 4°.

Johns Hopkins University Studies in historical and political Science. Baltimore 1887. 5th Series. N°. XI. 8°.

Memorias de la Sociedad cientifica »Antonio Alzate". Mexico 1887. Tome I. N°. 5. 8°.

Boletin de Estadistica del estado de Puebla. Puebla de Zaragoza 1887. Tomo I. N°. 15—26. fol.

Archivos do Museu Macional do Rio de Janeiro. 1885. Vol. VI. 4°.

Inhoud:

C. F. Hartt. Contribuicoes para a ethnologia do valle do Amazonas.
J. B. de Lacerda. Contribuiçao para a anthropologia do Brazil.
J. R. Peixoto. Novos estudos craneometricos sobre os Botocudos.
L. Netto. Investigaçoes sobre a archeologia Brazileira.

Revista do Observatorio, publicaçao mensal do imperial Observatorio do Rio de Janeiro. 1887. Anno II. N°. 11. 4°.

AUSTRALIË.

Journal and Proceedings of the royal Society of N. S. W. Sydney 1887. Vol. XX. 8°.

F. W. Edgeworth David. Geology of the vegetable creek tin-mining field, New England district, N. S. W. with maps and sections. Sydney 1887. 4°.

Annual Report of the department of mines, N. S. W. for the year 1886. Sydney 1887. fol.

F. Mc. Coy. Prodromus of the zoology of Victoria; or figures and descriptions of the living species of all classes of the Victorian indigenous animals. Melbourne 1887. Decade XV. roy. 8°.

AANGEKOCHT.

Oud-Holland. Nieuwe Bijdragen voor de Geschiedenis der Nederlandsche Kunst, Letterkunde, Nijverheid, enz. Amsterdam 1887. Jaarg. 5. Afl. 4. 4°.

De Navorscher. Amsterdam 1888. Nieuwe Serie. Jaarg. 21. N°. 1. 8°.

Oeuvres complètes de Bartolomeo Borghesi. Paris 1879—1884. Tome IX. Part 1—2. 4°.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1887. Livr. 110—114. 4°.

Journal des Savants. Paris, Décembre 1887. 4⁰.

Bulletin des Sciences mathématiques. Paris 1888. 2e Série. Tome XII. Janvier. 8⁰.

Annales des Sciences naturelles. Paris 1887. 7e Série. Zoologie. Tome III. N⁰. 1—6. Botanie. Tome VI. N⁰. 2. 8⁰.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1888. 6e Série. Tome XIII. Janvier. 8⁰.

Monthly microscopical Journal. Transactions of the royal microscopical Society. London 1869—1877. Vol. I—XVIII. 8⁰.

Journal of the royal microscopical Society. London 1878—1879. Vol. I—II. 8⁰.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1888. 5th Series. Vol. XXV. N⁰. 152. 8⁰.

Annals and Magazine of natural History. Londen 1888. 6th Series. Vol. I. N⁰. 1. 8⁰.

Journal of Anatomy and Physiology normal and pathological. London 1888. Vol. XXII. Part 2. 8⁰.

The zoological Record for 1886. London 1887. 8⁰.

Annals of Botany. Oxford 1887. Vol. 1. N⁰. 2. 8⁰.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1887. N⁰. 25. 8⁰.

Astronomische Nachrichten. 1887. N⁰. 2817—2823. 4⁰.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1887. Jahrg. XI. N°. 51—52. Jahrg. XII. N°. 1—3. 4°.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1887. Band V. (General Versammlungs-Heft). 8°.

Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1887. Jahrg. 53. Band I. Heft 2. Band II. Heft 2. 8°.

A. Boetticher. Die Akropolis von Athen. Berlin 1888. roy. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1888. Neue Folge. Band XXXIII. Heft 1. Beiblätter. Band XI. Stück 11—12. 8°.

Zeitschrift für physikalische Chemie. Leipzig 1887. Band I. Heft 11—12. 8°.

Der zoologische Garten. Frankfurt a. M. 1887. Jahrg. 28. N°. 11. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1887—1888. Band CCLXVI. Heft 11—13. Band CCLXVII. Heft 1—3. 8°.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Lausanne 1887. 3e Période. Tome XXXVI. N°. 107—108. 8°.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1887. 3e Période. Tome XVIII. N°. 12. 8°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND FEBRUARI 1888.

NEDERLAND.

Catalogus van de Bibliotheek der vereenigde doopsgezinde Gemeente te Amsterdam. 1888. Deel. II. 2de en 3de Afdeeling. roy. 8°.

De Volksvlijt, tijdschrift voor nijverheid, landbouw, handel en scheepvaart. Amsterdam 1887. N°. 5—8. 8°.

N. Quint. De wervelbeweging. Amsterdam 1888. Academisch proefschrift. 8°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1888. 4e Reeks. Deel XII. Afl. 1. 8°.

B. J. Stokvis. Voordrachten over Homoeopathie, gehouden aan de Amsterdamsche Universiteit. Haarlem 1888. 8°.

Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas. Leide 1887. Tome VI. N°. 1—7. 8°.

Verslag aan den Koning van de bevindingen en handelingen van het geneeskundig Staatstoezicht in het jaar 1886. 's Gravenhage 1887. 4°.

Graphische voorstelling van de sterfte van kinderen beneden het jaar in elke gemeente van Nederland in het vijfjarig tijdperk 1880—1885. Plano.

Tijdschrift van het koninklijk Instituut van Ingenieurs. 1887—1888. 's Gravenhage 1888. Afl. 2. 1ste Gedeelte. Afl. 3. 2de Gedeelte. 4°.

Tijdschrift voor Entomologie, uitgegeven door de Nederlandsche entomologische Vereeniging. 's Gravenhage 1888. Deel XXXI. Afl. 1. 8°.

Archief voor Nederlandsche Kerkgeschiedenis, onder redactie van J. G. R. Acquoy en H. C. Rogge. 's Gravenhage 1885—1887. Deel I—II. 8°.

Bijdragen voor vaderlandsche Geschiedenis en Oudheidkunde. 's Gravenhage 1888. 3de Reeks. Deel IV. Afl. 2. 8°.

Algemeen Nederlandsch Familieblad. Tijdschrift voor geschiedenis, geslacht-, wapen-, zegelkunde, enz. 's Gravenhage 1888. Jaarg. 5. N°. 1. 4°.

Aanwinsten van het munt-, penning- en zegelkabinet van het Friesch Genootschap voor Geschiedenis en Oudheidkunde van 10 September 1886—10 October 1887. Leeuwarden z. j. 8°.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, de Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maand September 1887. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maand September 1887. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Tijdschrift voor nijverheid en landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van Nijverheid en Landbouw. Batavia 1888. Deel XXXVI. Afl. 1. 8°.

Dr. L. C. van der Burg. De geneesheer in Nederlandsch-Indië. Batavia 1887. Deel II. 8°.
(Uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige Wetenschappen in Nederlandsch-Indië.)

Schets-taalkaart van Sumatra, samengesteld door K. F. Holle en J. L. A. Brandes. 1887. Schaal 1 : 2000000.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1887. 4e Série. Tome I. N°. 11. Tome II. N°. 1. 8°.

Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège. Bruxelles 1888. 2e Série. Tome XIV. 8°.

F. de Potter en J. Broeckaert. Geschiedenis van de gemeenten der provincie Oost-Vlaanderen. Gent 1887. Deel XLI. 8°.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1888. Tome CVI. N°. 4—7. 4°.

Bulletin de l'Académie de Médecine. Paris 1888. 3e Série. Tome XIX. N°. 4—7. 8°.

Journal d'Hygiène. Paris 1888. 14e Année. Vol. XIII. N°. 593—596. 4°.

Revue internationale de l'Electricité et de ses applications. Paris 1885—1888. Tome I—V. Tome VI. N°. 49—50. roy. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the royal Society. London 1888. Vol. XLIII. N°. 261—262. 8°.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. London 1888. Vol. XLVIII. N°. 3. 8°.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1888. New Series. Vol. X. N°. 2. 8°.

Journal of the royal microscopical Society. London 1887. Part 6ª. 1888. Part 1. 8°.

Proceedings of the Cambridge philosophical Society. Cambridge 1887. Vol. VI. Part 3. 8°.

OOSTENRIJK-HONGARIJE.

W. Zsigmondy. Mittheilungen über die Bohrthermen zu Harkany, auf der Margaretheninsel nächst Ofen und zu Lippik, und den Bohrbrunnen zu Alcsuth. Pest 1873. 8°.

Die Kollectiv-Ausstellung ungarischer Kohlen auf der Wiener Weltausstellung 1873. Pest 1873. 8°.

Földtani Közlöny (Geologische Mittheilungen). Zeitschrift der ungarischen geologischen Gesellschaft. Budapest 1887. Kötet XVII. Füzet 7—12. 8°.

L. Petrik. Ueber ungarische Porcellanerden, mit besonderer Berücksichtigung der rhyolith-kaoline. Budapest 1887. 8°.
(Publicationen der kön. ungarischen geologischen Anstalt.)

DUITSCHLAND.

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1886, herausgegeben von dem kön. preussischen meteorologischen Institut. Berlin 1888. 4°.

A. Lissauer. Die prähistorischen Denkmäler der Provinz Westpreussen und der angrenzenden Gebiete. Leipzig 1887. 4°.
(Herausgegeben von der naturforschenden Gesellschaft zu Danzig.)

Abhandlungen herausgegeben von der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft. Frankfurt a/M. 1887. Band XV. Heft 1. 4°.

Inhoud:

Th. Geyler und F. Kinkelin. Oberpliocän- Flora aus den Baugruben des Klärbeckens bei Niederrad und der Schleuse bei Höchst a. M.
H. B. Möschler. Beiträge zur Schmetterlings-Fauna der Goldküste.
F. Noll. Experimentelle Untersuchungen über das Wachstum der Zellmembran.

Chronik der königlichen Universität zu Greifswald für das Jahr vom 15 Mai 1886 bis 15 Mai 1887. Greifswald. 4°.

F. Susemihl. De Platonis Phaedro et Isocratis contra Sophistas oratione dissertatio cum appendice Aristotelica. Gryphiswaldiae 1887. 4°.

A. Kiessling. Coniectaneorum spicilegium. IV. Gryphiswaldiae 1887. 4°.

E. Albrecht. Anatomische, histologische, physiologische Untersuchungen über die Muskulatur des Endocardium bei Warmblütern. Greifswald 1887. 8°.

W. Arendt. Zur Casuistik der Nephrektomie. Greifswald 1887. 8°.

G. Bierbaum. Ein Fall von totaler Exstirpation der Scapula wegen eines Fibrosarcoms. Greifswald 1887. 8°.

P. Bodenstein. Beitrag zur Casuistik von Deckung grosser Defecte am Arm durch einen Bauchlappen. Greifswald 1887. 8°.

O. Böttcher. Ueber die Anwendung des Antipyrin mit besonderer Berücksichtigung des Gelenkrheumatismus. Greifswald 1887. 8°.

E. Cohnstädt. Ueber die osteoplastische Fussresection nach Mikulicz. Greifswald 1887. 8°.

W. Dommes. Radicaloperation einer Prostatahypertrophie complicirt mit suppurativer Cystitis. Greifswald 1887. 8°.

G. Dos. Zur Lehre vom Husten. Greifswald 1887. 8°.

P. Elbusch. Ueber entzündliche Epiphysenlösung. Greifswald 1887. 8°.

O. Elfeldt. Zur Casuistik der Schussverletzungen der Wirbelsäule. Greifswald 1887. 8°.

K. Faber. Ein Fall von schwerer allgemeiner Syphilis mit syphilitischer Knie-Gelenkentzündung. Greifswald 1887. 8°.

E. Fähndrich. Beitrag zur operativen Behandlung des Carcinoma penis. Greifswald 1887. 8°.

L. Flichter. Zur Pathologie und Therapie des Carcinoma Uteri nebst casuistischen Beiträgen. Greifswald 1887. 8°.

E. Frank. Zur Statistik und Behandlung der Querbrüche der Patella. Greifswald 1887. 8°.

F. Frank. Beitrag zur Kenntnis der typischen Bauchdecken Fibrome. Greifswald 1887. 8°.

K. Goedicke. Ein Fall von schwerer Urogenitaltuberkulose mit Tendenz zur Heilung. Greifswald 1887. 8°.

O. Granow. Zur Wirkung des Colchicin. Greifswald 1887. 8°.

F. von Grumbkow. Beitrag zur Aetiologie der Peritonitis. Greifswald 1887. 8°.

H. Hellenbroich. Casuistische Beiträge zur Chirurgie des Magens. Greifswald 1887. 8°.

O. Hildebrandt. Die vaginale Total-Exstirpation des carcinomatösen Uterus mit Anwendung der Müller'schen Zangen nebst casuistischen Beiträgen. Greifswald 1887. 8°.

J. Hoppe. Ueber den Streckapparat des Unterschenkels und die Behandlung der Querbrüche der Kniescheibe. Greifswald 1887. 8°.

A. Jaworowicz. Ein Fall von Carcinoma Omenti majoris. Greifswald 1887. 8°.

Th. Jüngst. Experimentelle Untersuchungen über Sedum acre. Greifswald 1887. 8°.

R. Kessler. Einige Fälle von Echinococcus hepatis mit Berücksichtigung der Aetiologie und Therapie. Greifswald 1887. 8°.

F. Köppler. Ueber das Antifebrin. Greifswald 1887. 8°.

F. Kozuszkiewicz. Ueber Pseudoleukaemie. Greifswald 1887. 8°.

A. Kruse. Ueber die Beziehungen des kohlensauren Ammoniaks zur Uraemie. Greifswald 1887. 8°.

J. Lemkowski. Beitrag zur Behandlung primärer perinephritischer Abscesse. Greifswald 1887. 8°.

M. Lobert. Ein Fall von Thrombose der Pfortader. Greifswald 1887. 8°.

R. Macks. Ueber den Zusammenhang zwischen psychischen Störungen und Abnahme des Körpergewichts. Greifswald 1887. 8°.

J. Moerlin. Ueber indirecte Sternalfracturen. Greifswald 1887. 8°.

M. Niesel. Ueber die Wirkung fortgesetzter kleiner Dosen von Schwefel beim gesunden Menschen. Greifswald 1887. 8°.

O. Olbrich. Zwei Fälle einer Complication von Carcinoma uteri mit Graviditaet. Greifswald 1887. 8°.

L. Pernice. Ueber die Wirkung localer Blutentziehungen auf acute Hautentzündungen. Greifswald 1887. 8°.

J. Pomorski. Ein Fall von Rankenneurom der Intercostalnerven, Fibroma molluscum und Neurofibroma. Greifswald 1887. 8°.

A. Proske. Ein Fall von Dermoidcyste des linken Ovariums. Greifswald 1887. 8°.

S. Rahmer. Der gegenwärtige Stand der Lehre von den Lungenerkrankungen und von der Todesursache nach

doppelseitiger Vagusdurchschneidung am Halse und experimentelle Beiträge zu dieser Frage. Greifswald 1887. 8°.

W. La Roche. Experimentelle Beiträge zur Eisenwirkung. Greifswald 1887. 8°.

A. Sauer. Ein Beitrag zur Lehre von der Perspiratio insensibilis. Greifswald 1887. 8°.

C. Schinke. Zur Casuistik der Leberkrankheiten. Greifswald 1887. 8°.

O. Schirmer. Experimentelle Studie über reine Linsencontusionen. Greifswald 1887. 8°.

C. Schleich. Ueber einen Fall von pulsirenden Knochensarcom (Sarcoma aneurysmaticum) des Oberschenkels mit Spontanfractur des Femur und des Humerus nebst Bemerkungen über die Aetiologie einiger Formen von Spontanfracturen. Greifswald 1887. 8°.

O. Schömann. Ueber Leukaemie in verscheidenen Lebensaltern mit besonderer Berücksichtigung eines Falles im 75sten Jahre. Greifswald 1887. 8°.

M. Schröder. Die Mitchell Playfair'sche Mastkur in den Irren-Anstalten. Greifswald 1887. 8°.

E. Seyler. Zur Casuistik der Hodensarcome. Greifswald 1887. 8°.

E. Stein. Ueber die Wirkung fortgesetzter kleiner Dosen von Kampher beim gesunden Menschen. Greifswald 1887. 8°.

G. Thümmel. Ueber einen Fall von allgemeiner Carcinose mit besonderer Berücksichtigung des klinischen Verlaufes. Greifswald 1887. 8⁰.

V. Ullrich. Zur Casuistik der Unterbindungen des Truncus anonymus. Greifswald 1887. 8⁰.

M. Weinert. Zur Casuistik der Leukaemie bei Frauen. Greifswald 1887. 8⁰.

S. Wendland. Ueber die Total-Exstirpation des carcinomatosen Uterus. Greifswald 1887. 8⁰.

O. Westphal. Ueber einen in akute Leukaemie übergehenden Fall von Pseudoleukaemie. Greifswald 1887. 8⁰.

H. Zielstorff. Ein Fall von Unterleibscyste (Pancreascyste?). Greifswald 1887. 8⁰.

W. Jaworowicz. Ueber die Hydrazinverbindungen einiger Amidobenzolsulfonsäuren. Greifswald 1887. 8⁰.

K. F. Ketel. Anatomische Untersuchungen über die Gattung Lemanea. Greifswald 1887. 8⁰.

W. Koch. Die conforme Abbildung des hyperbolischen Paraboloids auf einer Ebene. Greifswald 1887. 8⁰.

F. Pasche. Ueber Toluol- und Toluidendisulfosäuren und über die Constitution der sechs isomeren Toluoldisulfosäuren. Greifswald 1887. 8⁰.

A. Brunk. De excerptis ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΤΩΝ ΗΡΩΩΝ ΚΑΘ' ΟΜΗΡΟΝ ΒΙΟΥ ab Athenaeo Servatis. Gryphiswaldiae 1887. 8⁰.

E. Busch. Laut- und Formenlehre der anglonormannischen Sprache des XIV Jahrhunderts. Greifswald 1887. 8⁰.

C. FRANKE. De nominum propriorum epithetis Homericis. Gryphiswaldiae 1887. 8°.

PH. FRUCHT. Metrisches und sprachliches zu Cynewulfs Elene, Juliana und Crist. Greifswald 1887. 8°.

L. GIESCHEN. Die charakteristischen Unterschiede der einzelnen Schreiber im Hatton MS. der Cura pastoralis. Greifswald 1887. 8°.

A. HAASE. Die Schlacht bei Nürnberg vom 19 Juni 1502. Greifswald 1887. 8°.

G. KLINKE. Quaestiones Aeschineae criticae. Lipsiae 1887. 8°.

F. MARTENS. Geschichte der französischen Synonymik. Teil I. Die Anfänge der französischen Synonymik. Stralsund 1887. 8°.

W. MEUS. Zur Legation des Bischofs Hugo von Die unter Gregor VII. Greifswald 1887. 8°.

R. PFENNIG. De librorum quos scripsit Seneca de ira compositione et origine. Gryphiae 1887. 8°.

H. PHILIPSEN. Ueber Wesen und Gebrauch des bestimmten Artikels in der Prosa König Alfreds auf Grund des Orosius [hs. L.] und der Cura pastoralis. Greifswald 1887. 8°.

O. SCHMIDT. Rousseau und Byron. Ein Beitrag zur vergleichenden Litteraturgeschichte. Greifswald 1887. 8°.

G. SCHULZE. Quaestionum Homericarum specimen. Gryphiswaldiae 1887. 8°.

G. STEINHAUSEN. De legum XII tabularum patria. Gryphiswaldiae 1887. 8°.

O. WENNER. Ueber zwei Denkschriften Radetzkys aus dem Frühjahr 1813. Greifswald 1887. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1888. Jahrg. 11. N°. 271—272. 8°.

Führer durch das Museum Godeffroy. Hamburg 1882. 8°.

ZWITSERLAND.

Abhandlungen der schweizerischen paläontologischen Gesellschaft. Basel 1887. Vol. XIV. 4°.

Inhoud:

H. HAAS. Brachiopodes rhétins et jurassiques des Alpes Vaudoises 2e. partie.
KOBY. Monographie des Polypiers jurassiques de la Suisse. 7e partie.
TH. STUDER. Ueber den Steinkerrn des Gehirnraumes einer Sirenoide.
G. MAILLARD. Considérations sur les fossiles décrits comme Algues.
P. DE LORIOL et BOURGEAT. Etudes sur les Mollusques des couches coralligènes de Valfin.

ITALIË.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1887. Serie 4a. Rendiconti. Vol. III. Fasc. 8—9. 8°.

Atti della reale Accademia delle Scienze. Torino 1888. Vol. XXIII. Disp. 2—3. 8°.

Bollettino delle pubblicazioni Italiane. Firenze 1888. N°. 50—51. 8°.

DENEMARKEN.

Mémoires de la Société royale des Antiquaires du Nord. Copenhague 1887. Nouvelle Série. Année 1887. 8°.

RUSLAND.

Beobachtungen der russischen Polarstation an der Lenamündung. 1887. Theil II. Lief. 2. Meteorologische Beobachtungen. 4°.

Description systématique des collections du Musée ethnographique Daschkow. Moscou 1887. Livr. 1. 8°. (In het Russisch.)

AZIË.

Report on the administration of the meteorological Department of the Government of India in 1886—87. fol.

Indian meteorological Memoirs. Calcutta 1887. Vol. III. Part 2. fol.

Meteorological Observations recorded at six stations in India, August—September 1887.

AFRIKA.

Bulletin de la Société khédiviale de Géographie. Le Caire 1887. 2e Série. N°. 12. 8°.

AMERIKA.

Report of the Commissioner of Education for the year 1885—86. Washington 1887. 8°.

Report of the Surgeon-General of the Army to the Secretary of War for the year ending June 30, 1887. Washington 1887. 8°.

American chemical Journal, edited by Ira Remsen. Baltimore 1888. Vol. X. N°. 1. 8°.

Annals of the astronomical Observatory of Harvard College. Cambridge 1888. Vol. XIII. Part 2. 4°.

Inhoud:

E. C. Pickering. Zone observations made with the transit Wedge-Photometer.

52d Annual Report of the Director of the astronomical Observatory of Harvard College. Cambridge 1887. 8°.

Journal of the American medical Associaton. Chicago 1888. Vol. X. N°. 2—5. 4°.

J. Macoun. Catalogue of Canadian plants. Part 3. Apetalae. Montreal 1886. 8°.
(Geological and natural History Survey of Canada.)

Boletin de Estadistica del estado de Puebla. Puebla de Zaragoza 1887. Tomo I. N°. 21—26. fol.

Revista do Observatorio, publicaçao mensal do imperial Observatorio do Rio de Janeiro. 1887. Anno 2. N°. 12. 4°.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1887. Tomo XXIV. Entr. 2—6. 8°.

AUSTRALIË.

R. von Lendenfeld. Descriptive Catalogue of the Medusae of the Australian Seas. Sydney 1887. 8°.

AANGEKOCHT.

De Navorscher. Amsterdam 1888. Nieuwe Serie. Jaarg. 21. N°. 2. 8°.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1887. Livr. 115—118. 4°.

Journal des Savants. Paris, Janvier 1888. 4°.

Annales des Sciences naturelles. Paris 1887. 7e Série. Zoologie. Tome IV. N°. 1—3. 8°.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1888. 6e Série. Tome XIII. Février. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1888. 5th Series. Vol. XXV. N°. 153. 8°.

Annals and Magazine of natural History. London 1888. 6th Series. Vol. I. N°. 2. 8°.

L. Stephen. Dictionary of national Biography. London 1888. Vol. XIII. (Craik-Damer). 8°.

Astronomische Nachrichten. N°. 2824—2826. 4°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1887. N°. 26. 1888. N°. 2—3. 8°.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1888. Jahrg. 12. N°. 4—7. 4°.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1887. Jahrg. 5. Heft 10. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1888. Neue Folge. Band XXXIII. Heft 2. Beiblätter. Band XII. Stück 1. 8°.

Zeitschrift für physikalische Chemie. Leipzig 1888. Band II. Heft 1. 8°.

Journal für Ornithologie. Leipzig 1887. Jahrg. 35. Heft 3. 8°.

Der zoologische Garten. Frankfurt a.M. 1887. Jahrg. 28. N°. 12. Jahrg. 29. N°. 1. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1888. Band CCLXVII. Heft 4—7. 8°.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1888. 3e Période. Tome XIX. N°. 1—2. 8°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND MAART 1888.

N E D E R L A N D.

De Volksvlijt, tijdschrift voor nijverheid, landbouw, handel en scheepvaart. Amsterdam 1887. N°. 9—10. 8°.

Revue internationale scientifique et populaire des falsifications des denrées alimentaires. Amsterdam 1888. 1e Année. Livr. 4. 4°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1888. 4e Reeks. Deel XII. Afl. 2. 8°.

Koloniaal Museum. Beschrijvende Catalogus tevens handleiding tot de kennis der voortbrengselen van de Nederlandsche overzeesche gewesten. Haarlem 1888. Deel V. 8°.

S. J. Fockema Andreae. Bijdragen tot de Nederlandsche rechtsgeschiedenis. Haarlem 1888. 1e Bundel. 8°.

Onderzoek omtrent de afsluiting en droogmaking van de Zuiderzee, de Wadden en de Lauwerzee. — De afsluiting Noord-Holland — Wieringen — Friesland en de droogmaking van het gedeelte der Zuiderzee binnen die afsluiting. A. De afsluiting. 1. De invloed der afsluiting op de waterkeering der provinciën langs de Zuiderzee. Leiden. z. j. fol.

Jaarboek van de koninklijke Nederlandsche Zeemacht, 1886—1887. 's Gravenhage 1888. 8°.

Algemeen Nederlandsch Familieblad. Tijdschrift voor geschiedenis, geslacht-, wapen-, zegelkunde, enz. 's Gravenhage 1888. Jaarg. 5. N°. 2. 4°.

Berichten en Mededeelingen der Vereeniging voor Lijkverbranding. 's Gravenhage 1888. 13de Jaarg. N°. 1. 8°.

Annales de l'Ecole polytechnique de Delft. Leide 1888. Tome III. Livr. 4. 4°.

Inhoud:

J. Cardinaal. Application des principes de la géométrie synthétique à la solution des problèmes de la géométrie descriptive.
Ch. M. Schols. Démonstration directe de la loi limite pour les erreurs dans le plan et dans l'espace.

29ste Jaarlijksch verslag door de hoofd-commissie aan de leden van de Vereeniging tot daarstelling van eene

algemeene openbare Bibliotheek en van een daaraan verbonden Leeskabinet te Rotterdam, medegedeeld in de algemeene Vergadering van 25 Februari 1888. 8°.

Werken van het historisch Genootschap. Utrecht 1888. Nieuwe Serie. N°. 46—50. 5 Dl. 8°.

Statistiek van het koninkrijk der Nederlanden. Nieuwe Serie. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maanden Januari en Februari 1888. 's Gravenhage 1888. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maand October 1887. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maand October 1887. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIE.

Geneeskundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige Wetenschappen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1888. Deel XXVII. Afl. 5. 8°.

Tijdschrift voor nijverheid en landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van Nijverheid en Landbouw. Batavia 1888. Deel XXXVI. Afl. 2. 8°.

G. J. P. J. Bolland. Schijn en wezen. Algemeene beschouwingen over de begrippen stof en kracht. Batavia 1887. 8°.
(Overgedrukt uit het Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië. Deel XLVII.)

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des beaux-Arts de Belgique. Bruxelles 1887. 3e Série. Tome XIV. N°. 12. Tome XV. N°. 1. 8°.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1888. 4e Série. Tome II. N°. 2. 8°.

C. UBAGHS. Notice biographique du géologue Binkhorst tot den Binkhorst. 8°.

———— Quelques considérations sur les dépots crétacés de Maestricht dans leurs connexions avec les couches dites Maestrichtiennes de Ciply. Bruxelles 1887. 8°.
(Extrait du Bulletin de la Société belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Tome I).

———— Compte rendu général des séances et excursions de la Société belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Bruxelles 1888. 8°.
(Extrait du Bulletin de la Société belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Tome I).

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1888. Tome CVI. N°. 8—12. 4°.

Bulletin de l'Académie de Médecine. Paris 1888. 3e Série. Tome XIX. N°. 8—12. 8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Société de Biologie. Paris 1888. 9e Série. Tome V. N°. 2—3, 5—9. 8°.

Bulletin de la Société mathématique de France. Paris 1887. Tome XVI. N°. 1. 8°.

Journal d'Hygiène. Paris 1888. 14e Année. Vol. XIII. N°. 599—601. 4°.

Revue internationale de l'Electricité et de ses applications. Paris 1888. 4e Année. Tome VI. N°. 52—54. roy. 8°.

L. Janmart de Brouillant. Histoire de Pierre de Marteau imprimeur à Cologne. (XVIIe et XVIIIe Siècles). Paris 1888. roy. 8°.

Bulletin de la Société Linnéenne de Normandie. Caen 1881. 3e Série. Vol. V—VI. 2 Dl. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the royal Society. London 1888. Vol. XLIII. N°. 263. 8°.

Memoirs of the royal astronomical Society. London 1888. Vol. XLIX. Part 1. 4°.

Inhoud:

J. L. E. Dreyer. A new general catalogue of nebulae and clusters of stars, being the catalogue of the late Sir John F. W. Herschel, revised, corrected, and enlarged.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. London 1888. Vol. XLVIII. N°. 4. 8°.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1888. New Series. Vol. X. N°. 3. 8°.

Transactions and Proceedings of the botanical Society. Edinburgh 1888. Vol. XVII. Part 1. 8°.

DUITSCHLAND.

Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1888. Band CXI. Heft 1—2. 8°.

Schriften des naturwissenschaftlichen Vereins für Schleswig-Holstein. Kiel 1888. Band VII. Heft 1. 8°.

Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande. Bonn 1887. Jahrg. 44. 2te Hälfte. 8°.

R. Hoppe. Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1888. 2te Reihe. Teil VI. Heft 2. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1888. Jahrg. XI. N°. 273—275. 8°.

Zeitschrift für Naturwissenschaften, herausgegeben im Auftrage des naturwissenschaftlichen Vereins für Sachsen und Thüringen. Halle a/S. 1887. 4e Folge. Band VI. Heft 5—6. 8°.

Petermann's Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1888. Band XXXIV. Heft 2—3. 4°.

Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Gesellschaft. Würzburg 1887. Jahrg. 1887. 8°.

29ster Bericht des naturwissenschaftlichen Vereins für Schwaben und Neuburg. Augsburg 1887. 8°.

Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften. Marburg 1887. Jahrg. 1886 und 1887. 2 Dl. 8°.

XLIII—XLVIer Jahresbericht der Pollichia, eines naturwissenschaftlichen Vereins der Rheinpfalz. Dürkheim 1888. 8°.

ITALIË.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1887. Serie 4a. Rendiconti. Vol. III. Fasc. 10—11. 4°.

Annuario della reale Accademia dei Lincei. Roma 1888. 8°.

Bollettino delle pubblicazioni Italiane. Firenze 1888. N°. 52—53. 8°.

Atti della reale Accademia delle Scienze. Torino 1888. Vol. XXIII. Disp. 4—5. 8°.

Annales de Géologie et de Paléontologie, publiées sous la direction de A. DE GREGORIO. Palerme 1886. Livr. 1—5. 4°.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

Acta Universitatis Lundensis. Lund 1887—1888. Tomus XXIII. 4°.

Inhoud:

J. ASK. Om formaliteter vid kontrakt enligt romersk och svensk förmögenhetsrätt.
J. PAULSON. Studia Hesiodea I.
F. A. WULFF. Poèmes inédites de Juan de la Cueva.
J. THYREN. Verldsfreden under Napoleon.
A. ROSEN. Solution d'un problème d'électrostatique.
S. G. AGARDH. Till Algernas Systematik.

RUMENIË.

Analele Academiei Romane. Bucuresci 1888. Seria II Tomulu VIII. Sect. 2. Tomulu IX. 4°.

J. BIANU. Psaltirea in versuri intocmita de Dosofteiu, mitropolitul Moldovei, 1671—1686. Bucuresci 1887.8°.

V. A. URECHIA. Miron Costin, opere complete. Bucuresci 1888. Tomul II. 8°.

AZIË.

Meteorological Observations recorded at six stations in India. October-November 1887. 4°.

E. C. COTES and C. SWINHOE. A catalogue of the moths of India. Calcutta 1887. Part 2. Bombyces. 8°.

Journal of the China branch of the royal Asiatic Society. Shanghai 1887. New Series. Vol. XXII. N°. 1—2. 8°.

Imperial University of Japan. Calendar for the year 1887—1888. Tokyo 1888. 8°.

AMERIKA.

Proceedings of the Academy of natural Sciences. Philadelphia 1887. Part 3. 8°.

Journal of the American medical Association. Chicago 1888. Vol. X. N°. 6—11. 4°.

Johns Hopkins University Circulars. Baltimore 1888. Vol. VII. N°. 63. 4°.

American Journal of Philology, edited by B. L. GILDERSLEEVE. Baltimore 1887. Vol. VIII. N°. 4. 8°.

Johns Hopkins University Studies in historical and political Science. Baltimore 1887. 5th Series. N°. XII. 8°.

Proceedings of the Elliott Society of Science and Arts. Charlestown 1887. Vol. II. N°. 16—20. 8°.

Proceedings of the trustees of the Newberry Library. Chicago 1888. 8°.

Boletin de Estadistica del Estado de Puebla. Puebla de Zaragosa 1888. Tomo I. N°. 27—29. fol.

Revista do Observatorio, publicaçao mensal do imperial Observatorio do Rio de Janeiro. 1888. Anno III. N°. 1—2. 4°.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos-Aires 1888. Tomo XXV. Entr. 1—2. 8°.

AUSTRALIË.

F. Mc.Coy. Prodromus of the zoology of Victoria; or figures and descriptions of the living species of all classes of the Victorian indigenous animals. Melbourne 1887. Decade I—XIV. 4°.

F. von Mueller. Iconography of Australian species of Acacia and cognate genera. Melbourne 1887. Decade I—VIII. 4°.

AANGEKOCHT.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1888. Livr. 119—123. 4°.

Journal des Savants. Paris, Février 1888. 4°.

Annales des Sciences naturelles. Paris 1887. 7e Série. Zoologie. Tome IV. N°. 4—6. 8°.

Archives de Zoologie expérimentale et générale. Paris 1887. 2e Série. Tome V. N°. 3. 8°.

Bulletin des Sciences mathématiques. 2e Série. Tome XII. Février-Mars 1888. 8°.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1888. 6e Série. Tome XIII. Mars. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1888. 5th Series. Vol. XXV. N°. 154. 8°.

Annals and Magazine of natural History. London 1888. 6th Series. Vol. I. N°. 3. 8°.

Astronomische Nachrichten. N°. 2827—2831. 4°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1888. N°. 4—5. 8°.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1888. Jahrg. XII. N°. 8—12. 4°.

Beiträge zur Beurtheilung des Nutzens der Schutzpockenimpfung nebst Mittheilungen über Maszregeln zur Beschaffung untadeliger Thierlymphe. Berlin 1888. 8°.

Corpus inscriptionum latinarum. Berolini 1888. Vol. XI. Pars 1. fol.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1888. Jahrg. 6. Heft 1. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1888. Neue Folge. Band XXXIII. Heft 3—4. Beiblätter. Band XII. St. 2—3. 8°.

Journal für Ornithologie. Leipzig 1887. 4e Folge. Band XV. Heft 4. 8°.

Flora, oder allgemeine botanische Zeitung. Regensburg 1886—1888. Neue Reihe. Jahrg. 44, 45, 46 N°. 1—9. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1888. Band 267. N°. 8—12. 8°.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Lausanne 1888. 3e Période. Tome XXXVII. N°. 109. 8°.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1888. 3e Période. Tome XIX. N°. 3. 8°.

